數理經濟學

原理及題解

方世杰譯

曉園出版社
曉園圖書出版公司

ISBN 7-5062-1603-5/O·68
WB9303/5 定价：15.70元

數理經濟學
原理及題解

方世杰譯

曉園出版社
世界圖書出版公司
北京・广州・上海・西安

内 容 简 介

本书阐述了数学知识在经济学中的应用，每章后面都有大量的习题并给出解答，适于大学生和研究生阅读。

数理经济学原理及题解

(美) 道 林 著

方世杰 译

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司 重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1993 年 6 月第 一 版 开本：787×1245 1/20

1993 年 6 月第一次印刷 印张：26

印数：0001－1100 字数：42 万字

ISBN: 7－5062－1603－5/O · 68

定价：15.70 元 (W,9303/5)

世界图书出版公司通过中华版权代理公司向台湾晓园出版社购得重印权

限国内发行

譯　序

經濟學就所探討的主題而言，有個體經濟理論、總體經濟理論、財政學、國際經濟學、貨幣學、以及經濟發展理論等專門學科之分；而在研究方法上，則有數理分析與非數理分析之別。數理分析法以數學符號及方程式來陳述所欲探討之問題、所做之假設以及所獲得之結論，並配合數學定理從事嚴謹的推理及分析。而非數理經濟分析則訴諸文字的敍述與說理，至多佐以圖形的說明。

因此，數理經濟學以數學為概念，將定理與技巧用在經濟學，尤其是經濟理論上的各種應用。它實際上只是一種經濟分析方法，所分析的問題則分屬個體經濟理論、總體經濟理論、財政學等各專門學科。

與非數理分析方法比較起來，數理經濟分析或稱數理經濟學至少具有下列四項優點：1.所用之語言（數學）較精簡且明確，2.有豐富的數學定理可資利用，3.推理較為嚴謹，4.可將討論範圍擴充到多種物品、多項生產要素以及多個經濟政策者之一般化情況。

本書按「理論——題解」的內容編排方式，尤其適合於數理經濟學之研讀，這種透過邊作邊學的方法，確實可以提高學習效果，加深印象。此書的一大特色是，每一章節後面附有許許多多的問題，並且具備詳細的解答，令讀者唸完前面所介紹的理論，可以將所瞭解的概念印證在實際問題解決。

最後，本書雖稱不上一本完整的「題庫」，惟本書在內容的搜集上，其觸角既深且廣，幾乎涵蓋全部個體與總體經濟學的範圍，故詳讀本書的讀者對於經濟學的數理分析方面當無「遺珠之憾」。

1987年4月於台北　　方世杰

原　序

今日就研讀經濟學的人而言，數學工具的重要性已是不爭的事實，學生們須瞭解的數學概念，範圍包羅萬象不一而足。本書的目的即在滿足讀者這方面的需求。本書對於微分、積分、矩陣代數、線性規劃、微分方程、差分方程等數學概念在經濟學上的應用，作一全面性的扼要介紹。由於內容順序是按照微分、線性代數…等方式之編排，故如果有必要的話，讀者可以唸完第十與十一章有關線性代數之介紹後再回過頭來看第二章，並不會破壞全書之連續性。

本書各章的編排方式爲理論與題解並配以簡明的例子來說明，同時各章後面更有許許多多附有詳解的問題。這些主題與相關的問題大多先以簡單的數學推演再至較複雜的應用，由淺入深、脈絡相襲。此外，研讀本書只要具高中程度的數學基礎即可。而本書這種邊作邊學的內容編排方式，將可增大讀者的學習效果，並且可依個人之需要而調整研讀進度。

數理經濟學一書主要可作爲大學或研究所學生修習經濟學與商學之補充讀物。此外，本書包含的內容十分廣泛，故亦頗適合數學系及社會科學系學生使用，同時亦可作爲研習更高深數學理論之進階。

本書是休姆斯叢書中有關經濟學系列中最新出版的一本書。此一系列尚包括：個體經濟學、總體經濟學、發展經濟學、國際經濟學以及最近即將出版的經濟學原理。

目　錄

第 一 章　術語、概念與工具　1

1. 常數、變數、參數與係數　1　/2. 函數　1　/3. 一般特定的函數　2　/4. 座標圖、斜率與截距　3　/5. 逆函數　4　/6. 解　5　/ 習題與解答　7

第 二 章　座標圖與方程式在經濟學上之應用　21

1. 圖形與方程式之運用範圍　21　/2. 供給與需要之分析　22　/3. 所得決定之模型　22　/4. IS-LM分析　23　/ 習題與解答　24

第 三 章　導數與微分法則　45

1. 曲線函數的斜率　45　/2. 導數　46　/3. 導數的符號　47　/ 4. 微分法則　47　/5. 高階導數　51　/ 習題與解答　51

第 四 章　導數在經濟學上的應用　65

1. 邊際的概念　65　/2. 函數之極大化與極小化　65　/3. 價格彈性　67　/4. 總的、邊際的與平均的概念之關係　70　/ 習題與解答　71

第 五 章　多變數函數之微分　97

1. 偏導數　97　/2. 二階偏導數　98　/3. 微分　99　/4. 全微分與偏微分　99　/5. 全導數　100　/6. 隱函數與逆函數之微分法　102　/7. 多變函數之最適化　103　/8. 有限制條件的極值　105　/ 9. 拉格朗齊乘數　106　/ 習題與解答　107

第 六 章　多變數函數之微分在經濟學上之應用　121

1. 邊際生產力　121　/2. 所得決定之乘數　121　/3. 偏彈性　122

/4. 自變數之變化 123 /5. 經濟學中多變數函數之極大化與極小化 125 /6. 有限制條件之經濟函數的極大與極小 127 /7. 不等限制式 127 / 習題與解答 129

第七章 對數與指數之複習 151

1. 冪函數 151 /2. 指數函數 151 /3. 自然指數函數 152 /4. 對數函數 153 /5. log之形成 153 /6. 插補法 154 /7. 反對數 154 /8. 對數之法則 155 /9. 自然對數 156 /10. 指數函數之對數解法 157 /11. 對數與指數函數間之關係 157 / 習題與解答 158

第八章 指數、對數與冪函數在經濟學上之應用 169

1. 複利 169 /2. 實際利率與名目利率 170 /3. 折現 171 /4. 未來所得川流之折現 171 /5. 間斷與連續成長之轉換因子 172 /6. 由資料所代表之時點估計其成長率 173 /7. 齊次生產函數 175 /8. 規模報酬 176 / 習題與解答 177

第九章 指數、對數與冪函數之微分法 187

1. 冪函數之法則 187 /2. 自然指數函數法則 187 /3. 指數函數法則（基底為 a） 188 /4. 自然對數函數法則 188 /5. 對數函數法則 189 /6. 高階導數 190 /7. 偏導數 191 /8. 指數與對數函數之最適化 /9. 另一種測量成長之方法 192 /10. 最適期間 193 /11. 一般化C-D函數受限制之極值 194 / 習題與解答 195

第十章 矩陣或線性代數之基本原理 221

1. 矩陣代數之功用 221 /2. 定義與術語 221 /3. 矩陣之加法與減法 222 /4. 純量乘法 223 /5. 向量之乘法 223 /6. 矩陣之乘法 224 /7. 矩陣代數之交換律、結合律與分配律 226 /8. 單位矩陣與零矩陣 228 /9. 線性方程組之矩陣表示式 229 /10. 列之運算 230 /11. 擴張矩陣 230 /12. 求解線性方程式之高斯

方法 231 ／習題與解答 232

第十一章 反矩陣 255

1. 行列式與非奇異性 255 /2. 高階行列式 255 /3. 子行列式與餘因式 256 /4. 拉普拉斯展開式 257 /5. 行列式之特性 258 /6. 餘因式與伴隨矩陣 259 /7. 反矩陣 259 /8. 以反矩陣求解矩陣方程式 260 /9. 矩陣求解之克萊莫法則 261 /10. 以高斯方法求反矩陣 263 ／習題與解答 264

第十二章 特殊行列式與矩陣以及它們在經濟學上之應用 295

1. 葛哥比行列式 295 /2. 赫辛行列式 296 /3. 三階赫辛行列式 297 /4. 有限制條件時求極值之鑲邊的赫辛行列式 299 /5. 馬夏爾需求函數之導出 301 /6. 投入－產出分析 302 /7. 特性根與特性向量 304 /8. 轉換矩陣 306 ／習題與解答 306

第十三章 線性規劃：圖形方法 339

1. 圖解 339 /2. 極點定理 341 /3. 鬆弛變數或超額變數 342 /4. 基底定理 343 ／習題與解答 344

第十四章 線性規劃：簡形算則 355

1. 簡形算則：求極大值問題 355 /2. 邊際值或影子價格 358 /3. 簡形算則：極小化之問題 359 ／習題與解答 363

第十五章 線性規劃：對偶 375

1. 對偶 375 /2. 求取對偶問題之轉換規則 375 /3. 對偶定理 376 /4. 使用對偶問題之優點 378 /5. 對偶問題中之影子價格 379 /6. 影子價格與拉格朗齊乘數 379 ／習題與解答 380

第十六章 積分：不定積分 389

1. 積分 389 /2. 積分法則 389 /3. 初始條件與邊界條件 392 /4. 替代積分法 392 /5. 部分積分法 393 /6. 經濟學上之應用

395 /習題與解答 396

第十七章 積分：定積分 407

1. 曲線下之面積 407 /2. 定積分 407 /3. 微積分學之基本定理 408 /4. 定積分之性質 409 /5. 瑕積分 410 /6. 現金流量之現值 411 /7. 消費者與生產者剩餘 411 /8. 定積分與機率 412 /習題與解答 413

第十八章 微分方程式 425

1. 定義與觀念 425 /2. 一階線性微分方程式之一般公式 425 /3. 恰當方程式 428 /4. 積分因式 429 /5. 積分因式分解之法則 429 /6. 變數之分割 430 /7. 貝努力方程式 431 /8. 經濟學上之應用 432 /習題與解答 433

第十九章 差分方程式 457

1. 定義與概念 457 /2. 一階線性差分方程式之一般公式 458 /3. 穩定條件 458 /4. 蛛網模型 460 /5. 蛛網模型 461 /6. 哈樂得模型 463 /習題與解答 464

第二十章 二階微分與差分方程式 473

1. 二階微分方程式 473 /2. 二階差分方程式 475 /3. 特性根 476 /4. 共軛複數 477 /5. 三角函數 478 /6. 三角函數之導數 479 /7. 虛數與複數之轉換 480 /8. 穩定條件 482 /習題與解答 482

附錄 I 四位數常用對數表 497

附錄 II 自然對數表 499

附錄 III 指數函數表 505

索 引 507

第一章
術語、概念與工具

1·1 常數、變數、參數與係數

一個典型的供給方程式爲

$$Q_s = -a + bP \tag{1.1}$$

式中Q_s＝供給量，P＝價格。**常數**（constant）是指在一已知問題中固定不變的數量，**數值常數**（numerical constant）是指在全部問題中其常數具同一數值者；**符號常數或參數**（symbolic constant or parameter）如(1.1)式之a與b，指在已知的問題有相同數值，但不同的問題其數值可能有異。**變數**（variable）指在一已知問題下一組可能之數值，於(1.1)式中，Q_s與P爲變數，又因爲Q_s之值視P而定，故Q_s稱爲**依變數**（dependent variable），而P稱爲**自變數**（independent variable），一方程式體系中，如果其變數之值決定於此體系，則這些變數謂之**內生的**（endogenous）；而那些決定於體系以外者稱爲**外生的**（exogenous）。位於變數前面之數值或符號常數爲一**乘數**（multiplier），如(1.1)之b，並稱之爲**係數**（coefficient）。

例題1.1

已知$C = 50 + 0.85Y$，式中C＝消費，Y＝所得。C與Y爲變數，因爲我們可假設Y爲任一正值，而C則依此方程式所定義之方式隨著Y而變動，50與0.85爲數值常數，又C爲依變數，Y爲自變數（因爲C之值決定於Y）；0.85是Y之係數。

1·2 函 數

一**函數**（function），如$y = f(x)$者，指兩個變數(x, y)之關係式，並使得x的值與y的值存在單一之對應關係，如例2所詳述。符號$f(x)$讀作"f of x"，y稱爲函數值；x稱爲函數的**引數**（argument），x與y亦分別稱爲自變數與依變數。又函數可以文辭、代數或圖形表達之（參見例3）。

例題1.2

於圖1-1(a)，y爲x之函數，$y = f(x)$，因爲每一個x值只存在一個y值與之

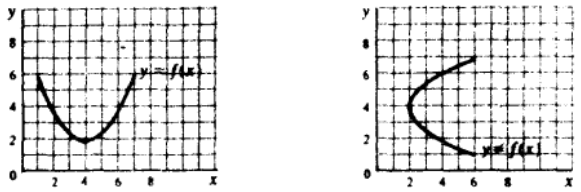


圖 1-1

對應（例如，$x=4$ 時 $y=2$），於圖 1-1(b)中 y 不是 x 之函數，$y \neq f(x)$，因爲在已知之 x 值下，存在多個 y 值與之對應（例如，$x=4$ 時，$y=2$ 與 6）。

例題 1.3

經濟學家經常論及消費與所得之間的關係，因爲消費與所得之間存在有函數之關係，即消費爲所得的函數，此關係式以代數表示則爲 $C=f(Y)$，應注意的是，符號 $f(Y)$ 表 C 爲 Y 之函數而非 f 乘 Y。此消費函數之圖形如圖 1-2所示。

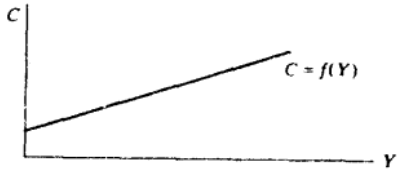


圖 1-2

例題 1.4

除了 f 以外之其它字母亦可代表函數，亦即除了寫成 $y=f(x)$ 以外，下列各式亦成立：$y=g(x)$，$y=F(x)$，$y=G(x)$ 等。如果 y 與 z 均爲 x 之函數則函數式之表示必須使用不同之字母，即 $y=f(x)$，$z=g(x)$，又希臘字母 ϕ 與 ψ 亦經常被使用，如 $y=\phi(x)$ 或 $z=\psi(x)$。爲了更簡化起見，經濟學的教科書經常不用 f 與 g 表示，而逕以依變數之符號爲函數之符號，例如，$y=y(x)$，$z=z(x)$ 與 $C=C(Y)$。

1.3 一般與特定的函數

一般性的函數（general function）只列出那些影響依變數的各個自變數，但並未說明它們（自變數與依變數）之間的關係。而**特定的函數**（specific function）不只列出其自變數，並且說明這些自變數依那一種方式來影響依變數，參見例 5。

例題 1.5

經濟學家認爲消費者對一財貨購買之數量，決定於此財貨價格，消費者所得，有關財貨之價格及消費者之偏好。此關係式可以一般函數表示如下

$$Q_d = f(P, Y, P_r, T) \tag{1.2}$$

式中Q_d＝需求量，P＝價格，Y＝所得，P_r＝有關財貨之價格，而T＝消費者嗜好。函數（1.2）式只列出這些自變數，但未予說明價格是以何種方式影響需求或需求如何隨著所得而變動，反之，如果以特定函數來表示，則如

$$Q_d = 250 - 5P + 0.03Y + 0.2P_r + 0.02T \tag{1.3}$$

此式很明顯地指出自變數影響依變數之程度大小與方向，例如，P上漲1單位則Q_d減少5單位。此外，參數亦可能出現在特定函數中，即

$$Q_d = a - bP + cY + dP_r + eT \tag{1.4}$$

與（1.2）式不同的是，（1.4）式限定這些自變數之冪（次方）均不超過1。

1.4 座標圖，斜率與截距

只有一個自變數的函數，$y = f(x)$，可以很容易的畫在二度空間的平面座標圖，通常依變數y被標示於縱軸；自變數x則標示在橫軸。一條線的斜率是測量縱軸所代表之變數值的變動除以橫軸所代表變數之變動量（Δ），因而斜率等於$\Delta y/\Delta x$。縱軸截距是指曲表中與縱軸相交之點，亦即，當自變數x等於0時依變數之值謂之，有關座標圖之複習，請參見問題1.11與1.12。

例題 1.6

函數$y = 16 - 4x$之座標圖爲圖1-3所示，斜率$= \Delta y/\Delta x = -4/1 = -4$，縱軸截距爲16［當$x = 0$，$y = 16 - 4(0) = 16$］。

一條直線之斜率爲固定常數，正斜率代表朝上傾斜之線；負斜率代表朝下傾斜之線（應記住，座標圖就像英文一樣，它總是由左至右讀）。但是，有時候經濟學上變動的方向被視爲理所當然，而其所感興趣的只是變動數量之大小，此時，斜率通常只取其絕對值（亦即，只取斜率之值，而與正負符號無關）。

例題 1.7

根據函數不同，座標圖有不同之形式，在經濟學中經常出現的三種單一自變數之函數如下，它們所對應之座標圖示於圖1-4中。

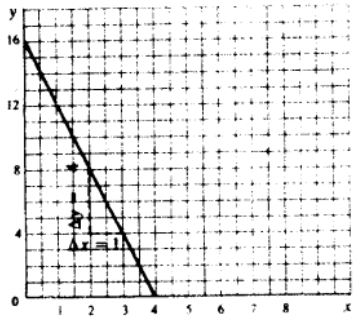
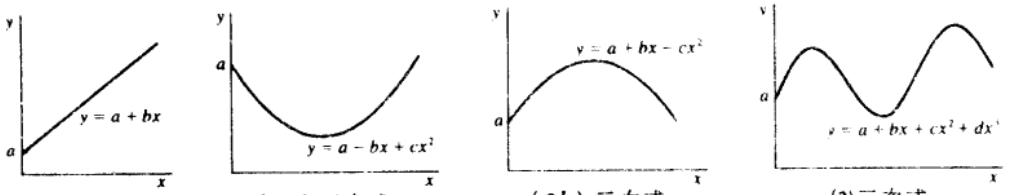


圖 1-3



(1)一次式　(2a)二次式　(2b)二次式　(3)三次式

圖 1-4

(1) 一次式：　$y = a + bx$　　沒有變數之次方（冪）超過 1 。

(2) 二次式：　$y = a + bx + cx^2$　　變數最高次方（冪）爲 2 。

(3) 三次式：　$y = a + bx + cx^2 + dx^3$　　變數最高次方（冪）爲 3 。

注意事項：

- 線性方程式之座標圖必爲一直線。
- $c > 0$時二次式方程式之圖形爲開口向上之拋物線；反之，$c < 0$時，其圖形爲開口朝下之拋物線。
- 上述所有方程式中 a 代表縱軸截距。
- 於線性方程式中，b 爲該線之斜率，如例 6 所討論者。
- 某些參數有時可爲零，例如，線性方程式中 a 而非 b 可爲零；二次式中 a 與 b 而非 c 可爲零；三次式中，則 a ，b ，c 可爲 0 ，而 d 則否，如果於(3)中 b 與 c 均爲 0 ，則三次式可寫爲 $y = a + dx^3$ 。

1-5 逆函數

已知一函數 $y = f(x)$ ，則其逆函數（inverse function），$x = f^{-1}(y)$存在的

條件是，每一個 y 值有單一 x 與之對應，參見例 8 。

例題 1.8

在傳統的供、需分析中，$P = f(Q)$ ，P位於縱軸而Q位於橫軸，而以數學 - 導向（mathematically-oriented）之教科書之寫法則爲 $Q = F(P)$ ，Q位於縱軸，而P位於橫軸。因此要將其中一種形式轉換爲另外形式，則需涉及逆函數之概念，亦即，如果

$$Q_d = a - bP$$

則 $$bP = a - Q_d \qquad 故 \qquad P = \frac{a - Q_d}{b} = \frac{a}{b} - \frac{Q_d}{b}$$

參見題解 1.10 與 2.3 。

例題 1.9

經濟變數的表示法亦可能因另一種方式而混淆，於數學上 y 往往用以代表依變數，且位於縱軸上，曲線之斜率爲 $\Delta y/\Delta x$ ，而在經濟學上，Y則經常用以代表所得，在一典型的消費函數，如 $C = 25 + 0.75Y$ ，其中Y爲自變數，並被畫於橫軸上（如圖 1-5所示），此線之斜率爲 $\Delta C/\Delta Y$（即依變數之變動量除自變數之變動量）。因此必須小心，不要只考慮符號而應注意這些符號所代表的是依變數或自變數。

同時要注意，當消費函數爲典型的線性式 $C = a + bY$ 時，式中，$a = 25$ ＝縱軸截距，$b = 0.75$ ＝斜率。將經濟學與數學意義相連結，則a代表自發性消費（autonomous consumption），因爲它表示 $Y = 0$ 時之消費水準，而 b 等於邊際消費傾向（marginal propensity to consume, MPC ）因爲它表示，所得變動一單位所引起消費之變動量，$\Delta C/\Delta Y$ 。

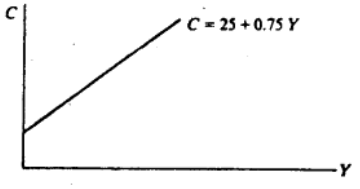


圖 1-5

1-6 解

一個只含一個未知數之線性方程式之解，即將未知變數移至方程式左邊而將所有常數移至右邊即可，此外二次式方程式，如 $ax^2 + bx + c = 0$ 者可經由因式分解或由

下列之公式求得其解

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.5}$$

（注意，傳統的公式中，參數的次序與此不同，並且以 c 而非 a 表縱軸截距。）

例題 1.10

一典型之利潤函數 $\pi = -Q^2 + 11Q - 24$，由圖 1-4（2*b*）知，π 將先增加後減少，而損益平衡點（$\pi = 0$），可以二次式之公式求取，其中 $a = -1$，$b = 11$，$c = -24$ 而 $x = Q$，故

$$Q_1, Q_2 = \frac{-11 \pm \sqrt{(11)^2 - 4(-1)(-24)}}{2(-1)} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 96}}{-2}$$

$$Q_1 = 3 \qquad Q_2 = 8$$

爲求解聯立方程組，這些方程式必須爲(1)一致的（即彼此不互相矛盾），(2)獨立的（任二者之間不是倍數關係），(3)一致且獨立之方程式的個數與變數個數相同。諸如此種線性聯立方程組之求解可由消去法或替代法而求得（參見例 12）。此外，亦可利用第十一章所討論的行列式方法。

例題 1.11

下列二條方程式，很明顯地並不一致，因爲 $x + y$ 不可能同時等於 6 與 10。

$$x + y = 6 \qquad x + y = 10.$$

而下列二條方程式並非獨立，因爲第二條方程式是第一條方程式之 2 倍，然而，此種倍數之關係並不總是那麼顯而易見（請參見問題 1.16）。

$$2x + 3y = 13 \qquad 4x + 6y = 26$$

例題 1.12

兩商品，奶油與人工奶油之均衡條件如下之（1.6）與（1.7）所示，式中 P_b 爲奶油之價格，P_m 爲人工奶油之價格。

$$8P_b - 3P_m = 7 \tag{1.6}$$
$$-P_b + 7P_m = 19 \tag{1.7}$$

上述模型之均衡價格可由代替法或消去法求得。

代替法

(1) 以方程式中一變數來表示另一變數，解 (1.7) 可得

$$-P_b + 7P_m = 19$$
$$P_b = 7P_m - 19$$

(2) 將此值代入 (1.6) 式可得

$$8P_b - 3P_m = 7$$
$$8(7P_m - 19) - 3P_m = 7$$
$$56P_m - 152 - 3P_m = 7$$
$$53P_m = 159 \qquad P_m = 3$$

(3) 將 $P_m = 3$ 代入 (1.6) 或 (1.7) 式可求得 P_b 。

$$8P_b - 3P_m = 7$$
$$8P_b - 3(3) = 7$$
$$8P_b = 16 \qquad P_b = 2$$

消去法

(1) 將 (1.7) 式乘以 (1.6) 式中 P_b (或 P_m) 係數之絕對值，同時將 (1.6) 式乘以 (1.7) 式中 P_b (或 P_m) 係數之絕對值，如果，我們選取 P_m ，則

$$7(8P_b - 3P_m = 7) \qquad 56P_b - 21P_m = 49 \qquad (1.8)$$
$$3(-P_b + 7P_m = 19) \qquad -3P_b + 21P_m = 57 \qquad (1.9)$$

(2) 將 (1.8) 與 (1.9) 式相加或相減以消去我們所選取之變數 (P_m) ，在此，應相加，則

$$53P_b = 106 \qquad P_b = 2$$

(3) 以 $P_b = 2$ 代入 (1.6) 或 (1.7) 式以求解 P_m —— 如上述步驟 3 所示。

習題與解答

函數關係式

1.1 已知兩組方程式

(1) $Q_d = a + bP$ (2) $S = -50 + 0.3Y$
$Q_s = c + dP$ $I = 250 - 0.2i$

式中 S = 儲蓄， I = 投資， i = 利率，而其它變數之意義，則如一般所熟悉者，試認定其 (a) 常數爲數值的或參數的；(b) 變數爲自變數或依變數；(c) 係數。

答 (a) 於(1)組中，常數爲 a ， b ， c ， d ；它們均爲參數的常數或簡稱參數，而於

(2)組中，-50，0.3，250與-0.2均爲數值常數。

(*b*) 於(1)組中，變數有Q_d，Q_s，P，其中Q_d與Q_s爲依變數，因爲它們之值決定於P，而P爲自變數。於(2)組中，S，Y，I與i爲變數；S與I爲依變數，Y與i則爲自（獨立）變數。

(*c*) 於(1)組中，b與d爲係數，它們均爲變數P前之可相乘的常數，於(2)組中，0.3與-0.2爲係數。

1.2 (*a*) 試定義函數一詞，(*b*) 圖 1-6 中何者不表示y爲x之函數，爲什麼？

答 (*a*) 函數$y = f(x)$指y與x間之關係式，式中y之值視x而定，並且對於每一個x只有一個y值與之對應。

(*b*) 圖 1-6(*a*) 所示者，y不是x之函數，因爲對於每一個x值，可得超過一個以上之y值，例如，$x = x_1$時，$y = y_1, y_2, y_3$。另外圖 1-6(*b*)則表示y爲x之函數，因爲對於每一個x值，只有一個且是唯一的一個y值，如$x = x_2$時，$y = y_4$。

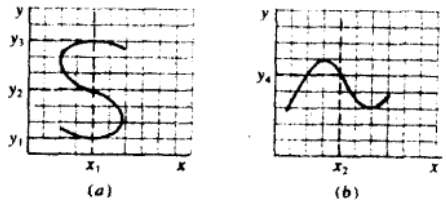


圖 1-6

1.3 試分別以一般函數及特定函數之表示法，列示下列各個陳述，請以非$f(\ )$之符號表示之。

(*a*) 圓之面積（A）爲半徑（r）之函數。

(*b*) 長方形之週邊（P）爲其長度（l）與寬度（w）之函數。

(*c*) 總要素成本（TFC）爲僱用之勞動數量（L）與資本數量（K）之函數，當勞動之價格爲 \$3，而資本之價格爲 \$5。

(*d*) 總收益（TR）爲產出（Q）之函數，當$P_Q = 5$。

(*e*) 每日勞動（L）之工資（W）爲L之函數，當$P_L = 42.50$一天。

答 (*a*) $A = f(r)$, $A = \pi r^2$

(*b*) $P = g(l, w)$, $P = 2l + 2w$

(*c*) $\mathrm{TFC} = \phi(K, L)$, $\mathrm{TFC} = 3L + 5K$

(*d*) $\mathrm{TR} = \mathrm{TR}(Q)$, $\mathrm{TR} = 5Q$

(*e*) $W = W(L)$, $W = 42.50L$

1.4 某一俱樂部成員共100個會員，每一會員收取費用 \$15，此後每增加一會員收取費用 \$20，(*a*) 試列式酒宴之成本（C）爲賓客（G）人數之函數，(*b*) 指

出上列函數之自變數與依變數，(*c*) 畫出此函數之圖形。

圖 (*a*) 因爲該俱樂部有 100 個成員，每一個會員費用爲 $15，故其固定成本共 $1,500，此固定成本將不致隨著參加宴會人數多寡而改變。另外，每增加一位賓客之邀請則成本增加 $20，故，$c = 1500 + 20G$。

(*b*) 上式中，*c* 爲依變數，因爲其數值大小，視受邀請之賓客人數多寡而定，而 *G* 爲自變數，因爲其數值大小與此函數無關。

(*c*) 因爲成本爲依變數，故將其畫在縱軸上；而賓客人數則表示於橫軸，又此函數爲線性式 $y = a + bx$；而 1500 爲其縱軸截距，且其斜率爲 20，見圖 1-7。

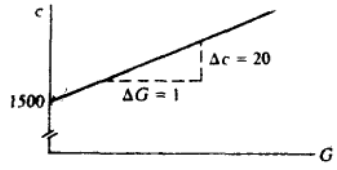


圖 1-7

1.5 假設一廠商之固定成本不隨產出多少變動，而固定於 FC = $600，變動成本（VC）則爲每增加一單位產出（*Q*）而增加 $5 之成本，故總成本（TC）= FC + VC，並假設此商品每單位售價爲 $10，試指出 (*a*) 固定成本函數，(*b*) 變動成本函數，(*c*) 總成本函數，(*d*) 總收益函數，(*e*) 試以代數方法求其損益平衡點，(*f*) 再以圖形求解損益平衡點。

圖 (*a*) 因爲固定成本與產出（*Q*）無關，固定成本函數爲 FC = 600。

(*b*) 變動成本爲每單位產出 $5，故 $VC = 5Q$。

(*c*) 因爲 TC = FC + VC，$TC = 600 + 5Q$。

(*d*) TR = PQ，代入 $P = 10$，$TR = 10Q$。

(*e*) 在損益平衡點時，TR = TC 以上述之 (*c*) 與 (*d*) 代入左式。

$$TR = TC$$
$$10Q = 600 + 5Q$$
$$5Q = 600 \qquad Q = 120 \quad \text{爲損益平衡點}$$

(*f*) 見圖 1-8。

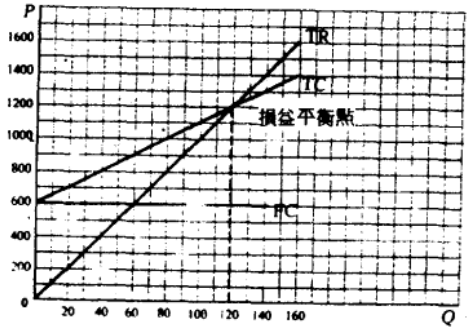


圖 1-8

1.6 從表 1 中，(*a*) 試列示說明儲蓄（S）爲所得（Y）之線性函數，(*b*) 畫出此函數。

表 1

Y	0	1000	2000	3000	4000
S	−400	−200	0	200	400

圖 (*a*) 對一線性函數言，其方程式之形式爲 $S = a + bY$，式中 a 爲縱軸截距，b 爲斜率；縱軸截距乃指自變數（Y）爲零時，S 之值，因此，$a = -400$，此外於儲蓄函數中此點謂之自發性儲蓄（autonomous savings），因爲它乃表示，當所得爲零時之儲蓄水準（故此自發性儲蓄之發生與所得無關）。斜率 (*b*) 乃測量當自變數，（Y）變動一單位時所引起依變數（S）之變動量，又因爲所得每增加 1000，儲蓄增加 200，故斜率 $\Delta S/\Delta Y = \frac{200}{1000} = 0.2$，就經濟學術語言，此斜率亦稱爲邊際儲蓄傾向（marginal propensity to save，MPS），或所得每變動一單位儲蓄之變動量，故此方程式可寫爲

$$S = -400 + 0.2Y$$

(*b*) 此函數以圖形表示之，則儲蓄（依變數）在縱軸，所得（自變數）在橫軸上，而直接將表 1 描在此座標圖上，或更簡單地以(*a*)所導出的方程式來作圖，亦即由縱軸截距（−400）爲起點並以斜率 0.2 畫出往上升之直線，見圖 1-9。

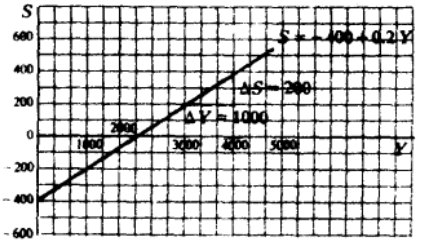


圖 1-9

1.7 假設三個獨立之經濟主體其消費函數分別爲 (*a*) $C_1 = 1600 + 0.75Y$，(*b*) $C_2 = 750 + 0.9Y$，(*c*) $C_3 = 1200 + 0.8Y$，試分別導出它們之儲蓄函數。

圖 (*a*) 於線性消費函數 $C = a + bY$，a = 自發性消費，b = MPC（參見例 1.9），此時，與所得無關之消費爲 1600，爲了達到此消費水準，人們必須貸款 1600 或從以前之儲蓄中取出 1600，因而，自發性之儲蓄水準爲 −1600。又 $b = 0.75$ = MPC，則由於 MPC + MPS = 1 故 MPS = 0.25，因此儲蓄函數爲 $S_1 = -1600 + 0.25Y$，本題亦可由 $S = Y - C$ 之等式求解。

(*b*) $S_2 = -750 + 0.1Y$

(*c*) $S_3 = -1200 + 0.2Y$

1.8 已知$C = 25 + 0.6Yd$，$Yd = Y - T$且$T = 5$，其中$Yd =$ 可支用所得而$T =$ 稅賦，試列式說明C爲Y（而Yd）之函數。

圖

$$C = 25 + 0.6\,Yd$$

以$Yd = Y - T$代入　可得

$$C = 25 + 0.6(Y - T)$$

再以$T = 5$代入　可得 $C = 25 + 0.6(Y - 5) = 25 + 0.6\,Y - 3 = 22 + 0.6\,Y$

1.9 試辨認 (*a*) $Y = f(C, I)$，(*b*) $Y = C_0 + bY + I_0$，(*c*) $\pi = -Q^2 + 13Q - 42$爲一般性函數或特定函數，並解釋之。

圖 函數 (*a*) 爲一般性，它說明Y與C，I之關係，但並無詳細說明它們之間相關聯之方式。

函數 (*b*) 爲特定性，因爲它處理的是線性關係式。

函數 (*c*) 並爲特定的，亦爲二次式函數，並確切地描述Q如何影響π。

1.10 試求下列之逆函數 (*a*) $I = 130 + 0.25Y$ 與 (*b*) $Q_d = 75 - 15P$。

圖 (*a*) 因爲I爲Y之函數，則其逆函數即以I表示Y以求解，因此

$$I = 130 + 0.25\,Y$$

$$0.25\,Y = I - 130$$

$$Y = 4I - 520$$

(*b*) 同樣地，

$$Q_d = 75 - 15P$$

$$15P = 75 - Q_d$$

$$P = 5 - \tfrac{1}{15}Q_d$$

座標圖

1.11 試畫出下列各方程式之座標圖，並指出其斜率與截距：

(*a*) $3y - 6x = 3$　(*b*) $2y - \frac{2}{3}x = 6$　(*c*) $y + 5x - 20 = 0$　(*d*) $x + 2y - 4 = 0$

圖 爲畫方程式於座標圖上，首先必須以一變數來求解另一變數，通常是以自變數來表示（轉換）依變數，即以x表示y，故

(*a*) $3y - 6x = 3$

$3y = 3 + 6x$

$y = 1 + 2x$

(*b*) $2y - \frac{2}{3}x = 6$

$2y = 6 + \frac{2}{3}x$

$y = 3 + \frac{1}{3}x$

(*c*) $y + 5x - 20 = 0$

$y = 20 - 5x$

(*d*) $x + 2y - 4 = 0$

$y = 2 - \frac{1}{2}x$

然後建立一個配適上列各方程式之不同點的組合表，並將之描繪於座標圖上，請參見圖 1-10。如果是一線性函數，則必須在任兩點間畫一直線或者利用我們對線性方程式$y = a + bx$的認識，直接由其截距a與取適當之斜率b畫出此線。

方程式 (a)：

$$\text{斜率} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+2}{+1} = +2$$

即 x 每增加一單位，y 增加 2。

而縱軸截距 = 1

因當 $x = 0$，$y = 1 + 2(0) = 1$。

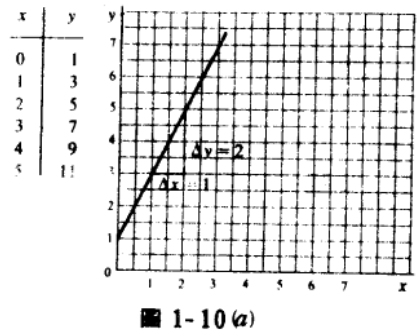


圖 1-10 (a)

方程式 (b)：

$$\text{斜率} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+1}{+3} = +\frac{1}{3}$$

即 x 每增加一單位，y 增加 $\frac{1}{3}$。

縱軸截距 = 3

因當 $x = 0$，$y = 3 + \frac{1}{3}(0) = 3$。

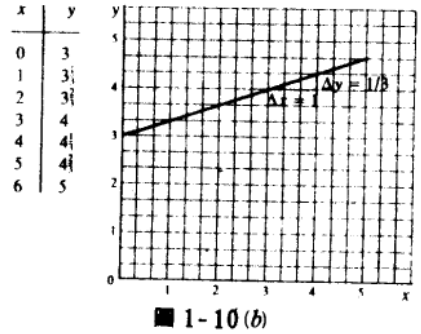


圖 1-10 (b)

方程式 (c)：

$$\text{斜率} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5}{+1} = -5$$

即 x 每增加一單位，y 減少 5。

縱軸截距 = 20

因當 $x = 0$，$y = 20 - 5(0) = 20$。

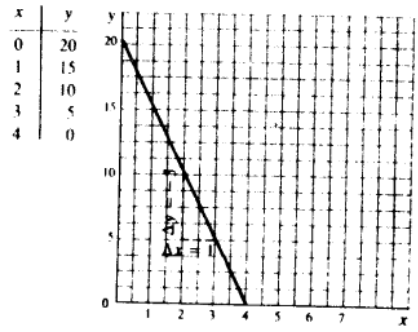


圖 1-10 (c)

方程式 (d)：

$$\text{斜率} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{+2} = -\frac{1}{2}$$

即 x 每增加一單位，y 減少 $\frac{1}{2}$。

縱軸截距 = 2

因當 $x = 0$，$y = 2 - \frac{1}{2}(0) = 2$。

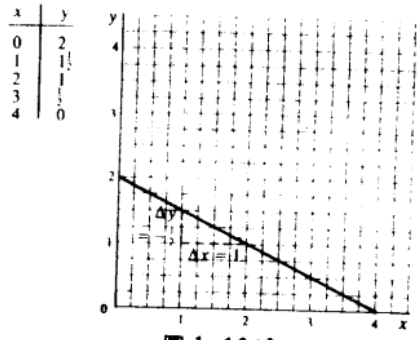


圖 1-10 (d)

1.12 圖 1-11 中每個座標圖上所繪示之曲線，其斜率與截距各爲何？

圖 (*a*) 斜率 $= \Delta y / \Delta x = +5/+10 = +\frac{1}{2}$，即 x 每增加一單位，y 增加 $\frac{1}{2}$，截距 $= 10$，因爲當 $x = 0$，$y = 10$。

(*b*) 斜率 $= \Delta y / \Delta x = -40/1 = -40$，即 x 每增加一單位，y 減少 40，截距 $= 80$。

(*c*) 斜率 $= \Delta C / \Delta Y = +\frac{75}{100} = +\frac{3}{4} = 0.75$，截距 $= 50$。

(*b*) 斜率 $= \Delta S / \Delta Y = +\frac{20}{100} = +\frac{1}{5} = 0.2$，截距 $= -60$。

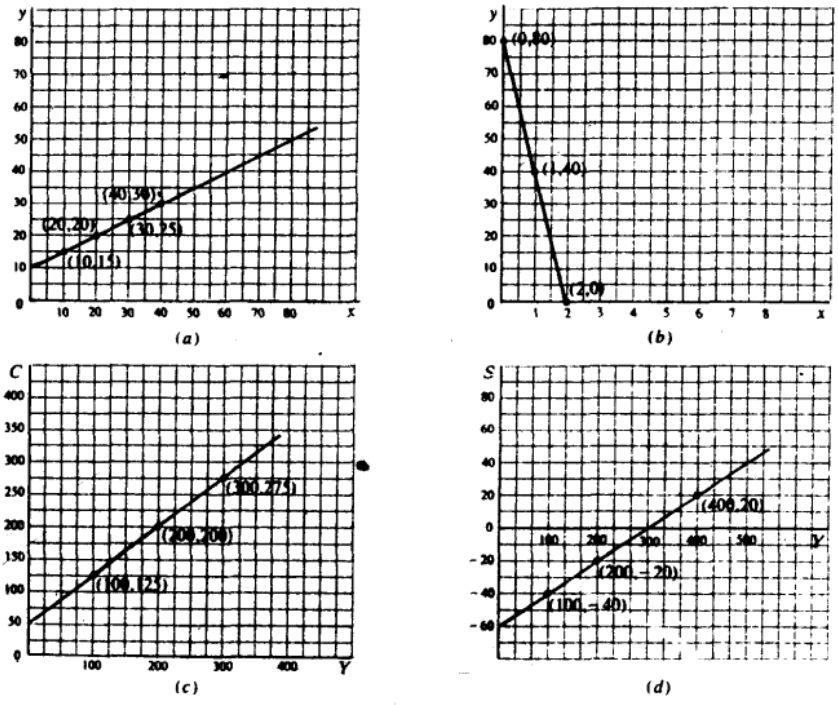


圖 1-11

1.13 試寫出圖 1-11 之每一曲線的方程式。

圖 (*a*) $y = 10 + \frac{1}{2}x$　(*b*) $y = 80 - 40x$　(*c*) $C = 50 + \frac{3}{4}Y$　(*d*) $S = -60 + \frac{1}{5}Y$

注意：因爲這些圖形爲線性（直線）函數，故皆適用一般之公式，$y = a + bx$，其中 a = 截距，b = 斜率。

1.14 圖 1-11 (*c*) 與 (*d*) 各提供了什麼重要之經濟訊息？

圖 圖 1-11 (*c*) 之縱軸截距代表社會上自發性消費的水準；而其斜率（$\Delta C / \Delta Y$）則爲其MPC。同理，圖 1-11(*d*) 之截距代表自發性儲蓄而斜率代表MPS或 $\Delta S / \Delta Y$。

這些訊息亦可直接由問題 1.13 之方程式看出，其中 a 等於自發性消費或儲蓄，而 b 等於MPC或MPS。

1.15 求解下列聯立方程式；分別以 (*a*) 代數方法中的消去法，(*b*) 圖形分析法，(*c*) 它們是一致或不一致，獨立或相依試區別之。

$$2x - 4y = -24 \qquad 9x - 3y = -3$$

解 (*a*) 利用例 12 討論之消去法，首先以 3 乘以第一個方程式，而以 4 乘以第二個方程式，則

$$3(2x - 4y = -24) \qquad 4(9x - 3y = -3) \qquad 6x - 12y = -72 \qquad 36x - 12y = -12$$

第一個方程式減去第二個方程式，而消去 y。

$$30x = 60 \qquad x = 2$$

以 $x = 2$ 代入任一原始方程式

$$2(2) - 4y = -24$$
$$-4y = -28 \qquad y = 7$$

(*b*) 以圖形分析如下，每一方程式均轉換爲以 x 表示 y 之值

$$2x - 4y = -24 \qquad 9x - 3y = -3$$
$$-4y = -24 - 2x \qquad -3y = -3 - 9x$$
$$y = 6 + \tfrac{1}{2}x \qquad y = 1 + 3x$$

座標圖繪示於圖 1-12。

(*c*) 這些方程式爲一致的且獨立的，而其解爲唯一的 ($x = 2$，$y = 7$)，此可由圖 1-12 中唯一交點證實此結論。

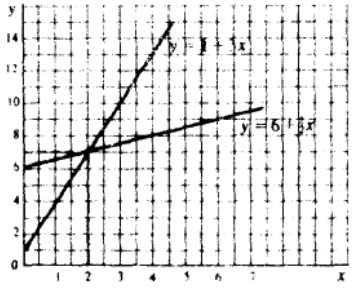


圖 1-12

1.16 若方程組爲 $\begin{cases} 2x + 3y = 27 \\ 6x + 9y = 81 \end{cases}$，試回答問題 1.15 之 (*a*)，(*b*)，(*c*) 三個問題。

解 (*a*) 爲消去 x，我們以 6 乘以第一個方程式，而以 2 乘以第 2 個方程式，或更簡單的只以 3 乘以第一個方程式，則

$$3(2x+3y=27) \qquad 6x+9y=81$$

因爲此時兩個方程式完全相同，故很明顯的此二條方程式存在倍數關係，因此，由於訊息（條件）不夠故無法求得單一解，因爲此時只有一條方程式而未知數却有兩個。

(*b*) 若以圖形分析，則首先將每一條方程式均轉換爲以 x 表示 y

$$\begin{aligned} 2x+3y&=27 \\ 3y&=27-2x \\ y&=9-\tfrac{2}{3}x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 6x+9y&=81 \\ 9y&=81-6x \\ y&=9-\tfrac{2}{3}x \end{aligned}$$

座標圖繪示於圖 1-13 。

(*c*) 因爲線上任一組 x 與 y 之組合均能同時滿足此兩條方程式，故此方程組不存在唯一解，事實上這兩條線重疊或完全相同，因此，它們爲一致的但並非獨立的。

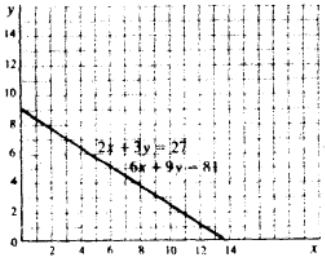


圖 1-13

1.17. 若方程組爲 $\begin{cases} 2x-4y=-8 \\ 6y-3x=24 \end{cases}$，試回答問題 1.15 之 (*a*)，(*b*)，(*c*) 三個問題，但在 (*a*) 中以代替法求解。

圖 (*a*) 利用代替法求解，首先，第一個方程式以 y 項來解 x 如下：

$$\begin{aligned} 2x-4y&=-8 \\ 2x&=-8+4y \\ x&=2y-4 \end{aligned}$$

將 $x=2y-4$ 代入第二個方程式，得

$$\begin{aligned} 6y-3x&=24 \\ 6y-3(2y-4)&=24 \\ 6y-6y+12&=24 \\ 12&\neq 24 \end{aligned}$$

(*b*) 圖形分析法，以下計算之結果繪示於圖 1-14 。

$$2x - 4y = -8 \qquad 6y - 3x = 24$$
$$-4y = -8 - 2x \qquad 6y = 24 + 3x$$
$$y = 2 + \tfrac{1}{2}x \qquad y = 4 + \tfrac{1}{2}x$$

(*c*) 於 (*a*) 中所討論的，其解不存在，故這些方程式爲不一致（矛盾），此外，這兩個方程式永不相交（就如兩條平行線一般），且此亦無唯一解，此即表示它們並非一致。

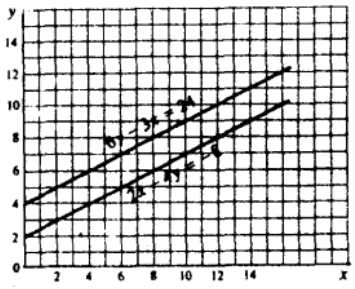


圖 1-14

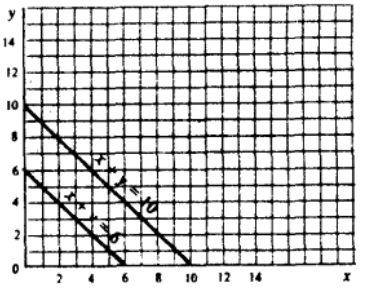


圖 1-15

1.18 討論下列聯立方程式 $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 10 \end{cases}$。

圖 本題一望即知，它們是矛盾的，因爲 $x + y$ 不可能同時等於 6 又等於 10。又此兩方程式之圖形（即 $y = 6 - x$ 與 $y = 10 - x$）爲兩條平行線，因而支持此結論，參見圖 1-15。

代數解法

1.19 已知糖之需求函數爲 $Q_d = 30 - \frac{3}{5}P$。試求當 (*a*) $P = 5$，(*b*) $P = 15$ 與 (*c*) $P = 25$ 時之 Q_d。

圖 (*a*) $Q_d = 30 - \frac{3}{5}(5) = 27$ (*b*) $Q_d = 30 - \frac{3}{5}(15) = 21$ (*c*) $Q_d = 30 - \frac{3}{5}(25) = 15$

1.20 已知供給函數爲 $Q_s - 4P + 3 = 0$，試求當 (*a*) $P = 3$，(*b*) $P = 7$ 與 (*c*) $P = 12$ 時之 Q_s。

圖 (*a*) 首先重新整理各項則，$Q_s = 4P - 3$ 因而，$Q_s = 4(3) - 3 = 9$

(*b*) $Q_s = 4(7) - 3 = 25$

(*c*) $Q_s = 4(12) - 3 = 45$

1.21 已知 $Q_d = 15 - \frac{1}{5}P$ 且 $Q_s = -1 + \frac{3}{5}P$，試於 $P = 5, 10, 15, 20, 25$ 時建立一個 Q_d 與 Q_s 之表。將 $Q_d = Q_s$ 時之均衡價格圈起來。

P	5	10	15	20	25
Q_d	14	13	12	11	10
Q_s	2	5	8	11	14

1.22 已知 $I = I_0 - bi$ 其中 I_0 爲自發性投資而 i 爲利率。(*a*) 若 $I_0 = 100$ 且 $b = 250$，則當 i 分別 $= 0.06, 0.07, 0.08$ 時投資水準爲多少？(*b*) 若 $I = 115$，$I_0 = 175$ 且 $i = 0.12$ 試求 b

圖 (*a*) $I_1 = 100 - 250(0.06) = 100 - 15 = 85$

$I_2 = 100 - 250(0.07) = 100 - 17.50 = 82.50$

$I_3 = 100 - 250(0.08) = 100 - 20 = 80$

(*b*) $I = I_0 - bi$

$115 = 175 - b(0.12)$

$-60 = -0.12b$

$b = 500$

1.23 若兩個不同廠商之利潤函數分別爲 π_1 與 π_2 其中

$$\pi_1 = -Q^2 + 17Q - 42 \qquad \pi_2 = -Q^2 + 16Q - 38$$

(*a*) 第一個廠商之利潤爲零時之產出水準爲若干？

(*b*) 第二個廠商利潤爲 \$25 時，其產出水準爲何？

圖 (*a*) 若 $\pi_1 = 0$，即 $-Q^2 + 17Q - 42 = 0$，此函數因而成爲適用二項式之適當形式（參見例1.10），其中 $a = -1$，$b = 17$，$c = -42$，因此，

$$Q_1, Q_2 = \frac{-17 \pm \sqrt{(17)^2 - 4(-1)(-42)}}{2(-1)} = \frac{-17 \pm \sqrt{121}}{-2} = 14, 3$$

(*b*) 如果 $\pi_2 = 25$，則 $-Q^2 + 16Q - 38 = 25$ 亦即 $-Q^2 + 16Q - 63 = 0$，利用二項式公式求解，其中 $a = -1$，$b = 16$，$c = -63$，

$$Q_1, Q_2 = \frac{-16 \pm \sqrt{(16)^2 - 4(-1)(-63)}}{2(-1)} = \frac{-16 \pm \sqrt{4}}{-2} = 9, 7$$

1.24 一電子廠商生產電視機（T）與電唱機（S）；其轉換曲線（亦稱生產可能曲線）表示當此廠商以它全部可用資源作最有效的運用時所生產出兩種財貨各種不同的組合，假設此轉換曲線之方程式爲 $S^2 + 3S + 5T = 130$。

試求 (*a*) 此廠生產電唱機之最大產量爲何，(*b*) 電視機呢？(*c*) 如果已知生產 18 部電視機，則生產電唱機之最大產量爲何；(*d*) 如果已知生產 7 台電唱機，則生產電視機之最大產量爲何？(*e*) 試繪出其轉換曲線。

圖 (*a*) 此廠商生產電唱機之最大產量在 $T = 0$ 之點（亦即沒有生產電視機時），因此

$$S^2 + 3S + 5(0) = 130$$
$$S^2 + 3S - 130 = 0$$

運用二次式公式可得

$$S_1, S_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-130)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{-3 \pm 23}{2} = 10, -13$$

只取 $S = 10$，因爲負值就生產可能曲線而言沒有意義。

(*b*) 當電視機產量最大時，電唱機之產量爲 0 ，即

$$S^2 + 3S + 5T = 130$$
$$0 + 0 + 5T = 130 \qquad T = 26$$

(*c*) 若已知電視機之產量爲 18 部，則

$$S^2 + 3S + 5(18) = 130$$
$$S^2 + 3S - 40 = 0$$
$$S_1, S_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-40)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2} = 5, -8$$
$$S = 5$$

(*d*) 若已知電唱機之產量爲 7 ，則

$$S^2 + 3S + 5T = 130$$
$$(7)^2 + 3(7) + 5T = 130$$
$$5T = 60 \qquad T = 12$$

(*e*) 欲將此函數畫於座標圖上，首先將函數轉換成T爲S之函數形式，即

$$5T = 130 - S^2 - 3S \qquad T = -\tfrac{1}{5}S^2 - \tfrac{3}{5}S + 26$$

因爲由 (*a*) 知，當$T = 0$時，$S = 10$，故橫軸之截距爲 10 ，並且由 (*b*) 知，當$S = 0$時$T = 26$，再由 (*c*) 與 (*d*) 分別得知$T = 18$，$S = 5$及$S = 7$，$T = 12$。利用此四點即可繪出此轉換曲線，它是開口朝下之拋物線的一邊，因爲S與T只能爲正值，參見圖 1-16 。

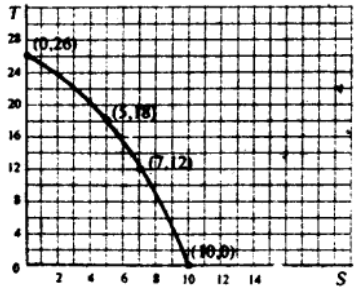


圖 1-16

1.25 一麵包店之轉換曲線已知爲$B^2 + 2B + 4R - 168 = 0$，其中B爲麵包，R爲捲餅，(*a*) 此麵包對於捲餅之最大產能爲何？麵包呢？ (*b*) 如果$B = 8$則兩產品之組合爲何？如果$B = 4$，或$B = 30$呢？ (*c*) 試繪出其生產可能曲線。

圖 (*a*) $B = 0$時捲餅之總產量爲

$$4R = 168 \qquad R = 42$$

$R = 0$ ，麵包之總產量爲

$$B^2 + 2B - 168 = 0$$

利用二次式公式求解此方程式，可得 $B = 12$ 。

(*b*) 若 $B = 8$,　$B^2 + 2B + 4R - 168 = 0$

$(8)^2 + 2(8) + 4R - 168 = 0$

$4R = 88$　　$R = 22$

若 $B = 4$,　$(4)^2 + 2(4) + 4R - 168 = 0$

$4R = 144$　　$R = 36$

若 $R = 30$,　$B^2 + 2B + 4(30) - 168 = 0$

$B^2 + 2B - 48 = 0$

利用二次式公式或簡單之因式分解可得

$(B + 8)(B - 5) = 0$　　$B = -8$　　$B = 6$

因爲負值不予接受故 $B = 6$ 。

(*c*) 見圖 1-17 。

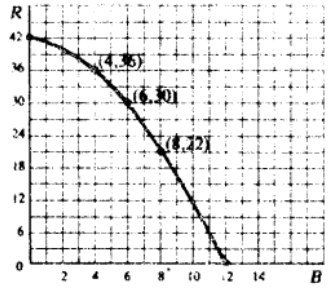


圖 1-17

第二章

座標圖與方程式在經濟學上之應用

2.1 圖形與方程式之運用範圍

當經濟之問題只有兩個變數或能予以簡化爲兩個變數之問題時，我們往往使用圖形來分析，這些問題包括：供、需分析，所得決定模型，投資的邊際效益，預算線與等成本曲線等。另外，方程式則有多樣化之用途，它們不僅可用來取代圖形分析，甚且可以適用於更複雜之問題。

例題2.1

等成本線（isocost line）指在已知的貨幣總額下，對於兩種生產要素或投入之不同購買組合，其一般式爲$P_K K + P_L L = E$，其中K與L分別爲資本與勞動，P_K與P_L分別爲其價格，而E爲要素支出總額，於等成本分析中，開始的時候均假設個別之價格及總支出維持不變，只允許要素組合之變動，將此函數畫在圖上時，先將函數轉換爲以一變數表示另一變數之形式，例如

$$P_K K + P_L L = E$$
$$P_K K = E - P_L L$$
$$K = \frac{E - P_L L}{P_K}$$
$$= \frac{E}{P_K} - \left(\frac{P_L}{P_K}\right) L$$

此即我們所熟悉的線性函數形式$y = a + bx$，其中$a = E / P_K$＝縱軸截距，$b = -(P_L / P_K)$＝斜率，其圖形則如圖 2-1 所示之實線。

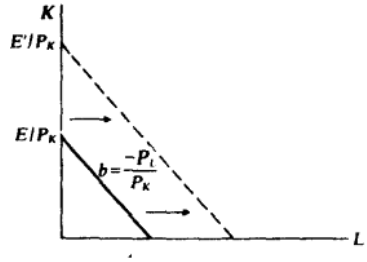


圖 2-1

由上面圖形與方程式之討論，我們對於任一參數變動之效果可以很容易察知，例如，若支出由E增至E'，則其截距增加因而等成本線平行往右上移動（如虛線所示），由於斜率乃決定於（$-P_L/P_K$）之值，而我們假設價格並未隨著支出變動而變動，故斜率不受影響。同樣地，如果P_L變動則只改變此線之斜率而縱軸截距不變，當P_K變動則斜率變動且縱軸截距亦將變動，參見問題2.6與2.7。

2-2 供給與需要之分析

在供給與需要之分析中，當$Q_s = Q_d$時表供、需達到均衡，因而我們只要令供給與需要之函數相等，即可求得其均衡價格與數量。

例題2.2

已知：$Q_s = -5 + 3P$　　$Q_d = 10 - 2P$

均衡時，$Q_s = Q_d$

解P，$-5 + 3P = 10 - 2P$

$5P = 15$　　$P = 3$

以$P = 3$代入任一方程式，可得

$$Q_s = -5 + 3P = -5 + 3(3) = 4 = Q_d$$

2-3 所得決定之模型

所得決定的模型，一般而言是指四部門經濟之均衡的所得水準，其式子如下：

$$Y = C + I + G + (X - Z)$$

式中Y＝所得，C＝消費，I＝投資，G＝政府支出，X＝出口，Z＝進口，將各變數所知訊息代入上式，可以很容易地求得均衡的所得水準，將等式右邊各變數予以加總（summing up），即可將此方程式表現於二度空間之座標圖，參見問題2.8至2.14。

例題2.3

假設一簡單經濟體系有兩個部門，並且$Y = C + I$，$C = C_0 + bY$，$I = I_0$，又進一步假設$C_0 = 85$，$b = 0.9$與$I_0 = 55$，則均衡的所得水準之計算可以(1)一般化之參數與(2)特定之參數值求解。

(1) 均衡方程式爲

$$Y = C + I$$

將C與I代入

$$Y = C_0 + bY + I_0$$

解Y，可得

$$Y - bY = C_0 + I_0$$
$$(1-b)Y = C_0 + I_0$$
$$Y = \frac{C_0 + I_0}{1-b}$$

此解之形式稱爲**縮減式**（reduced form）或**解之方程式**（solution equation），代表內生變數（Y）爲外生變數（C_0，I_0）與參數（b）之**顯函數**（explicit function）。

(2) 若欲求其均衡所得水準之特定值，則我們應將已知之參數值予以代入原先之方程式（a）或縮減式（b）：

$$(a)\quad Y = C_0 + bY + I_0 = 85 + 0.9Y + 55$$
$$Y - 0.9Y = 140$$
$$0.1Y = 140$$
$$Y = 1400$$

$$(b)\quad Y = \frac{C_0 + I_0}{1-b} = \frac{85+55}{1-0.9} = \frac{140}{0.1} = 1400$$

$1/(1-b)$在經濟學上稱爲**乘數**（multiplier），乃測度自發性支出每變動一元對於均衡所得水準影響之**乘數效果**（multiple effect）。又因爲b＝MPC，故在所得決定之模型裡，乘數＝$1/(1-\text{MPC})$。

注意：此處於所得決定之模型裡，小數可以轉化爲分數以利計算，例如，$0.1 = \frac{1}{10}$，$0.9 = \frac{9}{10}$，$0.5 = \frac{1}{2}$，$0.2 = \frac{1}{5}$，等等。

2.4 IS-LM分析

*IS*表是指在財貨（商品）市場均衡時，所有各種不同利率與所得組合點之軌跡，而*LM*表則指貨幣市場均衡時所有各種不同利率與所得組合點之軌跡。故所謂*IS-LM*分析乃討論當商品與貨幣市場均達到均衡時其利率與所得之水準如何決定，此可由解聯立方程式之技巧完成，不像2.3節之簡單所得決定模型一樣，*IS-LM*分析更明顯的處理利率問題並將其效果注入模型。

例題2.4

在一簡單二部門之經濟模型裡，當$Y = C + I$時商品市場達到均衡，而貨幣市場均衡是指貨幣供給（M_s）等於貨幣需求（M_d），又貨幣需求乃由**交易-預防**（transaction-precautionary）之貨幣需求（M_t）及投機貨幣需求（M_s）組成，假設此二部門經濟中$C = 48 + 0.8Y$，$I = 98 - 75i$，$M_s = 250$，$M_t = 0.3Y$而$M_s = 52 - 150i$。

當$Y = C + I$時商品市場達到均衡（IS），將C與I代入此方程式

$$\begin{aligned} Y &= 48 + 0.8Y + 98 - 75i \\ Y - 0.8Y &= 146 - 75i \\ 0.2Y + 75i - 146 &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

當$M_d = M_t + M_s$時貨幣市場達到均衡，將M_d，M_t，M_s代入此方程式

$$\begin{aligned} 250 &= 0.3Y + 52 - 150i \\ 0.3Y - 150i - 198 &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

解（2.1）與（2.2）聯立，則兩個市場同時達到均衡之條件爲：

$$0.2Y + 75i - 146 = 0 \tag{2.1}$$

$$0.3Y - 150i - 198 = 0 \tag{2.2}$$

（2.1）式乘 2，再與（2.2）式相加，以消去i而求得Y。

$$\begin{aligned} 0.4Y + 150i - 292 &= 0 \\ 0.3Y - 150i - 198 &= 0 \\ \hline 0.7Y \qquad\quad - 490 &= 0 \\ Y &= 700 \end{aligned} \tag{2.3}$$

將$Y = 700$代入（2.1）或（2.2）式以求i。

$$\begin{aligned} 0.2Y + 75i - 146 &= 0 \\ 0.2(700) + 75i - 146 &= 0 \\ 140 + 75i - 146 &= 0 \\ 75i &= 6 \\ i &= \tfrac{6}{75} = 0.08 \end{aligned}$$

當$Y = 700$而$i = 0.08$時商品與貨幣市場同時達到均衡，在該點上，$C = 48 + 0.8(700) = 608$，$I = 98 - 75(0.08) = 92$，$M_t = 0.3(700) = 210$，而$M_s = 52 - 150(0.08) = 40$，$C + I = 608 + 92 = 700$，$M_t + M_s = 210 + 40 = 250 = M_d$。

習題與解答

座標圖

2.1 一完整之需求函數如下：

$$Q_d = -30P + 0.05Y + 2P_r + 4T$$

式中P爲財貨價格，Y爲所得，P_r爲相關財貨（在此假設爲替代財貨）之價

格，而T爲嗜好，此方程式是否可以畫在座標圖上？

圖 因爲此完整的需求函數包含了五個不同的變數，故無法畫在座標圖上，但於普通之需求分析時，我們均假設除了價格以外之其它的所有自變數均固定不變，因此，我們可以單獨地討論價格變動對需求量變動之影響效果，而令其它情況（因素）固定不變，故如果其它變數（Y，P_r，T）固定不變，則此函數可以畫在座標圖上。

2.2 (*a*)假設$Y = 5000$，$P_r = 25$與$T = 30$，試畫出問題2.1之需求函數，(*b*)於(*a*)所畫出之典型的需求函數說明了什麼？(*c*)如果財貨價格由5變動至6，則結果爲何？(*d*)如果有任何其它變數發生變動，則結果爲何？例如，如果所得增至7400？

圖 (*a*)將新增加之資料代入問題2.1的方程式，此函數可以很容易的畫在座標圖上，參見圖2-2。

$$Q_d = -30P + 0.05Y + 2P_r + 4T = -30P + 0.05(5000) + 2(25) + 4(30) = -30P + 420$$

(*b*)畫於(*a*)之需求函數說明在各種不同之財貨價格時其需求量，假設在一已知之所得水準，嗜好與替代品之價格（5000，30，25）並且它們均固定不變。

(*c*)如果只有財貨價格發生變動，則需求曲線並不會改變，亦即它仍表示在不同的價格下對於該財貨之需求量，此時價格變動，只是沿著該曲線移動而已，此稱爲**需求量的變動**（change in quantity demanded），例如當價格由5漲至6時，需求量由270[420 − 30(5)]減少爲240[420 − 30(6)]，亦即沿著此曲線由A移至B點。

(*d*)如果有任何其它變數發生變動，則整條曲線將產生變動，此稱爲**需求的變動**（change in demand），因爲此時將產生一條新的需求函數（與曲線）以對應此變動之情形。例如，如果所得增至7400，則新的需求函數變爲

$$Q_d = -30P + 0.05(7400) + 2(25) + 4(30) = -30P + 540$$

即如圖2-2虛線所示。

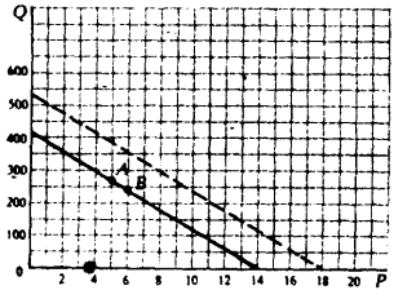


圖 2-2

2.3 於經濟學之供、需分析中，傳統上將自變數（價格）畫於縱軸上，而將依變數（數量）畫於橫軸，(*a*) 根據傳統的方法，畫出問題 2.2 之需求函數，(*b*) 如果價格由 5 漲至 6 且所得增至 7400 時，結果爲何？

圖 (*a*) 此函數$Q_d = 420 - 30P$，依照傳統經濟上之處理方法畫在座標圖上乃先將此函數轉變爲其逆函數（參見 1.5 節）以Q_d 項求P。可知$P = 14 - \frac{1}{30}Q_d$，此圖形即如圖 2-3 中實線所示者。

(*b*) 如果P由 5 漲至 6，Q_d 將由 270 減少爲 240。

$$P = 14 - \tfrac{1}{30}Q_d \qquad P = 14 - \tfrac{1}{30}Q_d$$
$$5 = 14 - \tfrac{1}{30}Q_d \qquad 6 = 14 - \tfrac{1}{30}Q_d$$
$$\tfrac{1}{30}Q_d = 9 \qquad \tfrac{1}{30}Q_d = 8$$
$$Q_d = 270 \qquad Q_d = 240$$

此變動表現在圖 2-3 者即由A移至B點。

如果$Y = 7400$，則如圖題 2-2(*d*) 者，其$Q_d = 540 - 30P$，而逆函數爲$P = 18 - \frac{1}{30}Q_d$，並畫出如圖 2-3 之虛線。

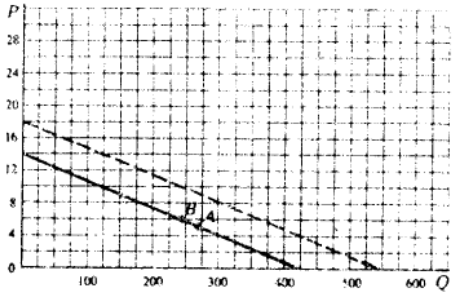


圖 2-3

2.4 (*a*) 試畫出需求函數

$$Q_d = -4P + 0.01Y - 5P_r + 10T$$

當$Y = 8000$，$P_r = 8$與$T = 4$，(*b*) 此財貨之相關財貨是何種類型？(*c*) 如果T增至 8，其結果爲何？是否表示對此財貨更具偏愛？(*d*) 根據傳統經濟學的畫法，以P爲縱軸Q爲橫軸畫出此曲線。

圖 (*a*) $$Q_d = -4P + 0.01(8000) - 5(8) + 10(4) = -4P + 80$$

畫於圖上則如圖 2-4 (*a*)實線所示。

(*b*) 其相關財貨價格之係數爲負，亦即此相關財貨價格上升將導致此財貨之需求減少，故此相關財貨爲互補財貨。

(*c*) 如果$T = 8$，表示對此財貨之偏好增加，則將有一條新的需求曲線

$$Q_d = -4P + 0.01(8000) - 5(8) + 10(8) = -4P + 120$$

參見圖 2-4 (*a*)之實線。

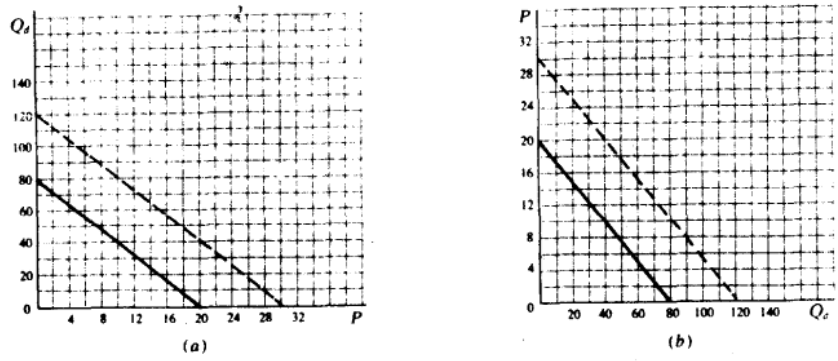


圖 2-4

(*d*) 將P畫於縱軸故需求其逆函數，$Q_d = 80 - 4P$之逆函數爲$P = 20 - \frac{1}{4}Q_d$並繪示如圖 2-4 (*b*)之實線，而$Q_d = 120 - 4P$之逆函數爲$P = 30 - \frac{1}{4}Q_d$。即圖 2-4 (*b*)之虛線所示者。

2.5 一供給函數已知如傳統經濟學上之形式$P = -a + bQ$，如果對每一單位財貨課征稅T，則供給函數將有何變動？以虛線代表課稅後之供給曲線。

圖 如果政府對生產者課征從量稅T，則此生產者之有效價格變爲$P - T$，因而供給函數變爲

$$P - T = -a + bQ$$
$$P = -a + bQ + T$$

加上固定之T後，縱軸截距將往上提昇稅額（T）之距離，故在任一已知價格下供給量將減少。

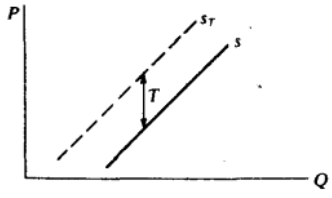


圖 2-5

2.6 假設某人將 \$120 之所得花於兩財貨（X, Y）之購買，其價格分別爲 \$3 與 \$5，(*a*) 試畫出此人之**預算線**（budget line）以說明在已知之預算（B）下，此人所能購買X與Y之全部組合。當下列各事件發生時，此預算線有何變化，(*b*) 如果預算減少 25 %？(*c*) 如果X之價格增加兩倍？(*d*) 如果Y之價格跌至 4？

圖 (*a*) 預算線之一般形式之函數爲

$$P_X X + P_Y Y = B$$

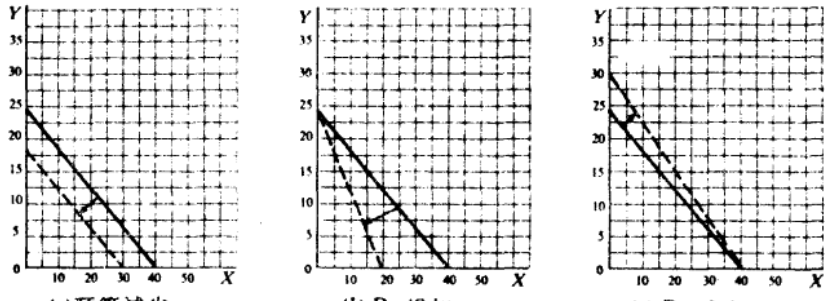
若 $P_X = 3$，$P_Y = 5$，且 $B = 120$，

$$3X + 5Y = 120$$

爲畫出此函數所代表之預算線，以 X 項求解 Y，則

$$Y = 24 - \tfrac{3}{5}X$$

其圖形如圖 2-6(*a*)之實線所表示者。



(*a*)預算減少　(*b*)P_x 增加　(*c*)P_y 減少

圖 2-6

(*b*) 如果預算減少 25 %，則新的預算爲 90[$120 - \frac{1}{4}(120) = 90$]，此新的預算線之方程式爲

$$3X + 5Y = 90$$
$$Y = 18 - \tfrac{3}{5}X$$

其圖形則爲圖 2-6(*a*)之虛線，較低之預算使得其預算線平行左移。

(*c*) 如果 P_x 上升兩倍，則原先之方程式變爲

$$6X + 5Y = 120$$
$$Y = 24 - \tfrac{6}{5}X$$

其縱軸的截距不變，但斜率變得較陡，參見圖 2-6(*b*)之虛線，由於 X 價格上升，故在原來之預算下，所能購買的 X 較少。

(*d*) 如果 P_Y 降爲 \$4，則

$$3X + 4Y = 120$$
$$Y = 30 - \tfrac{3}{4}X$$

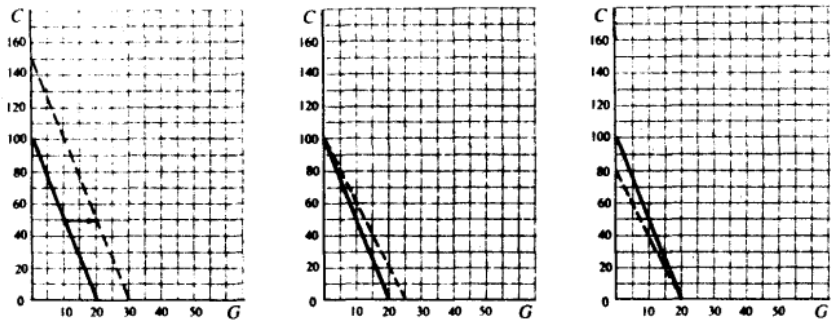
由於 P_Y 之變動，故其縱軸截距與斜率均發生變動，如圖 2-6(*c*)虛線所示。

2.7 煤炭（C）或煤氣（G）均可用來製造鋼鐵，使用煤炭之成本爲 100，而煤氣之成本爲 500，試畫出煤炭與煤氣之等成本線以說明下列各項條件下所能購買此二燃料之不同的組合，(*a*) 如果原先之支出（E）爲 10,000，(*b*) 如果支出增加 50 %，(*c*) 如果煤氣價格下跌 20 %，(*d*) 如果煤炭之價格上升 25 %，以上均由原先之方程式開始討論。

圖 (*a*)

$$P_C C + P_G G = E$$
$$100C + 500G = 10{,}000$$
$$C = 100 - 5G$$

參見圖 2-7 (*a*)之實線。



(*a*)預算增加　(*b*)P_G 下跌　(*c*)P_C 下跌

■ 2-7

(*b*) 支出增加 50 % 使總支出變爲 15,000 [10,000 + 0.5 (10,000)]，而新的方程式爲

$$100C + 500G = 15{,}000$$
$$C = 150 - 5G$$

參見圖 2-7 (*a*)之虛線。

(*c*) 如果煤氣之價格下跌 20 %，則新的價格爲 400 (500 − 0.2 (500)]，而新的方程式爲

$$100C + 400G = 10{,}000$$
$$C = 100 - 4G$$

參見圖 2-7 (*b*)之虛線。

(*d*) 煤炭價格上升 25 %，則新的價格爲 125 [100 + 0.25 (100)]。

$$125C + 500G = 10{,}000$$
$$C = 80 - 4G$$

參見圖 2-7 (*c*)之虛線。

所得決定模型之圖形分析

2.8 已知 $Y = C + I$，$C = 50 + 0.8Y$，$I_0 = 50$，(*a*) 試畫出消費函數，(*b*) 畫出總合需求曲線，$C + I_0$，(*c*) 由圖上求均衡之所得水準。

圖 (*a*) 因爲消費爲所得之函數，故將消費畫在縱軸，而所得畫在橫軸，參見圖 2-8。當總合需求之其它因子諸如 I，G 與 ($X - Z$) 被加入模型時，它們亦均

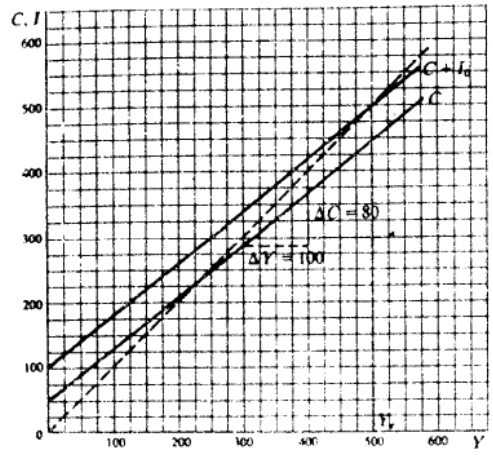


圖 2-8

表現在縱軸。由線性之消費函數我們可輕易地得知其縱軸截距爲 50 而斜率（MPC或 $\Delta C / \Delta Y$ ）爲 0.8 。

(*b*) 此模型之投資爲自發性投資，亦即它與所得大小無關，且不隨所得變動而變動，故在圖形之表示上，它只一條常數值之水平線，但將它納入模型時，將使得原來之線性函數平行往上移動 I_0 之距離，如圖 2-8 所示者，自發性投資將使總合需求函數平行往上移動 50 。

(*c*) 爲從此圖求得均衡的所得水準，我們從原點畫 45° 線，此線代表橫軸與縱軸數值相等之軌跡，且其斜率爲 1 ，亦即沿此線遠離原點時代表，橫軸每變動一單位（ ΔX ），縱軸亦增加一單位（ ΔY ），因而在 45° 線上之每一點代表縱軸座標與橫軸座標相等，故當總合需求曲線與 45° 線相交時，總合需求（被畫在縱軸者）將等於所得（被畫在橫軸者），因此由圖 2-8 很清楚的知道均衡的所得水準爲 500 ，因爲總合需求函數（ $C + I$ ）與 45° 線交在 500 之點。

2.9 已知：$Y = C + I + G$ ，$C = 25 + 0.75Y$ ，$I = I_0 = 50$ ，$G = G_0 = 25$ ，(*a*) 試畫出總合需求函數並說明其組合因子，(*b*) 試求均衡的所得水準，(*c*) 此總合需求函數如何直接描繪在圖上，而不需將其各個組合因子個別描繪？

圖 (*a*) 參見圖 2-9 。

(*b*) 均衡所得 = 400 。

(*c*) 爲將此總合需求函數直接畫出，先將個別組合因子予以加總

$$\text{總合 } D = C + I + G = 25 + 0.75Y + 50 + 25 = 100 + 0.75Y$$

將總合需求函數直接描繪在圖上與，將個別組成因子 C ，I 與 G 逐步描在圖上再予加總之結果完全一樣。

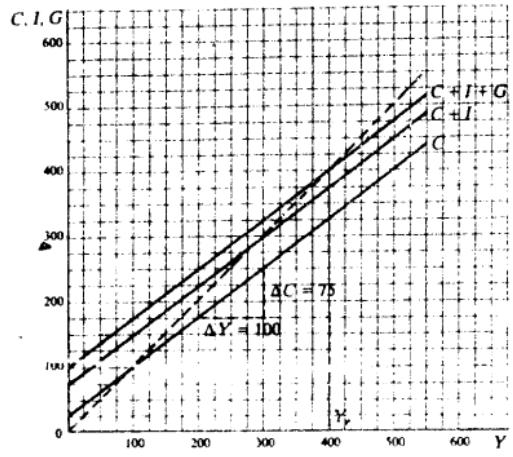


圖 2-9

2.10 利用圖形說明加上一**總額稅**（lump-sum tax）——與所得大小無關之定額稅，如何影響所得決定模型裡諸參數，分別以(1)實線及(2)虛線說明此種變動。

(1) $Y = C + I$
$C = 100 + 0.6\,Y$
$I_0 = 40$

(2) $Y = C + I$
$C = 100 + 0.6\,Yd$
$I_0 = 40$
$Yd = Y - T$
$T = 50$

圖 第一組方程式無需有所異動；第二組方程式則首需將C爲Y之函數轉換成C爲Yd之函數。

(1) 總合 $D = C + I$
$= 100 + 0.6\,Y + 40$
$= 140 + 0.6\,Y$

(2) 總合 $D = C + I$
$= 100 + 0.6\,Yd + 40 = 140 + 0.6(Y - T)$
$= 140 + 0.6(Y - 50) = 110 + 0.6\,Y$

總額稅對於總合需求之縱軸截距有一負的效果．即截距往下降$MPC(T) = -0.6(50) = -30$，而斜率則未受影響（注意，圖 2-10 中之兩線爲平行線），最後，所得將由 350 降至 275，參見圖 2-10。

2.11 試以圖形說明政府課征**比例稅**（proportional tax）——視所得大小而定之稅額　在所得決定之模型裡如何影響諸參數，試畫出此模型之圖形；以實線代表稅前之情形，以虛線代表課稅後之情形。

(1) $Y = C + I$
$C = 85 + 0.75\,Y$
$I_0 = 30$

(2) $Y = C + I$
$C = 85 + 0.75\,Yd$
$I_0 = 30$
$Yd = Y - T$
$T = 20 + 0.2\,Y$

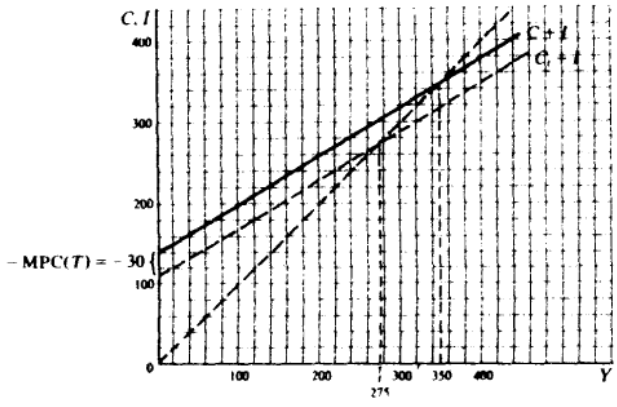


圖 2-10

圖 (1) 總合 $D = C + I$
$= 85 + 0.75\,Y + 30$
$= 115 + 0.75\,Y$

(2) 總合 $D = C + I$
$= 85 + 0.75\,Yd + 30 = 115 + 0.75(Y - T)$
$= 115 + 0.75(Y - 20 - 0.2\,Y)$
$= 115 + 0.75\,Y - 15 - 0.15\,Y = 100 + 0.6\,Y$

此模型納入所得比例稅後，將影響此線之斜率，或MPC，即由0.75降至0.6，又由於此種稅之結構中有20之總額稅，故此線之縱軸截距亦將下降，最後之結果是均衡所得水準由460降至250，參見圖2-11。

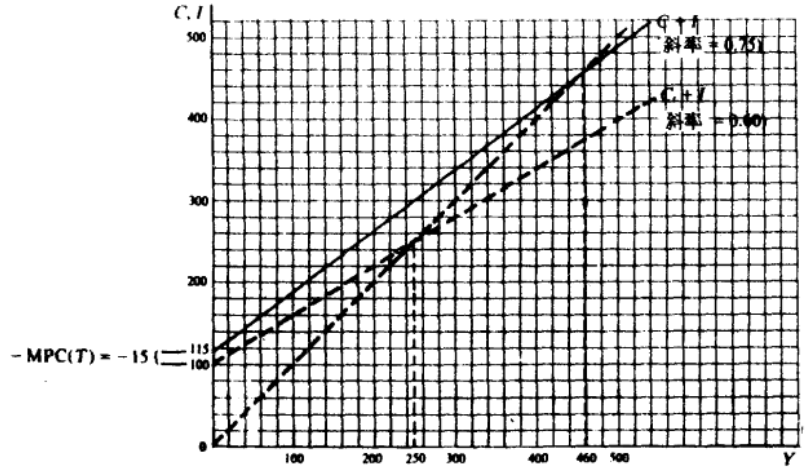


圖 2-11

2.12 (*a*)試畫出儲蓄函數 $S = -100 + 0.25Y$，(*b*)試求均衡的所得水準。

圖 (*a*)因爲儲蓄爲所得之函數，故S被畫在縱軸而Y畫於橫軸，如圖2-12所示，又因爲縱軸截距爲負數，故此曲線一定延伸至第四象限（即縱軸座標爲負之

象限）。

(*b*) 於一簡單之所得決定模型（即只有消費需求之模型）裡，當經濟體系所生產的均被消費掉或當 $S=0$ 時，則可達到均衡，在 $S=0$ 時均衡所得水準(Y_e)爲 400 。

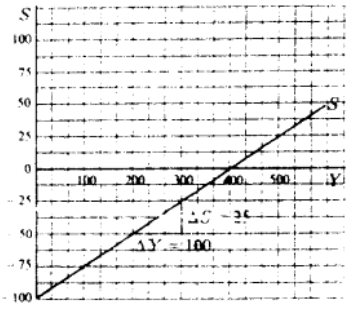


圖 2-12

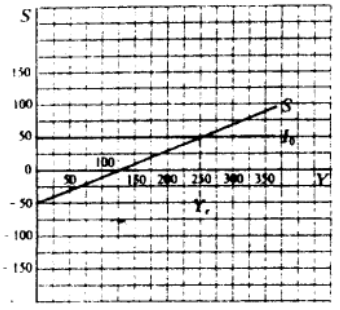


圖 2-13

2.13 已知：$C=50+0.6Y$ ，$I_0=50$ ，試利用儲蓄曲線求其均衡的所得水準。

圖 如果$C=50+0.6Y$ ，$S=-50+0.4Y$ ，且投資存在於本模型，則$S=I$ 爲達到均衡之條件，因而$Y_e=250$ ，參見圖 2-13（注意，在該圖上，投資並非加至儲蓄函數上，而是只爲一條常數值之水平線 I_0 ）。

2.14 當 $S=-70+0.25Yd$ ，$T=20$ ，$I_0=40$ ，$G_0=30$ 且 $Yd=Y-T$ 時，以圖解求其均衡的所得水準。

圖 均衡時，$S+T=I+G$ ，G ，I 與 T 在本例中均爲已定之常數，只有儲蓄函數在畫其圖形前必須先予轉化爲 Y 之函數如下：

$$S=-70+0.25\,Yd=-70+0.25(Y-20)=-75+0.25\,Y$$

於圖 2-14 中，$I+G=40+30=70$ ，爲一水平線，而 $S+T$ 之線爲

$$S+T=-75+0.25\,Y+20=-55+0.25\,Y$$

故均衡之所得水準爲 500 。

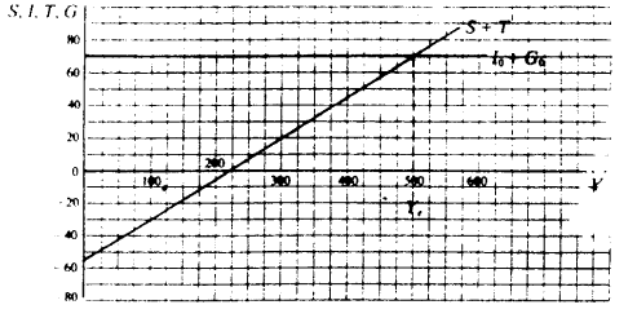


圖 2-14

供、需分析之方程式

2.15 試求下列各市場之均衡價格與數量：

(*a*) $Q_s = -20 + 3P$
$Q_d = 220 - 5P$

(*b*) $Q_s = -45 + 8P$
$Q_d = 125 - 2P$

(*c*) $Q_s + 32 - 7P = 0$
$Q_d - 128 + 9P = 0$

(*d*) $13P - Q_s = 27$
$Q_d + 4P - 24 = 0$

圖 當 $Q_s = Q_d$ 時每一個別市場達到均衡。

(*a*)
$$Q_s = Q_d$$
$$-20 + 3P = 220 - 5P$$
$$8P = 240$$
$$P = 30$$
$$Q_s = -20 + 3P = -20 + 3(30)$$
$$Q_s = 70 = Q_d$$

(*b*)
$$Q_s = Q_d$$
$$-45 + 8P = 125 - 2P$$
$$10P = 170$$
$$P = 17$$
$$Q_d = 125 - 2P = 125 - 2(17)$$
$$Q_d = 91 = Q_s$$

(*c*)
$$Q_s = 7P - 32$$
$$Q_d = 128 - 9P$$
$$7P - 32 = 128 - 9P$$
$$16P = 160$$
$$P = 10$$
$$Q_s = 7P - 32 = 7(10) - 32$$
$$Q_s = 38 = Q_d$$

(*d*)
$$Q_s = -27 + 13P$$
$$Q_d = 24 - 4P$$
$$-27 + 13P = 24 - 4P$$
$$17P = 51$$
$$P = 3$$
$$Q_d = 24 - 4P = 24 - 4(3)$$
$$Q_d = 12 = Q_s$$

2.16 已知下列兩相關市場之聯立方程組，牛肉（B）與豬肉（P），利用替代法求每一個別市場之均衡解。

(1) $Q_{dB} = 82 - 3P_B + P_P$
$Q_{sB} = -5 + 15P_B$

(2) $Q_{dP} = 92 + 2P_B - 4P_P$
$Q_{sP} = -6 + 32P_P$

圖 每一個別市場達到均衡時其 $Q_s = Q_d$。

(1)
$$Q_{sB} = Q_{dB}$$
$$-5 + 15P_B = 82 - 3P_B + P_P$$
$$18P_B - P_P = 87$$

(2)
$$Q_{sP} \quad Q_{dP}$$
$$-6 + 32P_P = 92 + 2P_B - 4P_P$$
$$36P_P - 2P_B = 98$$

如此將問題簡化爲兩條方程式與兩個未知數：

$$18P_B - P_P = 87 \tag{2.4}$$

$$-2P_B + 36P_P = 98 \tag{2.5}$$

求解（2.4）之 P_P，可得

$$P_P = 18P_B - 87$$

將此項之值代入（2.5）式，可得

$$-2P_B + 36(18P_B - 87) = 98 \qquad -2P_B + 648P_B - 3132 = 98$$
$$646P_B = 3230 \qquad P_B = 5$$

以 $P_B = 5$ 代入（2.5）或（2.4）式，

$$-2(5) + 36P_P = 98$$
$$36P_P = 108 \qquad P_P = 3$$

最後，將 P_B 與 P_P 代入每個市場之供給或需求函數。

(1) $Q_{dB} = 82 - 3P_B + P_P = 82 - 3(5) + (3)$
$Q_{dB} = 70 = Q_{sB}$

(2) $Q_{dP} = 92 + 2P_B - 4P_P = 92 + 2(5) - 4(3)$
$Q_{dP} = 90 = Q_{sP}$

2.17 試利用消去法求解兩個互爲互補財貨；褲子（S）與夾克（J），市場之均衡價格與數量。

(1) $Q_{dS} = 410 - 5P_S - 2P_J$
$Q_{sS} = -60 + 3P_S$

(2) $Q_{dJ} = 295 - P_S - 3P_J$
$Q_{sJ} = -120 + 2P_J$

當 均衡時，

(1) $Q_{dS} = Q_{sS}$
$410 - 5P_S - 2P_J = -60 + 3P_S$
$470 - 8P_S - 2P_J = 0$

(2) $Q_{dJ} = Q_{sJ}$
$295 - P_S - 3P_J = -120 + 2P_J$
$415 - P_S - 5P_J = 0$

如此可化簡爲兩條方程式

$$470 - 8P_S - 2P_J = 0 \tag{2.6}$$
$$415 - P_S - 5P_J = 0 \tag{2.7}$$

（2.7）式乘 8 可得（2.8）式，再由（2.8）式減（2.6）式以消去 P_S 並求得 P_J。

$$3320 - 8P_S - 40P_J = 0 \tag{2.8}$$
$$-(+470 - 8P_S - 2P_J = 0)$$
$$2850 \qquad -38P_J = 0$$
$$P_J = 75$$

以 $P_J = 75$ 代入（2.6）式，

$$470 - 8P_S - 2(75) = 0$$
$$320 = 8P_S \qquad P_S = 40$$

最後以 $P_J = 75$，$P_S = 40$ 代入每一市場之 Q_d 或 Q_s，

(1) $Q_{dS} = 410 - 5P_S - 2P_J = 410 - 5(40) - 2(75)$
$Q_{dS} = 60 = Q_{sS}$

(2) $Q_{dJ} = 295 - P_S - 3P_J = 295 - 40 - 3(75)$
$Q_{dJ} = 30 = Q_{sJ}$

2.18 供給與需求函數有時可能爲二次式，已知需求函數爲

$$P + Q^2 + 3Q - 20 = 0 \tag{2.9}$$

而供給函數爲

$$P - 3Q^2 + 10Q = 5 \tag{2.10}$$

試求均衡價格與數量。

圖 因爲本題包含兩條方程式與兩個未知數，故替代法或消去法均可適用，在此，我們以替代法求解。首先在（2.10）式中以Q項解得P。

$$P - 3Q^2 + 10Q = 5$$
$$P = 3Q^2 - 10Q + 5$$

將$P = 3Q^2 - 10Q + 5$代入（2.9）式

$$(3Q^2 - 10Q + 5) + Q^2 + 3Q - 20 = 0$$
$$4Q^2 - 7Q - 15 = 0$$

利用二次式公式，$Q_1, Q_2 = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$，其中$a = 4$，$b = -7$且$c = -15$，故$Q_1 = 3$且$Q_2 = -1.25$。因爲價格與數量均不爲負值$Q = +3$，故以$Q = 3$代入（2.9）或（2.10）式可求得$P$

$$P + (3)^2 + 3(3) - 20 = 0 \qquad P = 2$$

2.19 當需求函數爲

$$3P + Q^2 + 5Q - 102 = 0 \tag{2.11}$$

而供給函數爲

$$P - 2Q^2 + 3Q + 71 = 0 \tag{2.12}$$

試以消去法求解均衡價格與數量。

圖 （2.12）式乘3可得（2.13）式，再以（2.11）式減（2.13）式

$$\begin{array}{r} 3P + Q^2 + 5Q - 102 = 0 \\ -(3P - 6Q^2 + 9Q + 213 = 0) \\ \hline 7Q^2 - 4Q - 315 = 0 \end{array} \tag{2.13}$$

利用二次式公式（參見問題2.18）求解Q並將其結果$Q = 7$代入（2.12）或（2.11）式。

$$P - 2(7)^2 + 3(7) + 71 = 0 \qquad P = 6$$

2.20 供給與需求之分析可以涵括兩個以上之市場，試求下列三個互爲替代財貨市場之均衡價格與數量。

$$Q_{d1} = 23 - 5P_1 + P_2 + P_3 \qquad Q_{s1} = -8 + 6P_1$$
$$Q_{d2} = 15 + P_1 - 3P_2 + 2P_3 \qquad Q_{s2} = -11 + 3P_2$$
$$Q_{d3} = 19 + P_1 + 2P_2 - 4P_3 \qquad Q_{s3} = -5 + 3P_3$$

圖 當每一個市場均達到均衡時，

$$Q_{d1} = Q_{s1} \qquad Q_{d2} = Q_{s2} \qquad Q_{d3} = Q_{s3}$$

$$23 - 5P_1 + P_2 + P_3 = -8 + 6P_1 \qquad 15 + P_1 - 3P_2 + 2P_3 = -11 + 3P_2 \qquad 19 + P_1 + 2P_2 - 4P_3 = -3 + 3P_3$$

$$31 - 11P_1 + P_2 + P_3 = 0 \qquad 26 + P_1 - 6P_2 + 2P_3 = 0 \qquad 24 + P_1 + 2P_2 - 7P_3 = 0$$

此可化簡爲三條方程式與三個未知數

$$31 - 11P_1 + P_2 + P_3 = 0 \tag{2.14}$$

$$26 + P_1 - 6P_2 + 2P_3 = 0 \tag{2.15}$$

$$24 + P_1 + 2P_2 - 7P_3 = 0 \tag{2.16}$$

由消去其中一個變數開始（在此以P_1），又（2.14）式乘2可得

$$62 - 22P_1 + 2P_2 + 2P_3 = 0$$

由此減去（2.16）式，

$$\begin{array}{r} 62 - 22P_1 + 2P_2 + 2P_3 = 0 \\ -(24 + P_1 + 2P_2 - 7P_3) = 0 \\ \hline 38 - 23P_1 \qquad\quad + 9P_3 = 0 \end{array} \tag{2.17}$$

（2.16）式乘3，

$$72 + 3P_1 + 6P_2 - 21P_3 = 0$$

將此結果加上（2.15）式

$$\begin{array}{r} 26 + P_1 - 6P_2 + 2P_3 = 0 \\ 72 + 3P_1 + 6P_2 - 21P_3 = 0 \\ \hline 98 + 4P_1 \qquad - 19P_3 = 0 \end{array} \tag{2.18}$$

此時整個問題變成兩條方程式（2.17）與（2.18）式與兩個未知數；（2.17）式乘19及（2.18）式乘9；然後相加，則

$$\begin{array}{r} 722 - 437P_1 + 171P_3 = 0 \\ 882 + 36P_1 - 171P_3 = 0 \\ \hline 1604 - 401P_1 \qquad = 0 \end{array}$$

$$P_1 = 4$$

以$P_1 = 4$代入（2.18）式以解P_3

$$98 + 4(4) - 19P_3 = 0$$

$$19P_3 = 114 \qquad P_3 = 6$$

以$P_1 = 4$，$P_3 = 6$代入（2.14），（2.15）或（2.16）式以解P_2。

$$31 - 11(4) + P_2 + (6) = 0 \qquad P_2 = 7$$

所得決定模型之方程式

2.21 已知$Y = C + I + G$，$C = C_0 + bY$，$I = I_0$，$G = G_0$，其中$C_0 = 135$，$b = 0.8$，$I_0 = 75$與$G_0 = 30$，(*a*)試求均衡所得水準縮減式之方程式，(*b*)求解此均衡所得水準：(1)直接地求解，(2)以縮簡式求解。

圖 (a) 由 2.3 節知，

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G \\ &= C_0 + bY + I_0 + G_0 \\ Y - bY &= C_0 + I_0 + G_0 \\ (1-b)Y &= C_0 + I_0 + G_0 \\ Y &= \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-b} \end{aligned}$$

(b) (1) $Y = C + I + G = 135 + 0.8Y + 75 + 30$

$$\begin{aligned} Y - 0.8Y &= 240 \\ 0.2Y &= 240 \\ Y &= 1200 \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} Y &= \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-b} \\ &= \frac{135 + 75 + 30}{1 - 0.8} \\ &= 5(240) = 1200 \end{aligned}$$

2.22 當 $C = 89 + 0.8Y$ 且 $I_0 = 24$ 時，試求 $Y = C + I$ 之均衡所得水準。

$$Y = \frac{C_0 + I_0}{1-b} = 5(89 + 24) = 565$$

圖 從問題 2.21 知，乘數值 $[1/(1-b)]$，當 $b = 0.8$ 即可獲得，因此於本例中利用縮減式解方程式較爲簡便（即使利用其它方法亦可求得正確答案）。

2.23 (a) 試求下列投資爲所得的函數（而非自發性投資）之所得決定模型之縮減式，(b) 試求均衡的所得水準值（Y_e），(c) 說明本例之乘數爲何。

$$Y = C + I \qquad C = C_0 + bY \qquad I = I_0 + aY$$

其中 $C_0 = 65$，$I_0 = 70$，$b = 0.6$ 而 $a = 0.2$。

圖 (a)

$$\begin{aligned} Y &= C + I \\ &= C_0 + bY + I_0 + aY \\ Y - bY - aY &= C_0 + I_0 \\ (1-b-a)Y &= C_0 + I_0 \\ Y &= \frac{C_0 + I_0}{1-b-a} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} Y &= C + I \\ &= 65 + 0.6Y + 70 + 0.2Y \\ Y - 0.6Y - 0.2Y &= 65 + 70 \\ 0.2Y &= 135 \\ Y &= 675 \end{aligned}$$

(c) 當投資爲所得之函數，而非自發性之投資時，乘數將由 $1/(1-b)$ 變爲 $1/(1-b-a)$，如此將導致乘數增加，因爲此時分母減少因而使整個分式值變大，將本問題中已知之參數值代入此式可得：

$$\frac{1}{1-b} = \frac{1}{1-0.6} = \frac{1}{0.4} = 2.5 \qquad \frac{1}{1-b-a} = \frac{1}{1-0.6-0.2} = \frac{1}{0.2} = 5$$

2.24 當總額稅被引進下列模型且消費變爲可支配所得（Yd）之函數時，試求 (a) 其縮減式，(b) Y_e 之數值，(c) 對其乘數有何影響。

$$Y = C + I \qquad C = C_0 + bYd \qquad I = I_0 \qquad Yd = Y - T$$

其中 $C_0 = 100$，$b = 0.6$，$I_0 = 40$ 且 $T = 50$。

圖 (a)

$$Y = C + I = C_0 + bYd + I_0 = C_0 + b(Y - T) + I_0 = C_0 + bY - bT + I_0$$
$$Y - bY = C_0 + I_0 - bT$$
$$Y = \frac{C_0 + I_0 - bT}{1 - b}$$

(b)

$$Y = 100 + 0.6\,Yd + 40 = 140 + 0.6(Y - T)$$
$$= 140 + 0.6(Y - 50) = 140 + 0.6\,Y - 30$$
$$Y - 0.6\,Y = 110$$
$$0.4\,Y = 110$$
$$Y = 275$$

或 $$Y = \frac{100 + 40 - 0.6(50)}{1 - 0.6} = \frac{110}{0.4} = 275$$

此函數之圖形已知如問題 2.10 者。

(c) 正如 (a) 所看到的，把總額稅引進模型，則乘數爲 $1/(1-b)$，只不過外生變數之總值減少 $-bT$ 之數額，反之引進其它外生變數如 G_0，X_0 或 Z_0 則不影響乘數之值。

2.25 如果將所得比例稅 (t) 引進下列模型，試求 (a) 其縮減式，(b) Y_e 之數值，(c) 對乘數有何影響。

$$Y = C + I \qquad C = C_0 + bYd \qquad T = T_0 + tY \qquad Yd = Y - T$$

其中 $I = I_0 = 30$，$C_0 = 85$，$b = 0.75$，$t = 0.2$，且 $T_0 = 20$。

圖 (a)

$$Y = C + I = C_0 + bYd + I_0$$
$$= C_0 + b(Y - T) + I_0 = C_0 + b(Y - T_0 - tY) + I_0$$
$$= C_0 + bY - bT_0 - btY + I_0$$
$$Y - bY + btY = C_0 + I_0 - bT_0$$
$$(1 - b + bt)Y = C_0 + I_0 - bT_0$$
$$Y = \frac{C_0 + I_0 - bT_0}{1 - b + bt}$$

(b) 一旦求得縮減式，將很快求得其解，但是有時候並不見得可以求得縮減式，此時必須求諸其它方法。

$$Y = C + I = 85 + 0.75\,Yd + 30 = 115 + 0.75(Y - T)$$
$$= 115 + 0.75(Y - 20 - 0.2\,Y) = 115 + 0.75\,Y - 15 - 0.15\,Y$$
$$Y - 0.75\,Y + 0.15\,Y = 100$$
$$0.4\,Y = 100$$
$$Y = 250$$

此函數之圖形如問題 2.11 所示者。

(c) 乘數將由 $1/(1-b)$ 改變爲 $1/(1-b+bt)$，亦即乘數變小，因爲此時分母增大因而整個分式值變小。

$$\frac{1}{1-b} = \frac{1}{1-0.75} = \frac{1}{0.25} = 4$$

$$\frac{1}{1-b+bt} = \frac{1}{1-0.75+0.75(0.2)} = \frac{1}{1-0.75+0.15} = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

2.26 如果國外部門引進下列模型，並且其**邊際進口傾向**（marginal propensity to inport, z）大於零，試求 (*a*) 其縮減式，(*b*) 均衡的所得水準，(*c*) 對乘數之影響爲何。

$$Y = C + I + G + (X - Z) \qquad C = C_0 + bY \qquad Z = Z_0 + zY$$

其中 $I = I_0 = 90$，$G = G_0 = 65$，$X = X_0 = 80$，$C_0 = 70$，$Z_0 = 40$，$b = 0.9$ 且 $z = 0.15$。

解 (*a*)
$$Y = C + I + G + (X - Z) = C_0 + bY + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0 - zY$$
$$Y - bY + zY = C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0$$
$$(1 - b + z)Y = C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0$$
$$Y = \frac{C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0}{1 - b + z}$$

(*b*) 利用上述之縮減式，

$$Y = \frac{70 + 90 + 65 + 80 - 40}{1 - 0.9 + 0.15} = \frac{265}{0.25} = 1060$$

(*c*) 將邊際進口傾向引進模型，則乘數變小，因爲其分母增大，因而整個分式值變小：

$$\frac{1}{1 - b} = \frac{1}{1 - 0.9} = \frac{1}{0.1} = 10$$
$$\frac{1}{1 - b + z} = \frac{1}{1 - 0.9 + 0.15} = \frac{1}{0.25} = 4$$

2.27 當 $S = -70 + 0.25Yd$，$Yd = Y - T$，$I = I_0 = 40$，$G = G_0 = 30$ 且 $T = T_0 = 20$，試求均衡的所得水準。

解 在均衡時由（$S + T$）所引起之漏損（leakage）必然與（$I + G$）之注入（injection）平衡。

$$S + T = I + G$$
$$-70 + 0.25\,Yd + 20 = 40 + 30$$

但 $Yd = Y - T$，

$$-70 + 0.25(Y - 20) + 20 = 40 + 30$$
$$-70 + 0.25\,Y - 5 + 20 = 70$$
$$0.25\,Y = 125$$
$$Y = 500$$

此圖形正如問題 2.14 所示者。

IS - LM 方程式

2.28 已知：$C = 102 + 0.7Y$，$I = 150 - 100\,i$，$M_s = 300$，$M_t = 0.25Y$ 且 $M_s = 124 - 200\,i$，試求 (*a*) 均衡的所得水準與利率，(*b*) 當經濟達到均衡時 C，I，M_t 與 M_s 各爲多少？

解 (*a*) 商品市場（IS）均衡之條件爲

$$\begin{aligned} Y &= C + I \\ &= 102 + 0.7Y + 150 - 100i \\ Y - 0.7Y &= 252 - 100i \\ 0.3Y + 100i - 252 &= 0 \end{aligned}$$

貨幣市場（LM）均衡之條件爲

$$\begin{aligned} M_s &= M_t + M_z \\ 300 &= 0.25Y + 124 - 200i \\ 0.25Y - 200i - 176 &= 0 \end{aligned}$$

上述兩市場同時達到均衡時

$$0.3Y + 100i - 252 = 0 \tag{2.19}$$

$$0.25Y - 200i - 176 = 0 \tag{2.20}$$

（2.19）式乘 2 再與（2.20）式相加以消去 i ：

$$\begin{aligned} 0.6Y + 200i - 504 &= 0 \\ 0.25Y - 200i - 176 &= 0 \\ \hline 0.85Y \qquad\qquad &= 680 \\ Y &= 800 \end{aligned}$$

以$Y = 800$代入（2.19）或（2.20）式：

$$\begin{aligned} 0.25Y - 200i - 176 &= 0 \\ 0.25(800) - 200i - 176 &= 0 \\ -200i &= -24 \\ i &= 0.12 \end{aligned}$$

(*b*) 在$Y = 800$與$i = 0.12$時，

$$C = 102 + 0.7(800) = 662 \qquad M_t = 0.25(800) = 200$$

$$I = 150 - 100(0.12) = 138 \qquad M_z = 124 - 200(0.12) = 100$$

並且

$$C + I = Y \qquad M_t + M_z = M_s$$

$$662 + 138 = 800 \qquad 200 + 100 = 300$$

2.29 如果問題 2.18 中貨幣供給增加 17，(*a*)均衡的所得水準與利率有何變化？(*b*)在新的均衡時，C，I，M_t與M_z各爲多少？

圖 (*a*) 如果貨幣供給（M_s）增加 17，則LM方程式將變爲：

$$\begin{aligned} M_s &= M_t + M_z \\ 317 &= 0.25Y + 124 - 200i \\ 0.25Y - 200i - 193 &= 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

IS方程式維持原式：

$$0.3Y + 100i - 252 = 0 \tag{2.19}$$

(2.19) 式乘 2，再與 (2.21) 式相加以消去 i，

$$\begin{aligned} 0.25Y - 200i - 193 &= 0 \\ 0.6Y + 200i - 504 &= 0 \\ \hline 0.85Y &= 697 \\ Y &= 820 \end{aligned}$$

以 $Y = 820$ 代入 (2.19) 或 (2.21) 式求解 i：

$$\begin{aligned} 0.3(820) + 100i - 252 &= 0 \\ 246 + 100i - 252 &= 0 \\ 100i &= 6 \\ i &= 0.06 \end{aligned}$$

貨幣供給增加，其它情況不變，將導致均衡所得水準增加，而利率下降。

(*b*) 當 $Y = 820$ 而 $i = 0.06$ 時，

$$C = 102 + 0.7(820) = 676 \qquad M_t = 0.25(820) = 205$$
$$I = 150 - 100(0.06) = 144 \qquad M_z = 124 - 200(0.06) = 112$$

並且

$$C + I = Y \qquad M_t + M_z = M_s$$
$$676 + 144 = 820 \qquad 205 + 112 = 317$$

2.30 當 $C = 89 + 0.6Y$，$I = 120 - 150i$，$M_s = 275$，$M_t = 0.1Y$，$M_z = 240 - 250i$ 時，試求 (*a*) 均衡的所得水準與利率，(*b*) 均衡時之 C，I，M_t 與 M_z。

$C = 89 + 0.6Y$　　$I = 120 - 150i$　　$M_s = 275$　　$M_t = 0.1Y$　　$M_z = 240 - 250i$

圖 (*a*) 關於 IS：

$$\begin{aligned} Y &= 89 + 0.6Y + 120 - 150i \\ Y - 0.6Y &= 209 - 150i \\ 0.4Y + 150i - 209 &= 0 \end{aligned}$$

關於 LM：

$$\begin{aligned} M_s &= M_t + M_z \\ 275 &= 0.1Y + 240 - 250i \\ 0.1Y - 250i - 35 &= 0 \end{aligned}$$

均衡時，

$$0.4Y + 150i - 209 = 0 \tag{2.22}$$
$$0.1Y - 250i - 35 = 0 \tag{2.23}$$

(2.23) 式乘 4，再以 (2.22) 式減去此結果以消去 Y，

$$\begin{aligned} 0.4Y + 150i - 209 &= 0 \\ -(0.4Y - 1000i - 140 &= 0) \\ \hline 1150i &= 69 \\ i &= 0.06 \end{aligned}$$

以 $i = 0.06$ 代入 (2.22) 或 (2.23) 式

$$0.4Y + 150(0.06) - 209 = 0$$
$$0.4Y = 200$$
$$Y = 500$$

(*b*) 在$Y = 500$與$i = 0.06$時，

$$C = 89 + 0.6(500) = 389 \qquad M_1 = 0.1(500) = 50$$
$$I = 120 - 150(0.06) = 111 \qquad M_2 = 240 - 250(0.06) = 225$$

並且

$$C + I = Y \qquad M_1 + M_2 = M_s$$
$$389 + 111 = 500 \qquad 50 + 225 = 275$$

2.31 於問題 2.30 中如果自發性投資下降爲 97，試說明均衡情形有何變化。

圖 如果$I_0 = 97$，IS方程式變爲

$$Y = 89 + 0.6Y + 97 - 150i$$
$$Y - 0.6Y = 186 - 150i$$
$$0.4Y + 150i - 186 = 0$$

LM等式維持原式（$0.1Y - 250i - 35 = 0$）因此，在均衡時，

$$0.4Y + 150i - 186 = 0 \qquad (2.24)$$
$$0.1Y - 250i - 35 = 0 \qquad (2.23)$$

(2.23) 式乘 4，再以 (2.24) 式減此結果以消去Y

$$0.4Y + 150i - 186 = 0$$
$$-(0.4Y - 1000i - 140 = 0)$$
$$1150i = 46$$
$$i = 0.04$$

以$i = 0.04$代入 (2.23) 式以求Y

$$0.1Y - 250(0.04) - 35 = 0$$
$$0.1Y = 45$$
$$Y = 450$$

自發性投資減少，其它條件不變，將導致均衡所得水準與利率同時減少。

對於 (*b*) 部分，

$$C = 89 + 0.6(450) = 359 \qquad M_1 = 0.1(450) = 45$$
$$I = 97 - 150(0.04) = 91 \qquad M_2 = 240 - 250(0.04) = 230$$

並且

$$C + I = Y \qquad M_1 + M_2 = M_s$$
$$359 + 91 = 450 \qquad 45 + 230 = 275$$

第三章
導數與微分法則

3-1 曲線函數的斜率

一線性函數之平均變動率（$\Delta y / \Delta x$）爲常數並等於其斜率，反之，一曲線函數之平均變動率則隨著線上各點而異（見圖 3-1），因此，一曲線函數之斜率並非固定不變；線上不同點斜率可能均不相同。一曲線函數上任一點之斜率等於該點切線之斜率（見圖 3-2）。

例題 3.1

於圖 3-1 (*a*)中，其平均變動率（$\Delta y / \Delta x$）固定不變，每一單位 x 變動之 $\Delta y / \Delta x = 1\frac{1}{3}$。反之在圖 3-1 (*b*)中，其平均變動率隨著線上不同點而異，例如，第一單位 x 的變動，y 變動量爲 2；而第二單位 x 的變動，y 之變動量爲 1；並且第三單位 x 的變動，y 之變動量只有 $\frac{2}{3}$。

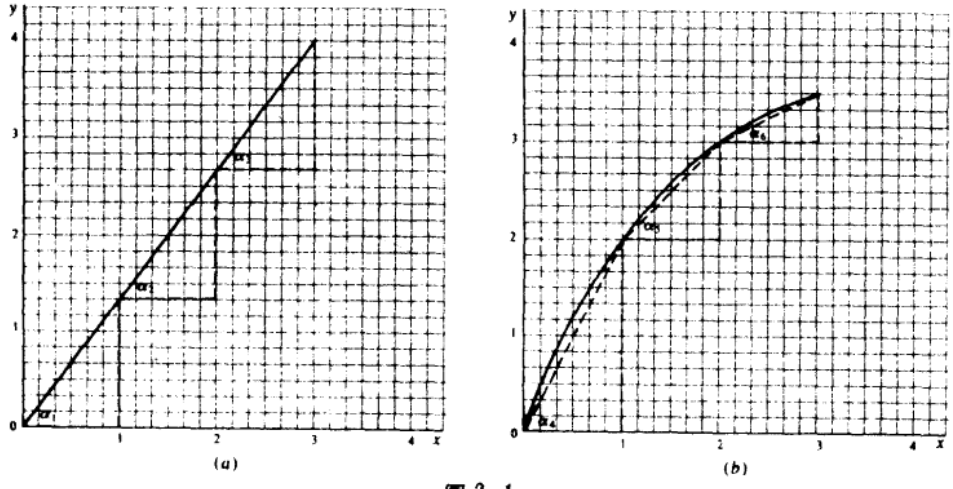


圖 3-1

平均變動率亦可由正切 α（$\tan \alpha$）求得，於三角函數中，一角度之正切等於角之對邊除以其鄰邊，即 $\Delta y / \Delta x$，於圖 3-1 (*a*)中，$\tan \alpha$ 乃測量此函數之實際變動率（即斜率），而圖 3-1 (*b*)中之 $\tan \alpha$ 則只趨近於函數之實際變動率（即由弦 - 虛線所

表示者，以連接曲線上兩點），此約略之近似值將於稍後討論導數時重新定義，參見例 4 。

例題3.2

一直線之斜率爲固定值，亦即沿著該線移動時 Δy 與 Δx 之比例永遠相等(包含剛好與曲線接觸之切點），因此一曲線上某點之斜率即等於該點切線之斜率。

於圖 3-2中有位於曲線上三點 A，B，C之三條不同切線，這些切線之斜率即爲該函數在此三個已知點之切線的斜率。爲便於觀察將 Δy 與 Δx 畫得較大些，但因爲一直線中每一點之斜率均相等，故此切線乃提供我們測量當 x 變動一單位時，y 將變動多少單位。

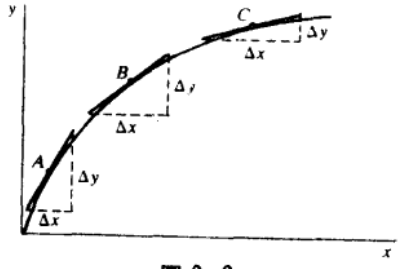


圖 3-2

例題3.3

圖 3-2亦以圖解說明一曲線函數各點之斜率，A點之切線斜率大於 B點之切線斜率，而B點之切線斜率又大於 C點之切線斜率，就一般之法則而言，切線愈陡則該點之斜率的絕對值愈大；反之，切線愈平坦則該點之斜率的絕對值愈小。

3-2 導 數

導數（derivative）乃測量一函數之瞬間變動率，亦即，當自變數以很小之單位變動時所引起依變數之變動量。導數之正式數學式爲

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

在此 dy/dx 爲一混合之表示式，讀作：y 對於 x 之導數；當 Δx 趨近於 0 時其等於 $\Delta y/\Delta x$ 比率之極限，故導數乃測量一函數之斜率。尤其是有助於曲線函數之斜率的測量。

例題3.4

如圖 3-3所看到的，x 的變動量愈小，則其弦愈與函數近似，因此，當 x 的變動

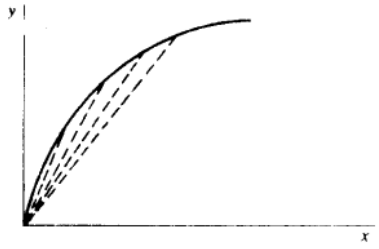


圖 3-3

愈小的時候 $\tan\alpha$ 愈能夠測量此函數之實際變動率。如果在導數中 Δx 趨近於 0，則其弦將與此曲線相切於某一點，因而導數可以測量該點之實際斜率（dy/dx）。

3.3 導數的符號

導數的表示法除了 dy/dx 之形式外，尚有其它符號之表示法諸如，當函數爲 $y = f(x)$ 時，則 y 對於 x 之導數可表示爲 $f'(x)$ 與 f_x，當函數爲 $y = y(x)$ 時，y 對於 x 之導數可表示爲 y' 或 y_x，上述諸導數亦可寫成 $\frac{d}{dx}y$ 或 $\frac{d}{dx}f(x)$。

例題3.5

$y=\phi(x)$ 之導數可表示如 dy/dx，ϕ'，ϕ_x，$\frac{d}{dx}y$ 或 $\frac{d}{dx}\phi(x)$ 等，而 $y=F(x)$ 之導數則爲 dy/dx，F'，F_x，$\frac{d}{dx}y$ 或 $\frac{d}{dx}F(x)$。$C=C(Y)$ 之導數爲 dC/dY 讀作：C 對於 Y 之導數，同時它亦可表示如 C'，C_Y，$\frac{d}{dY}C$ 或 $\frac{d}{dY}C(Y)$。如果 $y=u(x)+v(x)$ 或 $u\cdot v$ 或 u/v 則它們之導數 dy/dx 亦可表示如 $\frac{d}{dx}(u+v)$，$\frac{d}{dx}(u\cdot v)$，$\frac{d}{dx}(u/v)$，因此，如果 $u=3x^2$，$v=2x$ 則上例之 dy/dx 可表示爲 $\frac{d}{dx}(3x^2+2x)$，$\frac{d}{dx}[3x^2(2x)]$，$\frac{d}{dx}(3x^2/2x)$，最後，對一函數 $y=f(x)$ 之導數 dy/dx 亦可簡單的記爲 Dy。

3.4 微分法則

微分法（differentiation）是決定一函數之導數的方法，亦即，當 x 之變動（Δx）

趨近於0時求 y 之變動量，此方法只不過是對於某函數應用一些基本的公式或法則而已，在解釋這些法則時，我們經常需要藉助於**輔助函數**（auxiliary function）諸如 u 與 v 之使用，其中 u 爲 x 之不特定函數 $u(x)$，而 v 爲 x 之另一不特定函數 $v(x)$。

(a) **常數函數法則**（constant function rule）。一常數函數 $y = k$ 之導數爲0，其中 k 爲任意常數。

已知 $y = k$，　　$\frac{dy}{dx} = 0$

例題3.6

已知 $y = 5$，　　$\frac{dy}{dx} = 0$

已知 $y = -10$，　　$\frac{dy}{dx} = 0$

因爲 y 爲常數，故無論 x 如何變動，y 將永遠不變，因此 $dy = 0$　則 $dy/dx =$ ，參見問題 3.1。

(b) **線性函數法則**。一線性函數 $y = a + bx$ 之導數等於 b，即等於 x 之係數。

已知 $y = a + bx$，　　$\frac{dy}{dx} = b$

例題3.7

已知 $y = 2 + 3x$，　　$\frac{dy}{dx} = 3$

已知 $y = 5 - \frac{1}{4}x$，　　$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$

已知 $y = 12x$，　　$\frac{dy}{dx} = 12$

導數 dy/dx 乃測量函數之瞬間變動率，即斜率。從第一章得知一線性函數之斜率爲 b（即自變數之係數），並且爲一固定之常數。

(c) **冪函數**（power function）法則。一冪函數 $y = ax^P$ 之導數等於指數 P 乘以係數 a 再乘以 x 之降一次冪。

已知 $y = ax^P$，　　$\frac{dy}{dx} = pax^{P-1}$

例題3.8

已知 $y = 4x^3$，　　$\frac{dy}{dx} = 3(4)x^{3-1} = 12x^2$

已知 $y = 5x^2$，　　$\frac{dy}{dx} = 2(5)$ $= 10x$

已知 $y = x^4$ ，　　$\frac{dy}{dx} = 4(1)x^{4-1} = 4x^3$　　（注意：$a = 1$ 。）

(d) **相加與相減法則**。兩函數之和 $y = u(x) + v(x)$ 的導數等於個別函數之導數的加總，同理兩函數之差的導數等於個別函數之導數的差。

已知 $y = u(x) \pm v(x)$ ，　　$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

例題3.9

已知 $y = 12x^5 - 4x^4$ ，　　$\frac{dy}{dx} = 60x^4 - 16x^3$

已知 $y = 9x^2 + 2x - 3$ ，　　$\frac{dy}{dx} = 18x + 2$

注意：爲求得個別項之導數，我們可應用適當之法則。

(e) **乘積**（product）**法則**。兩函數之乘積 $y = u(x) \cdot v(x)$ 的導數等於第一個函數乘第二個函數之導數加上第二個函數乘第一個函數之導數。

已知 $y = u(x) \cdot v(x)$ ，　　$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

（於函數相乘時，記得將指數相加，例如，$3x^3 \cdot 4x^2 = 12x^5$ ，而非 $12x^6$ 。有關指數之乘法說明請參見第七章。）

例題3.10

已知 $y = 3x^4(2x - 5)$ ，令 $u = 3x^4$ 且 $v = (2x - 5)$ 則 $du/dx = 12x^3$ 而 $dv/dx = 2$ 。將這些值代入乘積法則之公式，

$$\frac{dy}{dx} = 3x^4(2) + (2x - 5)(12x^3)$$

化簡此代數式

$$\frac{dy}{dx} = 6x^4 + 24x^4 - 60x^3 = 30x^4 - 60x^3$$

(f) **商數**（quotient）**法則**。兩函數之商 $y = u/v$ 等於分母乘分子之導數減分子乘分母之導數，然後整個除以分母之平方。

已知 $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ ，　　$\frac{dy}{dx} = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$

此公式中分子之個別導數的次序很重要，不能任意顛倒（同時，在函數之除法時，是指數相減，例如 $6x^6/3x^2 = 2x^4$ 而非 $2x^3$ ）。

例題3.11

已知

$$y = \frac{5x^3}{4x + 3}$$

公式中 $u = 5x^3$ 而 $v = 4x + 3$，$du/dx = 15x^2$ 且 $dv/dx = 4$。將這些值代入商數法則公式，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4x + 3)(15x^2) - 5x^3(4)}{(4x + 3)^2}$$

簡化之可得，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{60x^3 + 45x^2 - 20x^3}{(4x + 3)^2} = \frac{40x^3 + 45x^2}{(4x + 3)^2}$$

(g) **複合函數**（function of a function）法則，一複合函數 $y = f(u)$，其中 $u = g(x)$ 之導數（dy/dx）等於第一個函數對於 u 之導數乘第二個函數對 x 之導數，此稱之爲**連鎖律**（chain rule）。

已知 $y = f(u)$，$u = g(x)$，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

例題3.12

如果 $y = u^4$ 與 $u = 2x^2 + 3$，則 $dy/du = 4u^3$，且 $du/dx = 4x$，將此代入連鎖律公式，

$$\frac{dy}{dx} = 4u^3(4x) = 16xu^3$$

但因 $u = 2x^2 + 3$，將之代入上式，可得

$$\frac{dy}{dx} = 16x(2x^2 + 3)^3$$

同樣地，如果 $y = (4x + 2)^3$，我們可令 $u = 4x + 2$，則 $y = u^3$，$dy/du = 3u^2$，且 $du/dx = 4$。再使用連鎖律，

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2(4) = 12u^2$$

並以 $u = 4x + 2$ 代入

$$\frac{dy}{dx} = 12(4x + 2)^2$$

有關更複雜之函數，上述七個基本法則不同組合的運用是必要的，參見問題 3.17 至

3.24 。

3-5 高階導數

二階（second-order）導數（d^2y/dx^2）乃測量第一階導數的變動率，此正如第一次導數（dy/dx）測量原始函數（original or primitive function）之變動率，而三階導數則測量第二階導數之變動率，餘此類推。此外，高階導數（higher-order derivative）只不過是對前一階導數應用上述之微分法則求其導數而已。

例題3.13

二階導數除了普遍採用 d^2y/dx^2 之符號外，尚包括 $f''(x)$，y''，D^2y，f_{xx}；而三階導數則可寫成 d^3y/dx^3，D^3y，f'''，四階導數則爲 d^4y/dx^4，D^4y，$f^{(4)}$；…餘此類推。

高階導數乃應用某些微分法則求較低階導數之導數，因此，如 $y=2x^4+5x^3+3x^2$

$$\frac{dy}{dx}=8x^3+15x^2+6x \qquad \frac{d^3y}{dx^3}=48x+30 \qquad \frac{d^5y}{dx^5}=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=24x^2+30x+6 \qquad \frac{d^4y}{dx^4}=48$$

習題與解答

斜率與導數

3.1 以圖形解釋，爲何常數之導數爲零，即，假設 $y=6$，試解釋 $dy/dx=0$。

圖 如圖 3-4 所示 $y=6$ 之函數爲一水平線，表示無論 x 爲何值 y 永遠等於 6，因此，x 的小幅變動或任意幅度之變動均不致影響 y，亦即 $dy=0$，故無論 x 如何變動，dy/dx（即導數）必等於 0。

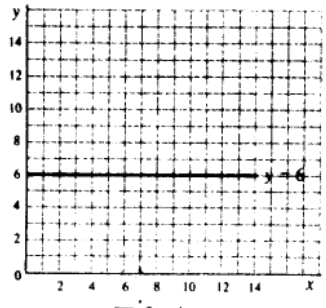


圖 3-4

3.2 試以圖形解釋，何以線性函數之導數爲一常數並等於 x 之係數，(假設 $y=3+2x$)。

答 圖 3-5說明，x 每變動一單位，y 增加 2 單位，或 $\Delta y / \Delta x = 2$ 。因爲此線爲一直線，故 x 之任意變動，無論多小，y 將永遠只變動 2 單位，因此本例中 dy/dx 在線上任何一點均等於 2 ，故爲一常數。

因爲一函數之導數即爲一線之斜率，並且一線性函數之斜率爲自變數之係數，故一線性函數之導數必爲其自變數之係數，參見 3.4 節之(6)項。

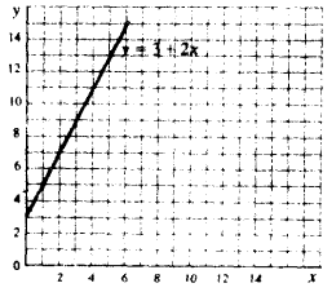


圖 3-5

3.3 就圖 3-6 中每一曲線試說明各曲線上那一點之斜率絕對值爲最大。

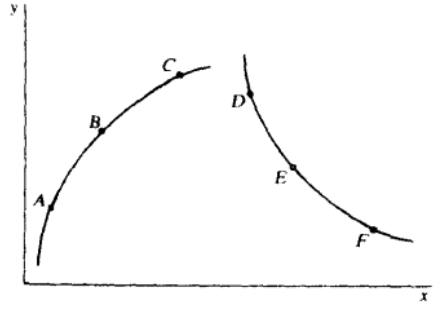


圖 3-6

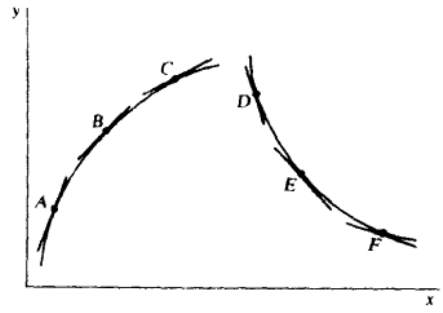


圖 3-7

答 曲線函數在已知點之斜率爲通過該點切線之斜率，故首先在各曲線上之已知點畫其切線（參見圖 3-7），則很明顯的可知，各點之斜率絕對值 $|\Delta y / \Delta x|$ 是 $A > B > C$ ，“$>$”表大於之符號

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_A > \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_B > \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_C$$

同樣地，D 點之斜率絕對值大於 E 點而 E 點又大於 F 點，或

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_D > \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_E > \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_F$$

上述各點斜率之絕對值愈大者代表其切線愈陡。

3.4 已知 $y = f(x) = 7x + 6$，試以各種不同之表示法寫出此函數之導數。

解 上式已知函數之導數可讀作：

$$\frac{dy}{dx} = 7 \qquad y_x = 7 \qquad Dy = 7 \qquad \frac{d}{dx}y = 7 \qquad f_x = 7$$

$$y' = 7 \qquad f' = 7 \qquad \frac{d}{dx}(7x+6) = 7 \qquad \frac{d}{dx}f(x) = 7$$

3.5 對於下列各函數，試求在 $x = 2$ 與 $x = 5$ 時之斜率值。

解 (*a*) $y = 7x^2 + 3$

$$\frac{dy}{dx} = 14x$$

當 $x = 2$，斜率 $dy/dx = 14(2) = 28$. 當 $x = 5$，$dy/dx = 14(5) = 70$.

(*b*) $y = 2x^3 - 2x$

$$Dy = 6x^2 - 2$$

當 $x = 2$，斜率 $Dy = 6(2)^2 - 2 = 22$. 當 $x = 5$，$Dy = 6(5)^2 - 2 = 148$.

(*c*) $y = 30 + 6x$

$$y' = 6$$

當 $x = 2$，斜率 $y' = 6$. 當 $x = 5$，$y' = 6$.

(*d*) $y = -x^3 + 4x - 3$

$$y_x = -3x^2 + 4$$

當 $x = 2$，斜率 $y_x = -3(2)^2 + 4 = -8$. 當 $x = 5$，$y_x = -3(5)^2 + 4 = -71$.

簡單導數

3.6 對下列各函數微分（請使用導數之各種表示法）。

解 (*a*) $y = 17$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{（常數法則）}$$

(*b*) $y = 12$

$$\frac{d}{dx}y = 0$$

(*c*) $y = 5x + 12$

$$y' = 5 \quad \text{（線性函數法則）}$$

(*d*) $f(x) = 9x - 6$

$$f' = 9$$

(*e*) $y = 3x^2$

$$\frac{d}{dx}(3x^2) = 6x \quad \text{（冪函數法則）}$$

(*f*) $f(x) = 4x^9$

$$f_x = 36x^8$$

(*g*) $y = 5x^3 - 7x^2 + 4x + 9$

$$\frac{dy}{dx} = 15x^2 - 14x + 4 \quad \text{（相加與相差法則）}$$

(*h*) $y = 2x^6 + 7x^4 - 3x^3 - 12$

$$y' = 12x^5 + 28x^3 - 9x^2$$

3.7 試利用相加與相減法則對下列各函數微分：

(a) $z = -8t^5 - 5t^4 + 6t^3$ (b) $p = -3q^2 + 7q - 15$

$$\frac{dz}{dt} = -40t^4 - 20t^3 + 18t^2 \qquad \frac{dp}{dq} = -6q + 7$$

注意：引進不同之變數並不會改變上述各種導數之概念，重要的是分清楚那一個是自變數那一個是依變數即可。

3.8 試求下列之導數：

(a) $\frac{d}{du}(4u^7 - 3u^6)$ (b) $\frac{d}{ds}(9s^2 - 11s + 6)$

$$\frac{d}{du}(4u^7 - 3u^6) = 28u^6 - 18u^5 \qquad \frac{d}{ds}(9s^2 - 11s + 6) = 18s - 11$$

乘積法則

3.9 已知 $y = 5x^4(3x - 7)$，(a) 利用乘積法則，直接求其導數，(b) 先利用乘法簡化此函數再求其導數，(c) 比較 (a) 與 (b) 之結果。

圖 (a) 已知乘積法則爲 $dy/dx = u(dv/dx) + v(du/dx)$，令 $u = 5x^4$ 而 $v = 3x - 7$，則 $du/dx = 20x^3$ 且 $dv/dx = 3$，將此結果代入乘積法則之公式，

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4(3) + (3x - 7)(20x^3)$$

將此代數式予以簡化，

$$\frac{dy}{dx} = 15x^4 + 60x^4 - 140x^3 = 75x^4 - 140x^3$$

(b) 利用乘法將原函數予以簡化

$$y = 5x^4(3x - 7) = 15x^5 - 35x^4$$

取其導數

$$\frac{dy}{dx} = 75x^4 - 140x^3$$

(c) 由上面討論得知 (a) 與 (b) 兩種求導數之方法，其結果完全相同，故函數乘積之導數用任一方法均可求得，但當函數形式較爲複雜時，乘冪（次方）法則較爲有用，而另一種方法則可藉以檢查我們所求之導數是否正確。

3.10 已知 $y = (x^8 + 8)(x^6 + 11)$，重作問題 3.9 之問題。

圖 (a) 令 $u = x^8 + 8$ 和 $v = x^6 + 11$。則 $du/dx = 8x^7$ 且 $dv/dx = 6x^5$。將這些結果代入乘積法則之公式，

$$\frac{dy}{dx} = (x^8 + 8)(6x^5) + (x^6 + 11)(8x^7) = 6x^{13} + 48x^5 + 8x^{13} + 88x^7 = 14x^{13} + 88x^7 + 48x^5$$

(*b*) 首先利用乘法予以簡化原始函數

$$y = (x^8 + 8)(x^6 + 11) = x^{14} + 11x^8 + 8x^6 + 88$$

則

$$\frac{dy}{dx} = 14x^{13} + 88x^7 + 48x^5$$

(*c*) (*a*)，(*b*) 所求之導數必然相同。

3.11 利用乘積法則對下列各函數予以微分：

圖 (*a*) $y = (4x^2 - 3)(2x^5)$

$$\frac{dy}{dx} = (4x^2 - 3)(10x^4) + 2x^5(8x) = 40x^6 - 30x^4 + 16x^6 = 56x^6 - 30x^4$$

(*b*) $y = 7x^9(3x^2 - 12)$

$$\frac{dy}{dx} = 7x^9(6x) + (3x^2 - 12)(63x^8) = 42x^{10} + 189x^{10} - 756x^8 = 231x^{10} - 756x^8$$

(*c*) $y = (2x^4 + 5)(3x^5 - 8)$

$$\frac{dy}{dx} = (2x^4 + 5)(15x^4) + (3x^5 - 8)(8x^3) = 30x^8 + 75x^4 + 24x^8 - 64x^3 = 54x^8 + 75x^4 - 64x^3$$

(*d*) $z = (3 - 12t^3)(5 + 4t^6)$

$$\frac{dz}{dt} = (3 - 12t^3)(24t^5) + (5 + 4t^6)(-36t^2) = 72t^5 - 288t^8 - 180t^2 - 144t^8 = -432t^8 + 72t^5 - 180t^2$$

商數法則

3.12 已知

$$y = \frac{10x^8 - 6x^7}{2x}$$

(*a*) 利用商數法則，直接求其導數，(*b*) 先簡化此函數，再求其導數，(*c*) 比較 (*a*) 與 (*b*) 之結果。

圖 (*a*) 商數法則之公式爲

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$$

其中 u = 分母 = $10x^8 - 6x^7$ 而 v = 分子 = $2x$。因而

$$\frac{du}{dx} = 80x^7 - 42x^6 \quad 且 \quad \frac{dv}{dx} = 2$$

代入此公式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x(80x^7-42x^6)-(10x^8-6x^7)(2)}{(2x)^2}$$

$$=\frac{160x^8-84x^7-20x^8+12x^7}{4x^2}=\frac{140x^8-72x^7}{4x^2}=35x^6-18x^5$$

(*b*) 首先以除法將化原始函數，

$$y=\frac{10x^8-6x^7}{2x}=5x^7-3x^6$$

$$\frac{dy}{dx}=35x^6-18x^5$$

(*c*) 上面 (*a*) 與 (*b*) 所求之導數正如預期一樣完全相同，故函數之商的導數可由任一方法求得，但是當函數之形較爲複雜時，則商數法則較爲有用，參見問題 3.13(*b*)、(*e*)，而另一種方法，則可用來檢查我們所求得之答案。

3.13 利用商數法則對下列各函數微分：

解 (*a*) $y=\dfrac{3x^8-4x^7}{4x^5}$

u = 分子 = $3x^8-4x^7$；v = 分母 = $4x^5$。故，$du/dx=24x^7-28x^6$ 且 $dv/dx=12x^4$。代入商數法則之公式，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x^5(24x^7-28x^6)-(3x^8-4x^7)(12x^4)}{(4x^5)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{96x^{10}-112x^9-36x^{10}+48x^9}{16x^6}$$

$$=\frac{60x^{10}-64x^9}{16x^6}=\frac{15}{4}x^4-4x^3$$

[當分母爲指數型態時，記得將其指數相乘，例如 $(x^2)^3=x^6$。]

(*b*) $y=\dfrac{4x^5}{1-3x}$ $\quad(x\neq\frac{1}{3})$

(注意：必須加上補充說明，因爲如果 $x=\frac{1}{3}$ 則分母爲零因而整個函數無意義。)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1-3x)(20x^4)-4x^5(-3)}{(1-3x)^2}=\frac{20x^4-60x^5+12x^5}{(1-3x)^2}=\frac{20x^4-48x^5}{(1-3x)^2}$$

(*c*) $y=\dfrac{15x^2}{2x^2+7x-3}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x^2+7x-3)(30x)-15x^2(4x+7)}{(2x^2+7x-3)^2}$$

$$=\frac{60x^3+210x^2-90x-60x^3-105x^2}{(2x^2+7x-3)^2}=\frac{105x^2-90x}{(2x^2+7x-3)^2}$$

(*d*) $y=\dfrac{6x-7}{8x-5}$ $\quad(x\neq\frac{5}{8})$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(8x-5)(6)-(6x-7)(8)}{(8x-5)^2}=\frac{48x-30-48x+56}{(8x-5)^2}=\frac{26}{(8x-5)^2}$$

(*e*) $y=\dfrac{5x^2-9x+8}{x^2+1}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+1)(10x-9)-(5x^2-9x+8)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{10x^3-9x^2+10x-9-10x^3+18x^2-16x}{(x^2+1)^2}=\frac{9x^2-6x-9}{(x^2+1)^2}$$

連鎖律

3.14 已知 $y=u^6$ 且 $u=3x^4+5$，試求 dy/dx。

圖 爲求取複合函數之導數，必須使用連鎖律，根據連鎖律，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

在此，$dy/du=6u^5$，$du/dx=12x^3$，將這些值代入公式

$$\frac{dy}{dx}=6u^5(12x^3)=72x^3u^5$$

但 $u=3x^4+5$。因此

$$\frac{dy}{dx}=72x^3(3x^4+5)^5$$

3.15 已知 $y=(7x+9)^2$，(*a*) 利用連鎖律直接求其導數，(*b*) 先求其平方再求其導數，(*c*) 比較 (*a*) 與 (*b*) 之結果。

圖 (*a*) 令 $u=7x+9$，$y=u^2$，則 $du/dx=7$，且 $dy/du=2u$。由連鎖律知

$$\frac{dy}{dx}=2u(7)=14u$$

但 $u=7x+9$，故

$$\frac{dy}{dx}=14(7x+9)=98x+126$$

(*b*) 首先求其平方，可得

$$y=(7x+9)^2=49x^2+126x+81$$

$$\frac{d}{dx}(49x^2+126x+81)=98x+126$$

(*c*) 這兩種方法所求得之導數當然相同，任一方法均可使用，但當函數之次方超過 2（如問題 3.14 者），使用連鎖律將可大大的簡化求解過程。

3.16 利用連鎖律對下列各式微分：

圖 (a) $y = u^{20}$, $u = 7x - 4$

$$\frac{dy}{dx} = 20u^{19}(7) = 140u^{19}$$

但因 $u = 7x - 4$,

$$\frac{dy}{dx} = 140(7x - 4)^{19}$$

(b) $y = u^4$, $u = -x^2 + 8x - 7$

$$\frac{dy}{dx} = 4u^3(-2x + 8) = (-8x + 32)u^3$$

但因 $u = -x^2 + 8x - 7$,

$$\frac{dy}{dx} = (-8x + 32)(-x^2 + 8x - 7)^3$$

(c) $y = (5x - 7)^3$

當多項式之次方（冪）大於 1 時，我們必須使用連鎖律，令 $u = 5x - 7$，則 $y = u^3$，$dy/du = 3u^2$，且 $du/dx = 5$。由連鎖律知，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

將上列諸值代入公式，

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2(5) = 15u^2$$

但 $u = 5x - 7$。因此，

$$\frac{dy}{dx} = 15(5x - 7)^2$$

(d) $y = (4x^2 - 1)^7$

令 $u = 4x^2 - 1$。則 $y = u^7$，$dy/du = 7u^6$，與 $du/dx = 8x$。代入連鎖律公式，

$$\frac{dy}{dx} = 7u^6(8x) = 56xu^6 = 56x(4x^2 - 1)^6$$

(e) $y = (x^2 + 3x - 1)^5$

令 $u = x^2 + 3x - 1$，則 $y = u^5$，$dy/du = 5u^4$，且 $du/dx = 2x + 3$。代入連鎖律公式，

$$\frac{dy}{dx} = 5u^4(2x + 3) = (10x + 15)u^4 = (10x + 15)(x^2 + 3x - 1)^4$$

混合法則

3.17 已知 $y = 3x(2x - 1)/(3x - 2)$，試求其導數。

解 因爲此商式之分子包含函數之乘積，故我們必須同時使用乘積法則與商數法則以求此函數之導數，參見 3.4 節之 (f) 項，首先由商數法則知

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$$

其中 $u = 3x(2x-1)$，$v = 3x - 2$，而 $dv/dx = 3$。由乘積法則知，

$$\frac{du}{dx} = 3x(2) + (2x-1)(3) = 12x - 3.$$

因此，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x-2)(12x-3) - 3x(2x-1)(3)}{(3x-2)^2}$$

化簡可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{36x^2 - 9x - 24x + 6 - 18x^2 + 9x}{(3x-2)^2} = \frac{18x^2 - 24x + 6}{(3x-2)^2}$$

3.18 已知 $y = (4x-1)/[2x(5x+2)]$，試求其導數。

圖 本例中，商式之分母包含有函數之乘積，正如問題 3.17 一樣，我們必須同時使用商數法則與乘積法則。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$$

其中 $u = 4x - 1$，$v = 2x(5x+2)$，而 $du/dx = 4$。由乘積法則知，

$$\frac{dv}{dx} = 2x(5) + (5x+2)(2) = 20x + 4.$$

代入基本之公式，可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(5x+2)(4) - (4x-1)(20x+4)}{[2x(5x+2)]^2}$$

化簡之，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{40x^2 + 16x - 80x^2 - 16x + 20x + 4}{4x^2(5x+2)^2} = \frac{-40x^2 + 20x + 4}{4x^2(5x+2)^2}$$

3.19 已知 $y = 3x(4x-5)^2$，試求其導數。

圖 首先必須使用乘積法則，則在求第二個函數 $(4x-5)^2$ 之導數時，亦需應用連鎖律。首先由乘積法則知，

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

其中 $u = 3x$，$v = (4x-5)^2$，而 $du/dx = 3$。再由連鎖律知，$dv/dx = 2(4x-5)(4)$。將此結果代入乘積之公式

$$\frac{dy}{dx} = 3x(8)(4x-5) + (4x-5)^2(3)$$

化簡之，

$$\frac{dy}{dx} = 96x^2 - 120x + 3(16x^2 - 40x + 25) = 144x^2 - 240x + 75$$

3.20 於問題 3.19 中，先化簡函數再求其導數，並檢查其結果是否相同。

解 先化簡之 $y = 3x(4x-5)^2$ 可得

$$y = 3x(16x^2 - 40x + 25) = 48x^3 - 120x^2 + 75x$$

因此，正如問題 3.19 者，

$$\frac{d}{dx}(48x^3 - 120x^2 + 75x) = 144x^2 - 240x + 75$$

3.21 已知 $y = 3x[(5x+2)/(2x+3)]$，試求其導數。

解 兩函數乘積之一包含商式，因此，除了乘積法則外，在求第二個函數 $[(5x+2)/(2x+3)]$ 之導數時，必須同時應用商數法則，首先由乘積法則知，

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

其中 $u = 3x$，$v = (5x+2)/(2x+3)$ 且 $du/dx = 3$。再由商數法則知，

$$\frac{dv}{dx} = \frac{(2x+3)(5) - (5x+2)(2)}{(2x+3)^2} = \frac{11}{(2x+3)^2}$$

將此結果代入乘積法則之公式，

$$\frac{dy}{dx} = 3x\frac{11}{(2x+3)^2} + \frac{5x+2}{2x+3}(3)$$

化簡可得，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{33x}{(2x+3)^2} + \frac{15x+6}{2x+3} = \frac{33x + (15x+6)(2x+3)}{(2x+3)^2}$$
$$= \frac{30x^2 + 90x + 18}{(2x+3)^2}$$

注意：此題亦可視爲一商式中包含兩函數之乘積，試利用商數法則求其導數再檢查答案是否相同。

3.22 已知 $y = (8x-5)^2/(7x+4)$，試求 y'

解 本題求解時不但包含了商數法則，另外在求分子之導數時必須應用連鎖律。首先由商數法則知，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$$

其中 $u = (8x-5)^2$，$v = 7x+4$，$dv/dx = 7$。再由連鎖律知，$du/dx = 2(8x-5)(8) = 128x - 80$。將此結果代入商數法則之公式，可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(7x+4)(128x-80) - (8x-5)^2(7)}{(7x+4)^2}$$

$$= \frac{896x^2 - 560x + 512x - 320 - 7(64x^2 - 80x + 25)}{(7x+4)^2} = \frac{448x^2 + 512x - 495}{(7x+4)^2}$$

3.23 已知 $y = [(3x+4)/(2x+5)]^2$，試求 dy/dx。

圖　此問題必須同時運用連鎖律與商數法則，首先由連鎖律知，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

令 $u = (3x+4)/(2x+5)$，則 $y = u^2$ 且 $dy/du = 2u$。再由商數法則知

$$\frac{du}{dx} = \frac{(2x+5)(3) - (3x+4)(2)}{(2x+5)^2} = \frac{7}{(2x+5)^2}$$

代入連鎖律之公式，

$$\frac{dy}{dx} = 2u\frac{7}{(2x+5)^2}$$

但 $u = (3x+4)/(2x+5)$，故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(3x+4)}{(2x+5)}\frac{7}{(2x+5)^2} = \frac{14(3x+4)}{(2x+5)^3} = \frac{42x+56}{(2x+5)^3}$$

3.24 應用必要之法則對下列各式微分：

圖　(*a*)　$y = (5x-1)(3x+4)^3$

利用乘積法則及連鎖律

$$\frac{dy}{dx} = (5x-1)[3(3x+4)^2(3)] + (3x+4)^3(5)$$

化簡可得，

$$\frac{dy}{dx} = (5x-1)(9)(3x+4)^2 + 5(3x+4)^3 = (45x-9)(3x+4)^2 + 5(3x+4)^3$$

(*b*)　$y = \dfrac{(9x^2-2)(7x+3)}{5x}$

先利用商數法則再使用乘積法則，

$$y' = \frac{5x[(9x^2-2)(7) + (7x+3)(18x)] - (9x^2-2)(7x+3)(5)}{(5x)^2}$$

化簡之，

$$y' = \frac{5x(63x^2 - 14 + 126x^2 + 54x) - 5(63x^3 + 27x^2 - 14x - 6)}{25x^2} = \frac{630x^3 + 135x^2 + 30}{25x^2}$$

(c) $y = \dfrac{15x + 23}{(3x + 1)^2}$

利用商數法則與連鎖律，

$$y' = \frac{(3x + 1)^2(15) - (15x + 23)[2(3x + 1)(3)]}{(3x + 1)^4}$$

化簡之，

$$y' = \frac{15(3x + 1)^2 - (15x + 23)(18x + 6)}{(3x + 1)^4} = \frac{-135x^2 - 414x - 123}{(3x + 1)^4}$$

(d) $y = (6x + 1)\dfrac{(4x)}{9x - 1}$

利用乘積法則與商數法則

$$Dy = (6x + 1)\left[\frac{(9x - 1)(4) - 4x(9)}{(9x - 1)^2}\right] + \frac{4x}{9x - 1}(6)$$

化簡之，

$$Dy = \frac{(6x + 1)(36x - 4 - 36x)}{(9x - 1)^2} + \frac{24x}{9x - 1} = \frac{216x^2 - 48x - 4}{(9x - 1)^2}$$

注意：利用包含乘積之商數法則以檢查此答案是否正確，參見問題 3.17 。

(e) $y = \left(\dfrac{3x - 1}{2x + 5}\right)^3$

利用連鎖律與商數法則，

$$y' = 3\left(\frac{3x - 1}{2x + 5}\right)^2 \frac{(2x + 5)(3) - (3x - 1)(2)}{(2x + 5)^2}$$

化簡之，

$$y' = \frac{3(3x - 1)^2}{(2x + 5)^2} \frac{17}{(2x + 5)^2} = \frac{51(3x - 1)^2}{(2x + 5)^4}$$

高階導數

3.25 就下列各函數，(1)求其二階導數，(2)當 $x = 2$ 時，試求其值。

圖 (a) $y = 7x^3 + 5x^2 + 12$

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 21x^2 + 10x$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 42x + 10$

(2) 當 $x = 2$, $d^2y/dx^2 = 42(2) + 10$

$= 94$

(b) $f(x) = x^6 + 3x^4 + x$

(1) $f'(x) = 6x^5 + 12x^3 + 1$

$f''(x) = 30x^4 + 36x^2$

(2) 當 $x = 2$, $f''(x) = 30(2)^4 + 36(2)^2$

$= 624$

(c) $y = (2x + 3)(8x^2 - 6)$

(1) $Dy = (2x + 3)(16x) + (8x^2 - 6)(2)$

$= 32x^2 + 48x + 16x^2 - 12$

$= 48x^2 + 48x - 12$

$D^2y = 96x + 48$

(2) 當 $x = 2$, $D^2y = 96(2) + 48$

$= 240$

(d) $f(x) = (x^4 - 3)(x^3 - 2)$

(1) $f_x = (x^4 - 3)(3x^2) + (x^3 - 2)(4x^3)$

$= 3x^6 - 9x^2 + 4x^6 - 8x^3$

$= 7x^6 - 8x^3 - 9x^2$

$f_{xx} = 42x^5 - 24x^2 - 18x$

(2) 當 $x = 2$, $f_{xx} = 42(2)^5 - 24(2)^2 - 18(2)$

$= 1212$

(e) $y = \dfrac{5x}{1 - 3x}$

(1) $y' = \dfrac{(1 - 3x)(5) - 5x(-3)}{(1 - 3x)^2}$

$= \dfrac{5 - 15x + 15x}{(1 - 3x)^2} = \dfrac{5}{(1 - 3x)^2}$

$y'' = \dfrac{(1 - 3x)^2(0) - 5[2(1 - 3x)(-3)]}{(1 - 3x)^4}$

$= \dfrac{-5(-6 + 18x)}{(1 - 3x)^4} = \dfrac{30 - 90x}{(1 - 3x)^4}$

(2) 當 $x = 2$, $y'' = \dfrac{30 - 90(2)}{[1 - 3(2)]^4}$

$= \dfrac{-150}{(-5)^4}$

$= -\dfrac{6}{25}$

(f) $y = \dfrac{7x^2}{x - 1}$

(1) $y' = \dfrac{(x - 1)(14x) - 7x^2(1)}{(x - 1)^2}$

$= \dfrac{14x^2 - 14x - 7x^2}{(x - 1)^2} = \dfrac{7x^2 - 14x}{(x - 1)^2}$

$y'' = \dfrac{(x - 1)^2(14x - 14) - (7x^2 - 14x)[2(x - 1)(1)]}{(x - 1)^4}$

$= \dfrac{(x^2 - 2x + 1)(14x - 14) - (7x^2 - 14x)(2x - 2)}{(x - 1)^4}$

$= \dfrac{14(x - 1)}{(x - 1)^4} = \dfrac{14}{(x - 1)^3}$

(2) 當 $x = 2$, $y'' = \dfrac{14}{(2 - 1)^3}$

$= 14$

(g) $f(x) = (8x - 4)^3$

(1) $f' = 3(8x - 4)^2(8)$

$= 24(8x - 4)^2$

$f'' = 2(24)(8x - 4)(8)$

$= 384(8x - 4)$

(2) 當 $x = 2$, $f'' = 384[8(2) - 4]$

$= 4608$

(h) $y = (5x^3 - 7x^2)^2$

(1) $Dy = 2(5x^3 - 7x^2)(15x^2 - 14x)$

$= 150x^5 - 350x^4 + 196x^3$

$D^2y = 750x^4 - 1400x^3 + 588x^2$

(2) 當 $x = 2$, $D^2y = 750(2)^4 - 1400(2)^3 + 588(2)^2$

$= 3152$

3.26 就下列各函數，(1)試求其連續各階導數，(2)當 $z = 3$ 試求各階導數之值。

圖 (*a*) $y = x^3 + 3x^2 + 9x - 7$

(1) $y' = 3x^2 + 6x + 9$
$y'' = 6x + 6$
$y''' = 6$
$y^{(4)} = 0$

(2) At $x = 3$, $y' = 3(3)^2 + 6(3) + 9 = 54$
$y'' = 6(3) + 6 = 24$
$y''' = 6$
$y^{(4)} = 0$

(*b*) $y = (4x - 7)(9x + 2)$

(1) $y' = (4x - 7)(9) + (9x + 2)(4)$
$= 36x - 63 + 36x + 8 = 72x - 55$
$y'' = 72$
$y''' = 0$

(2) At $x = 3$, $y' = 72(3) - 55 = 161$
$y'' = 72$
$y''' = 0$

(*c*) $y = (5 - x)^4$

(1) $Dy = 4(5 - x)^3(-1) = -4(5 - x)^3$
$D^2y = -12(5 - x)^2(-1) = 12(5 - x)^2$
$D^3y = 24(5 - x)(-1)$
$= -24(5 - x) = 24x - 120$
$D^4y = 24$
$D^5y = 0$

(2) At $x = 3$, $Dy = -4(5 - 3)^3 = -32$
$D^2y = 12(5 - 3)^2 = 48$
$D^3y = 24(3) - 120 = -48$
$D^4y = 24$
$D^5y = 0$

第四章

導數在經濟學上的應用

4.1 邊際的概念

在經濟學上，邊際成本（marginal cost）的定義是，產生每增加一單位時，總成本之變動量，邊際收益（marginal revenue）之定義爲財貨每增加一單位銷售，所增加之總收益的變動。因爲總成本與總收益兩者均爲產量（Q）之函數，故邊際成本與邊際收益分別可以數學式表示爲它們總函數之導數。亦即，

若 $TC = TC(Q)$，則 $\quad MC = \dfrac{dTC}{dQ}$

並且，如果 $TR = TR(Q)$，則 $\quad MR = \dfrac{dTR}{dQ}$

就短期而言，任意經濟函數之邊際概念可以其總函數之導數表示之。

例題4.1

(1) 若 $TR = 75Q - 4Q^2$，則 $MR = d\,TR/dQ = 75 - 8Q$。

(2) 若 $TC = Q^2 + 7Q + 23$，則 $MC = d\,TC/dQ = 2Q + 7$。

例題4.2

已知需求函數 $P = 30 - 2Q$，則邊際收益爲對總收益函數求取第一次導數，亦即先求其總收益函數然後再對 Q 取導數，因而，

$$TR = PQ = (30 - 2Q)Q = 30Q - 2Q^2$$

則，

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = 30 - 4Q$$

若 $Q = 4$，$MR = 30 - 4(4) = 14$；若 $Q = 5$，$MR = 30 - 4(5) = 10$。

4.2 函數之極大化與極小化

爲求得一函數之相對極大或極小，一函數必有一停滯點（plateau）（亦即在該點既非遞增亦非遞減），同時，如果函數既不遞增也不遞減，則此函數在該點上之導數必定等於0，因此爲求得相對極大或極小之首要條件（first and necessary condition）爲其一階導數等於0，第二個（即充分）條件爲二階導數爲負數時有相對極大

，二階導數爲正數時有相對極小，因此，

相對極大時：$\frac{dy}{dx}=0$　　$\frac{d^2y}{dx^2}<0$

而相對極小時：$\frac{dy}{dx}=0$　　$\frac{d^2y}{dx^2}>0$

例題 4.3

導數乃測量一函數之瞬間變動率，在導數爲正之各點（如圖 4-1 所示 A 與 E 之切點爲正斜率），代表函數遞增，而導數爲負之各點（如圖 4-1 所示 C 與 F 之切點爲負斜率）則代表此函數遞減，最後在函數爲相對極大或極小時（B 與 D）其切線斜率爲 0，此爲相對極大與相對極小之必要條件，並且爲予以區別極大或極小，二階導數之求取，乃爲必要者。

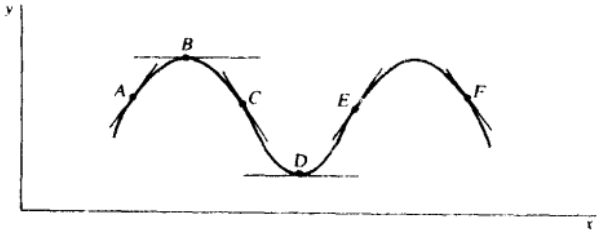


圖 4-1

例題 4.4

二階導數乃測量邊際函數（即第一階導數）之變動率，如果第一階導數爲 0，則代表函數斜率爲 0 因而此函數有一停滯點（plateau），此時若其二階導數爲負，即代表此函數從該停滯點後往下移動，因此必有一相對極大點。反之，如果一階導數爲 0 而二階導數爲正則代表此函數從該停滯點後開始往上爬，而此停滯點爲相對極小點。必須牢記的是，正的二階導數之情形是（＋＋）—— 兩個正號，其意義即此曲線經過停滯點後往上爬（⌣），而負的二階導數（－－）—— 兩個負號，其意義則爲此曲線經過停滯點後往下降（⌢），一個簡單之記憶圖形法則是



一階導數爲 0 之點稱爲臨界值（critical value），定點值（stationary value）或極值（extreme value），又如果二階導數爲 0 而三階導數不爲 0 則臨界值既不爲

極大點也不是極小點，而是反曲點（inflection point），在該點，函數將改變其變動率，如圖 4-4(a)中 A 點所示即爲一反曲點。

例題 4.5

已知 $TC = 31 + 24Q - 5.5Q^2 + \frac{1}{3}Q^3$，試求總成本函數之相對極小或極大值。

(1) 首先求此函數之導數並令其爲 0 以求取臨界值。

$$\frac{dTC}{dQ} = 24 - 11Q + Q^2 = 0$$

$$(Q - 8)(Q - 3) = 0$$

臨界值爲 $Q = 8 \qquad Q = 3$

(2) 其次求二階導數，並檢驗其在臨界值時爲極小或極大點。

$$\frac{d^2TC}{dQ^2} = -11 + 2Q$$

當 $Q = 8$ 時，$\frac{d^2TC}{dQ^2} = -11 + 2(8) = 5 > 0$

當 $Q = 3$ 時，$\frac{d^2TC}{dQ^2} = -11 + 2(3) = -5 < 0$

因此，在 $Q = 8$，TC 爲相對極小值而在 $Q = 3$，TC 爲相對極大值。

(3) 在 $Q = 8$ 時計算原先之函數，可知其相對極小值，而在 $Q = 3$ 時可求得相對極大值。

在 $Q = 8$ 時，$TC = 31 + 24(8) - 5.5(8)^2 + \frac{1}{3}(8)^3 = 41.67$

在 $Q = 3$ 時，$TC = 31 + 24(3) - 5.5(3)^2 + \frac{1}{3}(3)^3 = 62.5$

4-3 價格彈性

於經濟學中，**價格彈性**（price elasticity），乃測量價格變動某一百分比時，將引起數量相對變動多少個百分比，以數學式表示即如，

$$\epsilon = \frac{dQ/Q}{dP/P}$$

爲簡化數學上之計算，價格彈性往往可以下列不同形式表示之

$$\epsilon = \frac{dQ/dP}{Q/P} = \frac{\text{邊際函數}}{\text{平均函數}} \qquad \text{或} \qquad \epsilon = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$$

無論供給或需要，均有其價格彈性，且當 $|\epsilon| > 1$ 時，稱爲**高彈性**（elastic），$|\epsilon|$

< 1 時稱爲低（無）彈性（inelastic）而當 $|\epsilon| = 1$ 時則謂之單一彈性（unitary elastic）。

例題 4.6

已知需求函數 $Q_d = 650 - 5P - P^2$，其中 $P = 10$，則需求的價格彈性求解步驟如下所示。

利用另一種形式之公式：
$$\epsilon = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$$

首先取其導數，
$$\frac{dQ}{dP} = -5 - 2P$$

然後代入已知之價格（$P = 10$），
$$\frac{dQ}{dP} = -5 - 2(10) = -25$$

其次，求 $P = 10$ 時之需求水準（Q）
$$Q = 650 - 5(10) - (10)^2 = 500$$

將這些值代入彈性之公式，可得
$$\epsilon = -25\left(\frac{10}{500}\right) = -0.5$$

（關於傳統經濟學上之表示方法，即 P 爲 Q 之函數，其彈性之求解請參見問題 4.25）。

例題 4.7

因爲 $\epsilon = (dQ/dP)/(Q/P)$ = 邊際函數 / 平均函數，故供給與需求之彈性可由觀察圖 4-2 並估算其邊際與平均函數，再代入公式計算而得，其中對邊際函數之估計是，求取此曲線某一點之切線的斜率；而平均函數則求曲線上之某一點與原點連線之斜率。

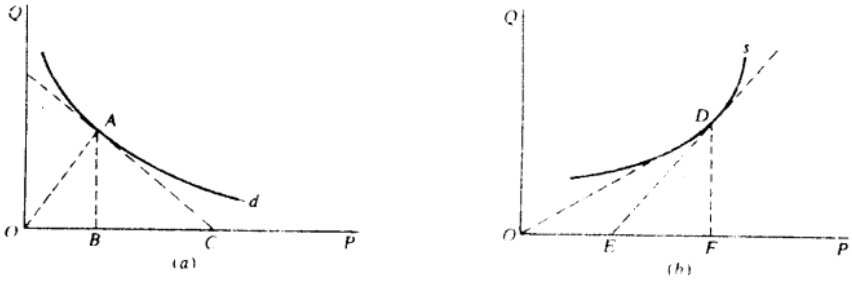


圖 4-2

圖 4-2(*a*)中之需求函數：邊際函數在A點之斜率爲AB/BC，而平均函數在A點之斜率則爲AB/OB，因此

$$\epsilon_d = \frac{-AB/BC}{AB/OB} = -\frac{AB}{BC}\frac{OB}{AB} = -\frac{OB}{BC}$$

圖 4-2(*b*)中之供給函數：邊際函數在D點之斜率爲DF/EF，而平均函數在D點之斜率爲DF/OF，因此

$$\epsilon_s = \frac{DF/EF}{DF/OF} = \frac{DF}{EF}\frac{OF}{DF} = \frac{OF}{EF}$$

當$Q = f(P)$，則在一特定點上需求的價格彈性等於此點至原點之水平距離(OB)除以此點至其切線與橫軸交點之水平距離（BC），而在供給曲線上一已知點之價格彈性則等於此點至原點之水平距離（OF）除以此點至其切線與橫軸交點之水平距離（EF）。當函數型態爲$P = f(Q)$有關上述之幾何求法請參見問題 4.25 - 4.44 。

例題4.8

利用問題 7 之技巧，試求圖 4-3 中所標示各點之需求與供給彈性。

需求彈性：

在A點時，$\epsilon_d = -\frac{OE}{EF} = -\frac{30}{50} = -0.6$

在B點時，$\epsilon_d = -\frac{OG}{GH} = -\frac{100}{60} = -1.67$

供給彈性：

在C點時，$\epsilon_s = \frac{OK}{IK} = \frac{70}{50} = 1.4$

在D點時，$\epsilon_s = \frac{OL}{JL} = \frac{120}{60} = 2$

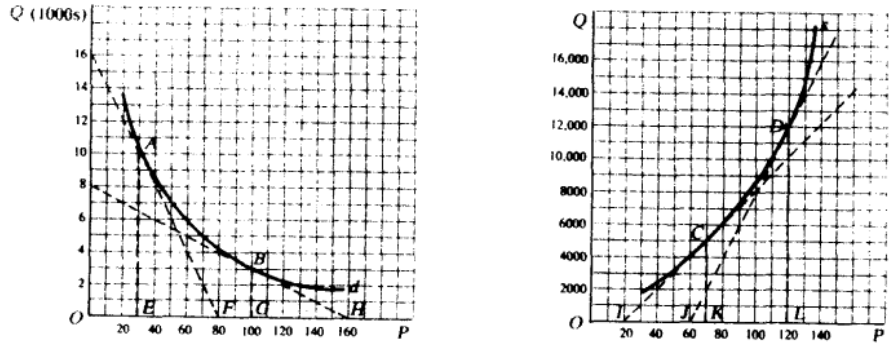


圖 4-3

4-4 總的、邊際的與平均的概念之關係

總的、邊際的與平均的概念它們之間的關係非常重要，並圖示於圖 4-4，圖 4-4 (*a*)表示投入 x 之總產量（TP）曲線（設投入 y 之數量固定不變），圖 4-4 (*b*)則表示此 x 之邊際產量（MP）與平均產量（AP）曲線。圖(*b*)中MP曲線乃由(*a*)中之TP曲線導出，因爲 MP_x 代表 x 變動一單位時引起TP之變動量，故 MP_x 等於TP曲線之斜率（dTP/dx），此斜率可由沿著TP曲線上目視估計各點之切線斜率而得，有關TP與MP關係之五點特性列示如下：

TP	⇒	MP
(1) 由 O 至 C 其斜率爲正。		(1) 由 O 至 C，MP 爲正（即位於 x 軸以上）。
(2) 由 O 至 A 其斜率愈來愈陡，A 爲反曲點。		(2) 由 O 至 A，MP 遞增，且 A 爲頂點。
(3) 由 A 至 C 其斜率愈來愈平坦（但仍爲正）。		(3) 由 A 至 C，MP 遞減（雖然仍然爲正值）。
(4) 在 C 點其斜率爲 0。		(4) 在 C 點，MP 等於 0。
(5) C 點以右之斜率爲負。		(5) C 點以右MP爲負。

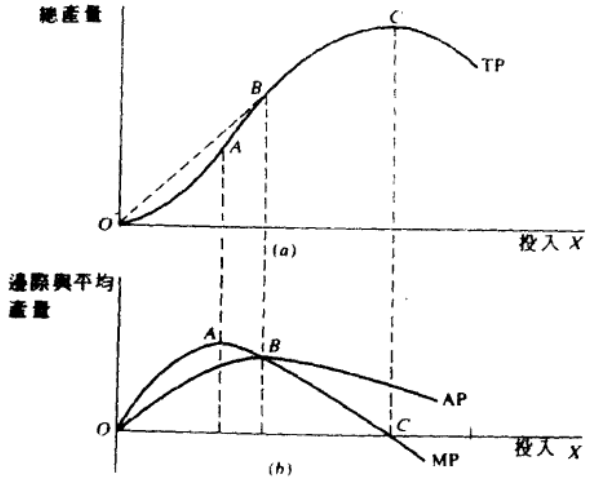


圖 4-4

平均產量（AP）爲總產量除以 x，它可由圖(*a*)中TP曲線上某一點（例如 B 點）至原點連線之斜率估算而得，注意，此線之斜率即爲該點之縱軸座標除以其橫軸座標，

或TP/x。有關AP曲線之三個特性列示如下：

(1) 由O至B間，原點與TP曲線上各點連線之斜率愈來愈陡（B點爲該點至原點連線與TP相切之點）	(1) 由O至B其AP遞增，並在B點達到最大。
(2) 因爲在B點其與原點連線亦爲TP曲線之一切線，故此連線之斜率亦等於TP之斜率（即MP）。	(2) 在B點時，AP＝MP
(3) B點以右，各點與原點連線之斜率遞減但仍爲正值。	(3) 超過B點以後，AP遞減但仍爲正值（亦即位於x軸以上）。

此外，邊際與平均函數之間亦有相當重要之關係，如圖4-4(*b*)所示，在AP遞增之範圍內，MP曲線位於AP曲線之上（即MP＞AP）；當AP曲線達到最高點時，MP＝AP，最後，當AP下降時，MP＜AP。此種關係式恒存在於全部之邊際量與平均量間。

例題4.9

假設一籃球隊平均身高爲6英呎，如果有一新的（邊際）隊員身高7英呎加入該隊，則此隊之平均身高增加，其次如果此邊際球員之身高剛好爲6英呎，則該隊之平均身高不變；最後，如果此邊際球員身高少於6英呎，則該隊平均身高下降。

習題與解答

邊際、平均與總的概念

4.1 試就下列各個總函數(1)求其邊際函數，(2)平均函數，並在$Q=3$與$Q=5$求其值。

圖 (*a*) $TC = 3Q^2 + 7Q + 12$

(1) $MC = \frac{dTC}{dQ} = 6Q + 7$

當 $Q=3$, $MC = 6(3) + 7 = 25$

當 $Q=5$, $MC = 6(5) + 7 = 37$

(2) $AC = \frac{TC}{Q} = 3Q + 7 + \frac{12}{Q}$

當 $Q=3$, $AC = 3(3) + 7 + \frac{12}{3} = 20$

當 $Q=5$, $AC = 3(5) + 7 \times \frac{12}{5} = 24.4$

注意：在求取平均函數時，必須記得除以固定項Q。

(*b*) $\pi = Q^2 - 13Q + 78$

(1) $\frac{d\pi}{dQ} = 2Q - 13$

(2) $A\pi = \frac{\pi}{Q} = Q - 13 + \frac{78}{Q}$

當 $Q=3$, $\frac{d\pi}{dQ}=2(3)-13=-7$.

當 $Q=5$, $\frac{d\pi}{dQ}=2(5)-13=-3$.

當 $Q=3$, $A\pi=3-13+\frac{28}{3}=16$.

當 $Q=5$, $A\pi=5-13+\frac{28}{5}=7.6$.

(c) $TR=12Q-Q^2$

(1) $MR=\frac{dTR}{dQ}=12-2Q$

當 $Q=3$, $MR=12-2(3)=6$.

當 $Q=5$, $MR=12-2(5)=2$.

(2) $AR=\frac{TR}{Q}=12-Q$

當 $Q=3$, $AR=12-3=9$

當 $Q=5$, $AR=12-5=7$.

(d) $TC=35+5Q-2Q^2+2Q^3$

(1) $MC=\frac{dTC}{dQ}=5-4Q+6Q^2$

當 $Q=3$, $MC=5-4(3)+6(3)^2=47$.

當 $Q=5$, $MC=5-4(5)+6(5)^2=135$.

(2) $AC=\frac{TC}{Q}=\frac{35}{Q}+5-2Q+2Q^2$

當 $Q=3$, $AC=\frac{35}{3}+5-2(3)+2(3)^2=25$

當 $Q=5$, $AC=\frac{35}{5}+5-2(5)+2(5)^2=52$

4.2 就下列各供給函數試求其MR函數，並在 $Q=4$ 與 $Q=10$ 時計算其值。

解 (a) $P=Q^2+2Q+1$

在已知之簡單的供給（或需求）函數，爲求其MR函數，我們必須先求出其TR函數再求其對 Q 之導數。

$$TR=PQ=(Q^2+2Q+1)Q=Q^3+2Q^2+Q$$

$$MR=\frac{dTR}{dQ}=3Q^2+4Q+1$$

當 $Q=4$ 時，$MR=3(4)^2+4(4)+1=65$。當 $Q=10$ 時，$MR=3(10)^2+4(10)+1=341$。

(b) $P=Q^2+0.5Q+3$

$$TR=PQ=(Q^2+0.5Q+3)Q=Q^3+0.5Q^2+3Q$$

$$MR=3Q^2+Q+3$$

當 $Q=4$ 時，$MR=3(4)^2+4+3=55$。當 $Q=10$ 時，$MR=3(10)+10+3=313$。

4.3 就下列各供給函數求其MR函數，並在 $Q=4$ 與 $Q=10$ 計算其值。

解 (a) $Q=-72+3P$

當供給（或需求）函數形如 $Q=f(P)$ 時，首先求此函數之倒逆數，$P=f(Q)$，然後再按問題4.2之方法求其MR函數。

$$P=\tfrac{1}{3}Q+24$$

$$TR=(\tfrac{1}{3}Q+24)Q=\tfrac{1}{3}Q^2+24Q$$

$$MR=\frac{dTR}{dQ}=\tfrac{2}{3}Q+24$$

當 $Q=4$，$MR=\frac{2}{3}(4)+24=26\frac{2}{3}$。當 $Q=10$，$MR=\frac{2}{3}(10)+24=30$

(b) $Q + 60 - 5P = 0$

$$P = 0.2Q + 12$$

$$TR = (0.2Q + 12)Q = 0.2Q^2 + 12Q$$

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = 0.4Q + 12$$

當 $Q = 4$，$MR = 0.4(4) + 12 = 13.6$。當 $Q = 10$，$MR = 0.4(10) + 12 = 16$。

4.4 就下列各需求函數求其MR函數，並在 $Q = 4$ 與 $Q = 10$ 時計算其值。

圖 (a) $Q = 36 - 2P$

$$P = 18 - 0.5Q$$

$$TR = (18 - 0.5Q)Q = 18Q - 0.5Q^2$$

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = 18 - Q$$

當 $Q = 4$，$MR = 18 - 4 = 14$.

當 $Q = 10$，$MR = 18 - 10 = 8$.

(b) $44 - 4P - Q = 0$

$$P = 11 - 0.25Q$$

$$TR = (11 - 0.25Q)Q = 11Q - 0.25Q^2$$

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = 11 - 0.5Q$$

當 $Q = 4$，$MR = 11 - 0.5(4) = 9$.

當 $Q = 10$，$MR = 11 - 0.5(10) = 6$.

4.5 就下列之消費函數，利用導數求其邊際消費傾向，$MPC = dC/dY$。

圖 (a) $C = C_0 + bY$

$$MPC = \frac{dC}{dY} = b$$

(b) $C = 1500 + 0.75Y$

$$MPC = \frac{dC}{dY} = 0.75$$

4.6 已知 $C = 1200 + 0.8Yd$，其中 $Yd = Y - T$ 與 $T = 100$，試利用導數求取MPC。

圖 當 $C = f(Yd)$，在求其導數前先將之轉換爲 $C = f(Y)$ 之形式，故

$$C = 1200 + 0.8(Y - 100) = 1120 + 0.8Y$$

$$MPC = \frac{dC}{dY} = 0.8$$

注意，當所得決定之模型出現總額稅時，並不影響MPC之值（或乘數）。

4.7 已知 $C = 2000 + 0.9Yd$，其中 $Yd = Y - T$ 與 $T = 300 + 0.2Y$，試利用導數求取MPC。

圖

$$C = 2000 + 0.9(Y - 300 - 0.2Y) = 2000 + 0.9Y - 270 - 0.18Y = 1730 + 0.72Y$$

$$MPC = \frac{dC}{dY} = 0.72$$

所得決定之模型出現比例稅時，並不影響其MPC之值及乘數。

4.8 就下列各平均函數求其邊際函數。

圖 (a) $AC = 1.5Q + 4 + \frac{46}{Q}$

在已知平均成本函數要求其邊際函數首須求出其總函數再取其導數，如

下列所示：

$$TC = AC(Q) = \left(1.5Q + 4 + \frac{46}{Q}\right)Q = 1.5Q^2 + 4Q + 46$$

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 3Q + 4$$

(*b*) $AC = \frac{160}{Q} + 5 - 3Q + 2Q^2$

$$TC = \left(\frac{160}{Q} + 5 - 3Q + 2Q^2\right)Q = 160 + 5Q - 3Q^2 + 2Q^3$$

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 5 - 6Q + 6Q^2$$

(*c*) $AC = \frac{18}{Q} - 0.1 - 0.5Q = 0$

$$AC = \frac{18}{Q} + 0.1 + 0.5Q$$

$$TC = \left(\frac{18}{Q} + 0.1 + 0.5Q\right)Q = 18 + 0.1Q + 0.5Q^2$$

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 0.1 + Q$$

單一變數的最適函數

4.9 依照下列所示之步驟極大化下列各個總收益與總利潤函數：(1)首先求其一階導數並令此導數爲 0 以求得臨界值，(2)再求二階導數，且計算在臨界點之數值，並討論此函數爲相對極小或相對極大，(3)計算此函數在臨界點之值。

(*a*) $TR = 32Q - Q^2$

(1) $\frac{dTR}{dQ} = 32 - 2Q = 0$

$Q = 16$

(2) $\frac{d^2TR}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}(32 - 2Q) = -2 < 0$

$Q = 16$ 爲一相對極大值

(3) $TR = 32Q - Q^2 = 32(16) - (16)^2 = 256$

(*b*) $\pi = -Q^2 + 11Q - 24$

(1) $\frac{d\pi}{dQ} = -2Q + 11 = 0$

$Q = 5.5$

(2) $\frac{d^2\pi}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}(-2Q + 11) = -2 < 0$

$Q = 5.5$ 爲相對極大值

(3) $\pi = -Q^2 + 11Q - 24$

$= -(5.5)^2 + 11(5.5) - 24 = 6.25$

(c) $\pi = -\frac{1}{3}Q^3 + 8Q^2 - 39Q - 50$

(1) $$\frac{d\pi}{dQ} = -Q^2 + 16Q - 39 = 0$$
$$(-Q + 13)(Q - 3) = 0$$
$$Q = 13 \qquad Q = 3$$

(2) $$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}(-Q^2 + 16Q - 39) = -2Q + 16$$

當 $Q = 13$ 時，$d^2\pi/dQ^2 = -2(13) + 16 = -10 < 0$。當 $Q = 3$ 時，$d^2\pi/dQ^2 = -2(3) + 16 = +10 > 0$。因此 $Q = 13$ 滿足極大化之二階條件；$Q = 3$ 被放棄，因爲它代表一相對極小值。

(3) $$\pi = -\frac{1}{3}Q^3 + 8Q^2 - 39Q - 50 = -\frac{1}{3}(13)^3 + 8(13)^2 - 39(13) - 50 = 62.67$$

(d) $\pi = -Q^3 + 48Q^2 - 180Q - 800$

(1) $\frac{d\pi}{dQ} = -3Q^2 + 96Q - 180 = 0$

$(-3Q + 6)(Q - 30) = 0$

$Q = 2 \qquad Q = 30$

(2) $\frac{d^2\pi}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}(-3Q^2 + 96Q - 180) = -6Q + 96$

當 $Q = 2$，$d^2\pi/dQ^2 = -6(2) + 96 = 84 > 0$

當 $Q = 30$，$d^2\pi/dQ^2 = -6(30) + 96 = -84 < 0$

$Q = 30$ 爲相對極大值

(3) $\pi = -Q^3 + 48Q^2 - 180Q - 800 = -27{,}000 + 43{,}200 - 5400 - 800 = 10{,}000$

4.10 利用問題 4.9 所詳細討論之方法，就下列成本函數求其最小值。

解 (a) $AC = 200 - 24Q + Q^2$

(1) $\frac{dAC}{dQ} = 2Q - 24 = 0$

$Q = 12$

(2) $\frac{d^2AC}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}(2Q - 24) = 2 > 0$

$Q = 12$ 爲相對極小值

(3) $AC = 200 - 24(12) + (12)^2 = 56$

(b) $TC = \frac{1}{3}Q^3 - 4.5Q^2 + 14Q + 22$

(1) $MC = Q^2 - 9Q + 14 = 0$

$(Q - 7)(Q - 2) = 0$

$Q = 7 \qquad Q = 2$

(2) $\frac{d^2TC}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}(Q^2 - 9Q + 14) = 2Q - 9$

當 $Q = 7$，$d^2TC/dQ^2 = 2(7) - 9 = 5 > 0$

當 $Q = 2$，$d^2TC/dQ^2 = 2(2) - 9 = -5 < 0$

$Q = 7$ 爲相對極小值

(3) $TC = \frac{1}{3}(7)^3 - 4.5(7)^2 + 14(7) + 22 = 13.83$

(c) $TC = \frac{1}{3}Q^3 - 8.5Q^2 + 60Q + 27$

(1) $MC = Q^2 - 17Q + 60 = 0$

$(Q-5)(Q-12) = 0$

$Q = 5 \qquad Q = 12$

(2) $\dfrac{d^2TC}{dQ^2} = \dfrac{d}{dQ}(Q^2 - 17Q + 60) = 2Q - 17$

At $Q = 5$, $d^2TC/dQ^2 = 2(5) - 17 = -7 < 0$.

At $Q = 12$, $d^2TC/dQ^2 = 2(12) - 17 = +7 > 0$.

$Q = 12$ 爲相對極小值

(3) $TC = \frac{1}{3}(12)^3 - 8.5(12)^2 + 60(12) + 27 = 99$

4.11 已知一廠商之需求函數爲 $Q - 90 + 2P = 0$ 且其平均成本函數爲

$$AC = Q^2 - 39.5Q + 120 + 125/Q$$

試求下列各情形時之產出水準，(*a*) 總收益最大時，(*b*) 邊際成本最小時，(*c*) 利潤最大時。

圖 (*a*) 因爲需求函數爲 $Q - 90 + 2P = 0$。故

$$P = 45 - 0.5Q$$

$$TR = PQ = (45 - 0.5Q)Q = 45Q - 0.5Q^2 \qquad (4.1)$$

爲極大化 TR。

$$\frac{dTR}{dQ} = 45 - Q = 0 \qquad Q = 45$$

以二階條件檢驗之，$d^2TR/dQ^2 = -1 < 0$。因此，在 $Q = 45$，TR 爲極大值。

(*b*) 由平均成本函數 $AC = Q^2 - 39.5Q + 120 + 125/Q$。

$$TC = AC(Q) = (Q^2 - 39.5Q + 120 + 125/Q)Q = Q^3 - 39.5Q^2 + 120Q + 125 \qquad (4.2)$$

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 3Q^2 - 79Q + 120$$

邊際成本最小時

$$\frac{dMC}{dQ} = 6Q - 79 = 0 \qquad Q = 13\tfrac{1}{6}$$

以二階條件檢驗之，$d^2MC/dQ^2 = 6 > 0$。因此，在 $Q = 13\frac{1}{6}$，MC 爲相對極小值。

(*c*) $$\pi = TR - TC$$

以 (4.1) 與 (4.2) 式代入

$$\pi = 45Q - 0.5Q^2 - Q^3 - 39.5Q^2 + 120Q + 125$$

$$= -Q^3 + 39Q^2 - 75Q - 125 \qquad (4.3)$$

極大化 π ，

$$\frac{d\pi}{dQ} = -3Q^2 + 78Q - 75 = 0$$

$$(-3Q + 3)(Q - 25) = 0$$

$$Q = 1 \qquad Q = 25$$

以二階條件檢驗之，

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q + 78$$

當 $Q = 1$ ，$d^2\pi/dQ^2 = -6(1) + 78 = 72 > 0$ 。

當 $Q = 25$ ，$d^2\pi/dQ^2 = -6(25) + 78 = -72 < 0$ 。

利潤在 $Q = 25$ 時最大，再由 (4.3) 式知，$Q = 25$ 時

$$\pi = -(25)^3 + 39(25)^2 - 75(25) - 125 = 6750$$

4.12 一廠商之需求函數爲 $22 - 0.5Q - P = 0$ 而其平均成本函數爲

$$AC = \tfrac{1}{3}Q^2 - 8.5Q + 50 + 90/Q.$$

試求 (*a*) 總收益，(*b*) 總利潤最大時之產出水準。

圖 (*a*) 由於需求函數爲，$22 - 0.5Q - P = 0$ ，故

$$P = 22 - 0.5Q$$

$$TR = (22 - 0.5Q)Q = 22Q - 0.5Q^2$$

TR 之最大點在

$$\frac{dTR}{dQ} = 22 - Q = 0 \qquad Q = 22$$

以二階條件檢驗之，$d^2TR/dQ^2 = -1 < 0$ 。因此，在 $Q = 22$ 。TR爲極大值。

(*b*) $\pi = TR - TC$ ，其中 $TR = 22Q - 0.5Q^2$ 。

$$TC = AC(Q) = \left(\frac{1}{3}Q^2 - 8.5Q + 50 + \frac{90}{Q}\right)Q = \frac{1}{3}Q^3 - 8.5Q^2 + 50Q + 90$$

因此，

$$\pi = 22Q - 0.5Q^2 - (\tfrac{1}{3}Q^3 - 8.5Q^2 + 50Q + 90) = -\tfrac{1}{3}Q^3 + 8Q^2 - 28Q - 90$$

極大化 π ，

$$\frac{d\pi}{dQ} = -Q^2 + 16Q - 28 = 0$$

$$(-Q + 14)(Q - 2) = 0$$

$$Q = 14 \qquad Q = 2$$

以二階條件檢驗之，

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}(-Q^2 + 16Q - 28) = -2Q + 16$$

當$Q = 14$，$d^2\pi/dQ^2 = -2(14) + 16 = -12 < 0$。當$Q = 2$，$d^2\pi/dQ^2 = -2(2) + 16 = 12 > 0$。$\pi$在$Q = 14$時爲極大，此時$\pi = -\frac{1}{3}(14)^3 + 8(14)^2 - 28(14) - 90 = 171.33$。

4.13 假設一生產者就其銷售之產品可對國內與國外市場索取不同價格——即差別取價（discriminating），兩個市場之需求函數分別爲

$$Q_1 = 21 - 0.1P_1 \tag{4.4}$$

$$Q_2 = 50 - 0.4P_2 \tag{4.5}$$

總成本$= 2000 + 10Q$其中$Q = Q_1 + Q_2$，則此生產者爲追求利潤最大化，它將索取多少價格，(*a*)對兩市場採差別取價時，(*b*)不採差別取價時，(*c*)比較其採差別取價時與不採差別取價時之利潤有何不同？

圖 (*a*)當生產者採差別取價時，爲求得利潤之極大，它將在每一個別市場以MC = MR之原則制訂價格，因此，$MC = MR_1 = MR_2$且$TC = 2000 + 10Q$時，

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 10$$

故無論產量爲何，MC將維持不變。在國內市場時

$$Q_1 = 21 - 0.1P_1$$

因此，

$$P = 210 \quad 10Q_1$$

$$TR_1 = (210 - 10Q_1)Q_1 = 210Q_1 - 10Q_1^2$$

且

$$MR_1 = \frac{dTR}{dQ_1} = 210 - 20Q$$

當$MR_1 = MC$，

$$210 - 20Q_1 = 10 \qquad Q_1 = 10$$

當$Q_1 = 10$，

$$P_1 = 210 - 10(10) = 110$$

國外市場，

$$Q_2 = 50 - 0.4P_2$$

因此，

$$P_2 = 125 - 2.5Q_2$$

$$TR_2 = (125 - 2.5Q_2)Q_2 = 125Q_2 - 2.5Q_2^2$$

故，

$$MR_2 = \frac{dTR_2}{dQ_2} = 125 - 5Q_2$$

當$MR_2 = MC$，

$$125 - 5Q = 10 \qquad Q_2 = 23$$

當$Q_2 = 23$，

$$P_2 = 125 - 2.5(23) = 67.5$$

採取差別取價之生產者將對國外市場（具較高需求彈性者）索取較低之價格，而對國內市場（需求彈性較低者）索取較高之價格（$P_1 = 110$）。

(*b*) 如果生產者不採取差別取價，即$P_1 = P_2$，則（4.4）與（4.5）式兩個需求函數可予整合（aggregated），即

$$Q = Q_1 + Q_2 = 21 - 0.1P + 50 - 0.4P = 71 - 0.5P$$

因此，

$$P = 142 - 2Q$$

$$TR = (142 - 2Q)Q = 142Q - 2Q^2$$

且

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = 142 - 4Q$$

當MR＝MC，

$$142 - 4Q = 10 \qquad Q = 33$$

當$Q = 33$，

$$P = 142 - 2(33) = 76$$

當生產者不採差別訂價時，價格將介於較高之國內價格與較低之國外價格之間，然而，需注意，其個別市場之銷售量（因而總銷售量）不變；$Q_1 = 10$，$Q_2 = 23$，$Q = 33$。

(*c*) 採差別訂價時，

$$TR = TR_1 + TR_2 = P_1Q_1 + P_2Q_2 = 110(10) + 67.5(23) = 2652.50$$

$TC = 2000 + 10Q$，其中$Q = Q_1 + Q_2$。

$$TC = 2000 + 10(10 + 23) = 2330$$

因此，

$$\pi = TR - TC = 2652.50 - 2330 = 322.50$$

不採差別訂價時，

$$TR = PQ = 76(33) = 2508$$

因爲成本並不會隨著是否採取差別訂價而變動，其TC均等於2330，故$\pi = 2508 - 2330 = 178$　因此，在採取差別訂價的情況將使生產者獲取較高之利潤（322.50）。

4.14 若一廠商面對兩條不同之需求函數，

$$Q_1 = 24 - 0.2P_1 \qquad Q_2 = 10 - 0.05P_2$$

且$TC = 35 + 40Q$，則此廠商在(*a*)採差別訂價與(*b*)不採差別訂價時，將各訂何種價格？

圖　(*a*) 在$Q_1 = 24 - 0.2P_1$時，

$$P = 120 - 5Q_1$$

$$TR_1 = (120 - Q_1)Q_1 = 120Q - 5Q_1$$

$$MR_1 = 120 - 10Q_1$$

此廠商將在 $MC = MR_1 = MR_2$ 時極大化其利潤

$$TC = 35 + 40Q$$
$$MC = 40$$

當 $MC = MR_1$ 時，

$$40 = 120 - 10Q_1 \qquad Q_1 = 8$$

當 $Q_1 = 8$ 時，

$$P_1 = 120 - 5(8) = 80$$

第二個市場之需求函數，$Q_2 = 10 - 0.05P_2$

$$P_2 = 200 - 20Q_2$$
$$TR_2 = (200 - 20Q_2)Q_2 = 200Q_2 - 20Q_2^2$$
$$MR_2 = 200 - 40Q_2$$

當 $MC = MR_2$ 時，

$$40 = 200 - 40Q_2 \qquad Q_2 = 4$$

當 $Q_2 = 4$ 時，

$$P_2 = 200 - 20(4) = 120$$

(*b*) 如果生產者不採差別取價，即 $P_1 = P_2 = P$，則兩需求函數可予結合如下：

$$Q = Q_1 + Q_2 = 24 - 0.2P + 10 - 0.05P = 34 - 0.25P$$

故，

$$P = 136 - 4Q$$
$$TR = (136 - 4Q)Q = 136Q - 4Q^2$$
$$MR = 136 - 8Q$$

在利潤極大之水準時，$MC = MR$。

$$40 = 136 - 8Q \qquad Q = 12$$

當 $Q = 12$，

$$P = 136 - 4(12) = 88$$

有關差別訂價較詳細之討論，請參見問題 12.19 - 12.22。

4.15 試證當一線性需求函數爲 $P = a - bQ$ 時其總收益之極大點爲 $Q = a/2b$。

圖

$$TR = PQ$$

就一典型之線性需求函數而言，

$$TR = (a - bQ)Q = aQ - bQ^2$$

TR 極大化之條件是，

(1) $\frac{d\text{TR}}{dQ} = \text{MR} = a - 2bQ = 0$ (2) $\frac{d^2\text{TR}}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}(a - 2bQ) = -2b < 0$

$$Q = \frac{a}{2b}$$

當 $Q = a/2b$ 時，此函數爲相對極大。上述乃提供對於典型線性需求函數如何求其收益最大點之簡捷的方法。

4.16 有關下列各線性需求函數，試以問題 4.15 之簡捷方法求取總收益之極大點，同時以正統之方法檢查 (*a*) 之結果是否正確。

圖 (*a*) $P = 24 - 3Q$

一線性需求函數在產量（Q）爲縱軸截距（a）除以 2 倍的斜率（$2b$）時，將可達到總收益極大點。

$$Q = \frac{a}{2b} = \frac{24}{2(3)} = 4$$

檢驗，

$$P = 24 - 3Q$$
$$\text{TR} = PQ = (24 - 3Q)Q = 24Q - 3Q^2$$
$$\frac{d\text{TR}}{dQ} = 24 - 6Q = 0 \qquad Q = 4$$

檢查其二階條件，$d^2\text{TR}/dQ^2 = -6 < 0$。

(*b*) $P = 50 - 2.5Q$

TR 之極大發生在，$Q = \frac{a}{2b} = \frac{50}{5} = 10$

(*c*) $P = 38 - 0.5Q$

TR 之極大發生在，$Q = \frac{a}{2b} = \frac{38}{1} = 38$

4.17 試證明利潤極大之產出水準下，其邊際成本（MC）必須等於邊際收益（MR）。

圖 $$\pi = \text{TR} - \text{TC}$$

爲極大化 π，$d\pi/dQ$ 必須等於 0，

$$\frac{d\pi}{dQ} = \frac{d\text{TR}}{dQ} - \frac{d\text{TC}}{dQ} = 0$$
$$\frac{d\text{TR}}{dQ} = \frac{d\text{TC}}{dQ}$$
$$\text{MR} = \text{MC} \qquad \text{Q.E.D.}$$

4.18 當 $\text{TR} = 45Q - 0.5Q^2$ 與 $\text{TC} = Q^3 - 39.5Q^2 + 120Q + 125$ 時，試以問題 4.17 所導出之 MR = MC 條件，求取利潤極大之臨界點。

$$\text{MR} = \frac{d\text{TR}}{dQ} = 45 - Q$$
$$\text{MC} = \frac{d\text{TC}}{dQ} = 3Q^2 - 79Q + 120$$

圖 利潤極大之產出水準，

$$45 - Q = 3Q^2 - 79Q + 120$$
$$-3Q^2 + 78Q - 75 = 0$$
$$(-3Q + 3)(Q - 25) = 0$$

其臨界點爲$Q = 1$，$Q = 25$。

然後再檢查其二階條件。最後以問題 4.11(c) 所討論者檢查此答案。

4.19 當$\text{TR} = 22Q - 2Q^2$與$\text{TC} = \frac{1}{3}Q^3 - 10Q^2 + 50Q + 45$時，試以$\text{MC} = \text{MR}$之條件求利潤極大之臨界值。

圖

$$\text{MR} = \frac{d\text{TR}}{dQ} = 22 - 4Q$$
$$\text{MC} = \frac{d\text{TC}}{dQ} = Q^2 - 20Q + 50$$

利潤極大時，

$$22 - 4Q = Q^2 - 20Q + 50$$
$$-Q^2 + 16Q - 28 = 0$$
$$(-Q + 14)(Q - 2) = 0$$
$$Q = 14 \qquad Q = 2$$

一般彈性

4.20 試求下列之需求函數在$P = 3$與$P = 5$時之價格彈性。

圖 (*a*) $Q = 75 - 5P$

$$\frac{dQ}{dP} = -5$$

當$P = 3$，$Q = 75 - 5(3) = 60$。將此值代入彈性之公式。

$$\epsilon = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$$

可得

$$\epsilon = -5\left(\frac{3}{60}\right) = -0.25$$

當$P = 5$，$Q = 75 - 5(5) = 50$。將此值代入彈性之公式，其中dQ/dP仍然固定於-5。

$$\epsilon = -5\left(\frac{5}{50}\right) = -0.5$$

(*b*) $Q = 42 - 6P$

$$\frac{dQ}{dP} = -6$$

當 $P = 3$, $Q = 42 - 6(3) = 24$.

$$\epsilon = -6\left(\tfrac{3}{24}\right) = -0.75$$

當 $P = 5$, $Q = 42 - 6(5) = 12$.

$$\epsilon = -6\left(\tfrac{5}{12}\right) = -2.5$$

(c) $8Q + 2P = 56$

因爲 $Q = 7 - 0.25P$

$$\frac{dQ}{dP} = -0.25$$

當 $P = 3$, $Q = 7 - 0.25(3) = 6.25$.

$$\epsilon = -0.25\left(\frac{3}{6.25}\right) = -0.12$$

當 $P = 5$ $Q = 7 - 0.25(5) = 5.75$

$$\epsilon = -0.25\left(\frac{5}{5.75}\right) = -\tfrac{5}{23} \cong -0.22$$

4.21 試求下列各供給函數在 $P = 3$ 與 $P = 5$ 之價格彈性。

圖 (a) $Q = -2 + 0.8P$

$$\frac{dQ}{dP} = 0.8$$

當 $P = 3$, $Q = -2 + 0.8(3) = 0.4$.

$$\epsilon = 0.8\left(\frac{3}{0.4}\right) = 6$$

當 $P = 5$, $Q = -2 + 0.8(5) = 2$.

$$\epsilon = 0.8\left(\tfrac{5}{2}\right) = 2$$

(b) $Q - 1.5P + 3 = 0$

$$Q = -3 + 1.5P$$

$$\frac{dQ}{dP} = 1.5$$

當 $P = 3$, $Q = -3 + 1.5(3) = 1.5$.

$$\epsilon = 1.5\left(\frac{3}{1.5}\right) = 3$$

當 $P = 5$, $Q = -3 + 1.5(5) = 4.5$

$$\epsilon = 1.5\left(\frac{5}{4.5}\right) = 1\tfrac{2}{3}$$

4.22 利用邊際與平均函數求下列諸函數之彈性，並討論 P 等於多少時其彈性之絕對值等於或大於 1 ：$|\epsilon| \geq 1$ 。

圖 (a) $Q = 120 - 4P$

正如 4.3 節所討論者，彈性之公式可寫爲

$$\epsilon = \frac{dQ/dP}{Q/P} = \frac{\text{邊際函數}}{\text{平均函數}}$$

或

$$\epsilon = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = \text{邊際函數}\left(\frac{1}{\text{平均函數}}\right)$$

當 $Q = 120 - 4P$ ，

$$\frac{dQ}{dP} = -4 = \text{邊際函數}$$

或
$$\frac{Q}{P} = \frac{120 - 4P}{P} = \text{平均函數}$$

代入上述第二個公式，並利用平均函數之倒數

$$\epsilon = -4\left(\frac{P}{120 - 4P}\right) = \frac{-P}{30 - P}$$

當 $|\epsilon| \geq 1$ 時，即

$$P \geq 30 - P$$
$$2P \geq 30$$
$$P \geq 15$$

(*b*) $Q = 84 - 7P$

$$\frac{dQ}{dP} = -7$$
$$\frac{Q}{P} = \frac{84 - 7P}{P}$$

代入公式可得

$$\epsilon = -7\left(\frac{P}{84 - 7P}\right) = \frac{-P}{12 - P}$$

當 $|\epsilon| \geq 1$ 時，即

$$P \geq 12 - P \geq 6$$
$$P \geq 6$$

(*c*) $Q = 80 - 6P$

$$\frac{dQ}{dP} = -6$$
$$\frac{Q}{P} = \frac{80 - 6P}{P}$$

代入公式可得，

$$\epsilon = -6\left(\frac{P}{80 - 6P}\right) = \frac{-3P}{40 - 3P}$$

當 $|\epsilon| \geq 1$ 時，即

$$3P \geq 40 - 3P$$
$$P \geq 6\tfrac{2}{3}$$

4.23 需求函數 $Q_1 = 50 - P_1$ 與另一線性函數 Q_2 相交於 $P = 10$ 之點，且在該點時 Q_2 之需求彈性爲 Q_1 需求彈性的 6 倍，試求需求函數 Q_2。

解 當 $P = 10$，$Q_1 = 50 - 10 = 40$。其導數

$$\frac{d}{dP}(50 - P_1) = -1$$

代入彈性之公式，即

$$\epsilon_1 = -1\left(\frac{10}{40}\right) = -0.25$$

因爲$P = 10$時Q_2之彈性爲Q_1之6倍，因此

$$\epsilon_2 = 6(-0.25) = -1.5$$

又因爲兩函數交於$P = 10$，$Q = 40$，故經由將已知各值代入彈性公式可求得Q_2之斜率，如下所示：

$$-1.5 = \frac{dQ}{dP}\left(\frac{10}{40}\right)$$

$$\frac{dQ}{dP} = -6$$

故

$$Q_2 = a - 6P_2$$

但當$P = 10$時，$Q_2 = 40$，

$$40 = a - 6(10)$$

$$a = 100$$

所以

$$Q_2 = 100 - 6P_2$$

4.24 需求函數$Q_1 = 80 - 4P_1$與Q_2相交於$P = 5$之點，如果在該點Q_2之需求彈性爲Q_1需求彈性之$\frac{1}{4}$，且Q_2亦爲線性函數，試求Q_2。

圖 在$P = 5$，$Q_1 = 80 - 4(5) = 60$

$$\frac{dQ_1}{dP} = -4$$

因此，

$$\epsilon_1 = -4\left(\frac{5}{60}\right) = -\frac{1}{3}$$

但是，

$$\epsilon_2 = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{12}$$

又因爲$P = 5$與$Q = 60$時$\epsilon_2 = -\frac{1}{12}$，將這些值代入彈性公式，即

$$-\frac{1}{12} = \frac{dQ_2}{dP}\left(\frac{5}{60}\right)$$

$$\frac{dQ_2}{dP} = -1$$

因此，

$$Q_2 = a - 1P_2$$

以$Q = 60$與$P = 5$代入，可得

$$60 = a - 1(5)$$

$$a = 65$$

因此，

$$Q_2 = 65 - P_2$$

需求彈性

4.25 如果根據典型的經濟學教科書之寫法$P = f(Q)$，你如何修正4.3節所示之彈性公式？

圖 彈性一般定義如，

$$\epsilon = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$$

當一函數爲$P = f(Q)$——即經濟學上典型之形式，其導數將爲dP/dQ，此即爲彈性公式裡導數之倒數：

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{1}{dP/dQ}$$

爲列示以原始函數$P = f(Q)$之表現方式的彈性公式，我們只需利用倒數來表示如下：

$$\epsilon = \frac{1}{dP/dQ}\frac{P}{Q}$$

4.26 利用圖 4-5，

(*a*) 在傳統經濟學上之圖形，即$P = f(Q)$，試證一線性需求函數之彈性等於曲線下半段之長度除以曲線上半段之長度。

(*b*) 利用絕對值，比較 (*a*) 與$Q = f(P)$之情況有何差異？

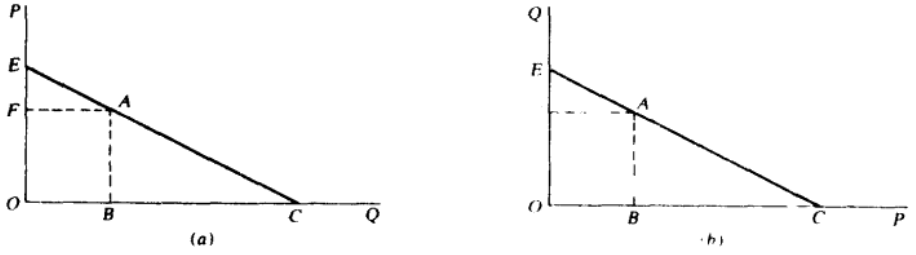


圖 4-5

圖 (*a*) 從圖 4-5，我們可以證明A點之價格彈性爲BC/OB，如下

$$\epsilon_d = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$$

當$P = f(Q)$則此函數之導數（因而其斜率）的測量乃由dP/dQ而得，

$$\epsilon_d = \frac{1}{dP/dQ}\frac{P}{Q}$$

又因一線性函數，其斜率乃爲一固定常數，因此

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{\Delta P}{\Delta Q} = \frac{AB}{BC}$$

在A點，$P=AB$，$Q=OB$。將這些值代入上述之彈性公式，即

$$\epsilon_d=\frac{1}{AB/BC}\frac{AB}{OB}=\frac{BC}{AB}\frac{AB}{OB}=\frac{BC}{OB} \tag{4.6}$$

我們同時可證明$BC/OB=AC/EA$如下：因爲ABC與EFA爲相似直角三角形，且因爲$FA=OB$再由相似直角三角形之特性得知

$$\frac{AC}{BC}=\frac{EA}{OB}$$

等式兩邊各乘以BC/EA，

$$\frac{AC}{EA}=\frac{BC}{OB}=\epsilon_d \qquad \text{Q.E.D.}$$

故當$P=f(Q)$時，需求彈性$|\epsilon_d|$等於需求曲線下半段之長度（AC）除以上半段之長度（EA）。

(*b*) 如果純粹就數學之觀點表現之的話（但在經濟學上卻不常出現），則我們使用$Q=f(P)$時，其座標軸代表之變數剛好相反，並且其彈性等於需求曲線上半段之長度除以下半段之長度，因此，就圖 4-5 (*b*)而言，

$$\epsilon_d=\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}=\frac{AB}{BC}\frac{OB}{AB}=\frac{OB}{BC} \tag{4.7}$$

利用相似直角三角形之特性，並且注意$FA=OB$，則

$$\frac{EA}{OB}=\frac{AC}{BC}$$

等式兩邊各乘以OB/AC，

$$\frac{EA}{AC}=\frac{OB}{BC}=\epsilon_d$$

故當$Q=f(P)$時，其需求彈性等於需求曲線上半段之長度（EA）除以下半段之長度（AC），於本節裡，我們將採用傳統經濟學之表現方式，即$P=f(Q)$。

4.27 試證對於所有負斜率之需求曲線而言，其需求的價格彈性爲負（$\epsilon_d<0$）。

圖 就負斜率之需求曲線而言，因爲$dQ/dP=1/(dP/dQ)<0$，而P與Q必爲正數，故其價格彈性必爲負值，然而在經濟學裡，價格彈性經常是取其絕對值。

4.28 就一線性需求函數$P=f(Q)$，試證 (*a*) 在需求曲線之中點，其$|\epsilon_d|=1$，(*b*) 在需求曲線中點以上諸點其$|\epsilon_d|>1$，(*c*) 在需求曲線中點以下諸點其$|\epsilon_d|<1$。

以圖 4-6 證明如下（其中 A 爲需求曲線之中點）。

圖 (*a*) 由問題 4.26(*a*) 知一線性需求函數之彈性爲此需求曲線下半段之長度除以上半段之長度，因此，在 A 點時

$$\epsilon_d = \frac{AC}{EA}$$

因爲 $AC = EA$ 故在 A 點時 $\epsilon_d = 1$。

(*b*) 因爲在需求曲線上 A 點左上方各點時，上式之 $EA < AC$ 故其 $\epsilon_d > 1$。

(*c*) 因爲在需求曲線上 A 點之右下方各點表示 $EA > AC$，故其 $\epsilon_d < 1$。

如果函數形式爲 $Q = f(P)$ 則其座標軸顚倒過來［如問題 4.26(*b*)所示］，則上述曲線之上半段部分的 $|\epsilon_d| < 1$，而下半段部分之 $|\epsilon_d| > 1$。得證。

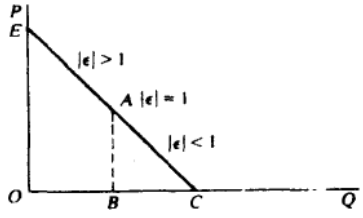


圖 4-6

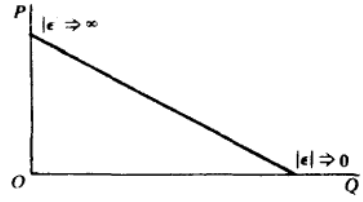


圖 4-7

4.29 試以其它方法證明一線性需求曲線之彈性絕對值的範圍由 0 至無窮大（不像此函數之斜率爲固定常數），並以 $P = f(Q)$ 之圖形指出其範圍。

$$\epsilon = \frac{1}{dP/dQ}\frac{P}{Q}$$

圖 式中 $1/(dP/dQ)$ 爲此線性函數斜率之倒數，其爲固定不變之常數（參見問題 4.25），然而，ϵ 將隨曲線上不同之位置而有所變動，因爲當我們沿著此曲線移動時，P/Q 之比例亦將改變。

就圖 4-7 而言，當我們沿著此曲線向左移動時，P 愈來愈大而 Q 愈來愈小，故 P/Q 之比例將隨接近縱軸時趨近於無窮大，反之，向右下方移動時，P 愈來愈小而 Q 愈來愈大，故 P/Q 之比例在橫軸點時等於 0。

如果函數形式爲 $Q = f(P)$，而座標軸將顚倒過來，則在縱軸時 ϵ 趨近於 0，而在橫軸時 ϵ 趨近於無窮大，得證。

4.30 (*a*) 當 $P = 2$ 與 $P = 3$ 時分別求下列逆函數之彈性 (1) $P = 4 - 0.2Q$，(2) $Q = 20 - 5P$，(*b*) 試繪出這些函數並指出它們之彈性以證明，兩函數之需求的價格彈性相同，所不同的是此二函數曲線之相對位置。

(*a*) (1) $P = 4 - 0.2Q$

$$\frac{dP}{dQ} = -0.2$$

(2) $Q = 20 - 5P$

$$\frac{dQ}{dP} = -5$$

當 $P=2$, $2=4-0.2Q$

$Q=10$

故，

$$\epsilon=\frac{1}{dP/dQ}\frac{P}{Q}=\frac{1}{-0.2}\left(\frac{2}{10}\right)=-1$$

當 $P=3$, $3=4-0.2Q$

$Q=5$

$$\epsilon=\frac{1}{-0.2}\left(\frac{3}{5}\right)=-3$$

當 $P=2$, $Q=20-5(2)=10$.

故，

$$\epsilon=\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}=-5\left(\frac{2}{10}\right)=-1$$

當 $P=3$, $Q=20-5(3)=5$

$$\epsilon=-5\left(\frac{3}{5}\right)=-3$$

(*b*) 兩函數之圖形繪示於圖 4-8，在已知的價格水準下，其彈性均相同，並且在兩曲線之中點其 $|\epsilon|$ 必定等於 1。此外由圖 4-8 觀察得知，當 $P=f(Q)$ 時，曲線上半段部分之 $|\epsilon|>1$，而當 $Q=f(P)$ 時下半段部分之 $|\epsilon|>1$。

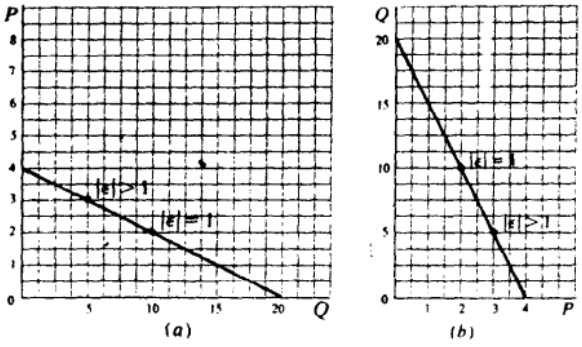


圖 4-8

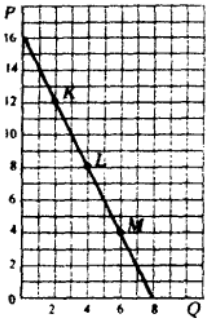


圖 4-9

4.31 已知需求函數 $P=16-2Q$ 如圖 4-9 所示，(*a*) 試以問題 4.26(*a*) 所示方法求 K, L, M 點之價格彈性，(*b*) 試以彈性之公式檢查 K 點之彈性是否與你的答案相同。

圖 由 (4.6) 式與圖 4-5 可知，在一特定點之需求的價格彈性等於該點至需求曲線與橫軸交點之水平距離 (BC) 除以該點至原點之水平距離 (OB)。因此，

(*a*) K 點，$\quad |\epsilon|=\dfrac{8-2}{2-0}=\dfrac{6}{2}=3$

L 點，$\quad |\epsilon|=\dfrac{8-4}{4-0}=\dfrac{4}{4}=1$

M 點，$\quad |\epsilon|=\dfrac{8-6}{6-0}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

(*b*) 檢查 K 點的彈性，

$$\epsilon=\frac{1}{dP/dQ}\frac{P}{Q}$$

當函數爲 $P=16-2Q$，

$$\frac{dP}{dQ} = -2$$

在K點，$P = 12$，$Q = 2$，故

$$\epsilon = \frac{1}{-2}\left(\frac{12}{2}\right) = -3$$

$$|\epsilon| = 3$$

4.32 已知上一題之需求函數的逆函數$Q = 8 - 0.5P$之圖形如圖 4-10 所示，(a)試求K，L，M各點之價格彈性，(b)試以彈性之公式檢查M點之彈性是否與你所求之答案相同。

解 由（4.7）式與問題 4.26 中圖 4-5 (b)知，在一特定點之需求的價格彈性等於該點至原點之水平距離（OB）除以該點至需求曲線與橫軸之交點的水平距離。因此，

(a) K點，$|\epsilon| = \dfrac{4-0}{16-4} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

L點，$|\epsilon| = \dfrac{8-0}{16-8} = \dfrac{8}{8} = 1$

M點，$|\epsilon| = \dfrac{12-0}{16-12} = \dfrac{12}{4} = 3$

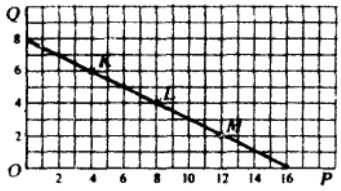


圖 4-10

(b) 檢查M點，

當需求函數爲$Q = 8 - 0.5P$，

$$\frac{dQ}{dP} = -0.5$$

在M點時，$P = 12$，$Q = 2$

$$\epsilon = -0.5\left(\frac{12}{2}\right) = -3$$

$$|\epsilon| = 3$$

4.33 已知線性需求函數如圖 4-11(a)所示者，我們是否可以如一般經濟學教科書一樣很準確的說(1)爲相對高彈性之需求曲線，而(2)爲相對低彈性之需求曲線。

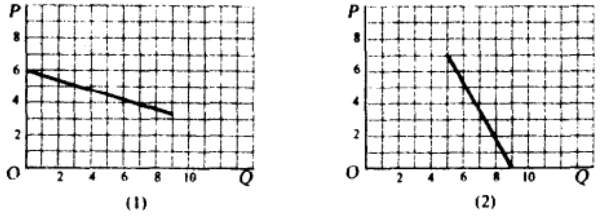


圖 4-11(a)

圖　此答案需作某些限制，我們無法很準確地判斷任一線性函數是否具相對較高或較低之彈性，因爲，一線性需求函數在沿著曲線之各不同點其彈性將有所差異，而每一曲線之彈性範圍均由 0 至無限大，參見問題 4.28 與 4.29 。

但是，我們可以很準確地指出一線性需求函數在那一部分爲高彈性，而那一部分則爲低彈性，如圖 4-11 (*b*)所示［此圖乃 4-11 (*a*)之延伸］，上述(1)乃一線性函數之上半段而其 $|\epsilon| > 1$ ；而(2)則爲一線性函數之下半段其 $|\epsilon| < 1$ 。

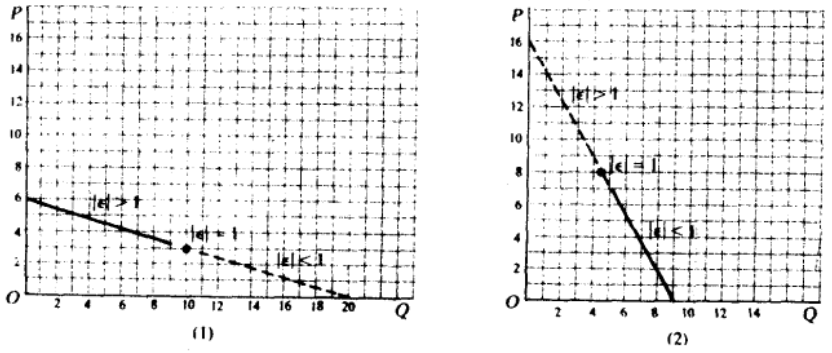


圖 4-11 (*b*)

4.34 已知圖 4-12 ，試證就一曲線需求函數 $P = f(Q)$，其在 A 點之價格彈性等於切線下半段之長度除以上半段之長度（ A 點爲此曲線與 $\overline{EC}$ 相切之點 ）。

圖　由圖 4-12 ，我們可證得 A 點之彈性 $= -BC/OB$ 如下：

$$\epsilon_d = \frac{1}{dP/dQ}\frac{P}{Q}$$

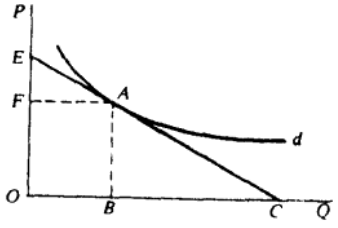


圖 4-12

但此曲線函數在 A 點之斜率等於 dP/dQ 二切線之斜率：$-AB/BC$ 。因此，

$$\frac{dP}{dQ} = -\frac{AB}{BC}$$

在 A 點時，$P = AB$ ，$Q = OB$ ，故

$$\epsilon_d = \frac{1}{-AB/BC}\frac{AB}{OB} = -\frac{BC}{AB}\frac{AB}{OB} = -\frac{BC}{OB} \tag{4.8}$$

同時由相似直角三角形之特性我們亦可證明 $-BC/OB = -AC/EA$，

$$\frac{AC}{BC} = \frac{EA}{OB}$$

兩邊各乘以 $-BC/EA$，

$$-\frac{AC}{EA} = -\frac{BC}{OB} = \epsilon_d \quad \text{得證}$$

[關於 $Q = f(P)$ 之形式，參見例 7 。]

4.35 試求圖 4-13 中曲線需求函數在 K，L，M 各點之需求的價格彈性。

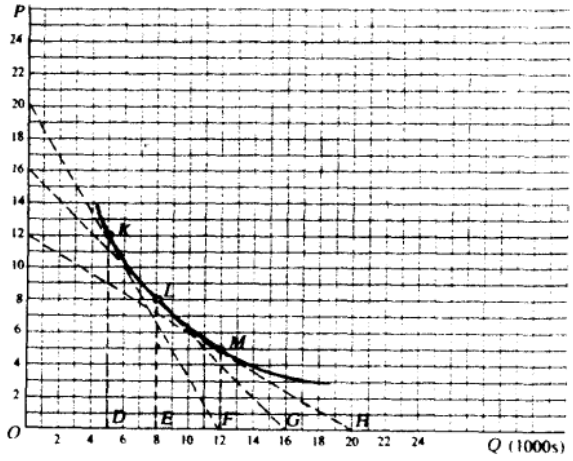


圖 4-13

圖 通過一已知點畫此曲線之切線，並且由（4.8）式知，在此特定點之價格彈性 $|\epsilon_d|$ 等於此點至切線與橫軸相交之點的水平距離（BC）除以此點至原點之水平距離（OB）。因此，

K 點，
$$\epsilon = -\frac{DF}{OD} = -\frac{12{,}000 - 5000}{5000 - 0} = -\frac{7000}{5000} = -1.4$$

L 點，
$$\epsilon = -\frac{EG}{OE} = -\frac{16{,}000 - 8000}{8000 - 0} = -\frac{8000}{8000} = -1$$

M 點，
$$\epsilon = -\frac{FH}{OF} = -\frac{20{,}000 - 12{,}000}{12{,}000 - 0} = -\frac{8000}{12{,}000} = -0.67$$

4.36 以邊際與平均的概念試求下列指定之價格彈性 (*a*) 圖 4-14 (*a*) 之 G 點，(*b*) 於圖 4-14 (*b*) 中那一點之 $|\epsilon| = 1$。

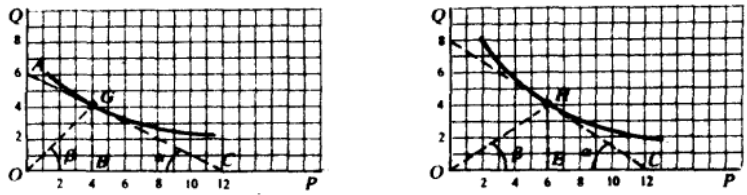


圖 4-14

圖 (a) 爲求得邊際之概念 dQ/dP，我們於通過 G 點畫曲線之切線，則曲線的斜率（即 $\tan\alpha$）等於邊際函數，另一方面爲求得平均函數 Q/P，我們畫 G 與原點之連線，則 OG 之斜率（即 $\tan\beta$）等於平均函數，因而

$$\epsilon = \frac{\text{邊際函數}}{\text{平均函數}} = \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{-GB/BC}{GB/OB} = \frac{-OB}{BC} = \frac{-(4-0)}{12-4} = -\frac{1}{2}$$

(b) 在圖 4-14 (b) 中爲求得 $|\epsilon| = 1$ 之點，我們只要求得邊際函數之斜率等於平均函數之斜率即可，亦即在 $HE/EC = HE/OE$ 或 $OE = EC$ 之點，或者 $\tan\alpha = \tan\beta$ 之點。

供給彈性

4.37 試用圖形證明一線性供給函數 $P = f(Q)$ 在一已知點之價格彈性等於該點至供給曲線與橫軸之相交點的水平距離除以該點至原點之水平距離。

圖 於圖 4-15 中，我們可證得在 C 點之價格彈性爲 $C = AB/OB$。

$$\epsilon_s = \frac{1}{dP/dQ}\frac{P}{Q}$$

因爲一線性函數之斜率必爲固定不變之常數

$$C \text{ 點之斜率} = \frac{\Delta P}{\Delta Q} = \frac{dP}{dQ} = \frac{CB}{AB}$$

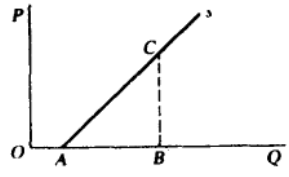


圖 4-15

在此，$P = CB$ 且 $Q = OB$。代入彈性之公式

$$\epsilon_s = \frac{1}{CB/AB}\frac{CB}{OB} = \frac{AB}{CB}\frac{CB}{OB} = \frac{AB}{OB}$$ 得證

[關於 $Q = f(P)$ 之函數形式的供給價格彈性，參見例 4.7。]

4.38 試證所有正斜率供給曲線其價格彈性爲正（$\epsilon_s > 0$）。

圖 因爲所有正斜率供給曲線之 $dQ/dP = 1/(dP/dQ) > 0$ 且 P 與 Q 必爲正值，故其彈性必爲正值，即 $\epsilon_s > 0$。

4.39 已知圖 4-16，試證對於所有正斜率之線性供給曲線，下列各敍述均成立。

(*a*) 如果供給曲線與橫軸相交（亦即其縱軸截距 $a < 0$），則 $\epsilon_s < 1$。

(*b*) 如果供給曲線與縱軸相交（即 $a > 0$）則 $\epsilon_s > 1$。

(*c*) 如果供給曲線通過原點（即 $a = 0$）則 $\epsilon_s = 1$。

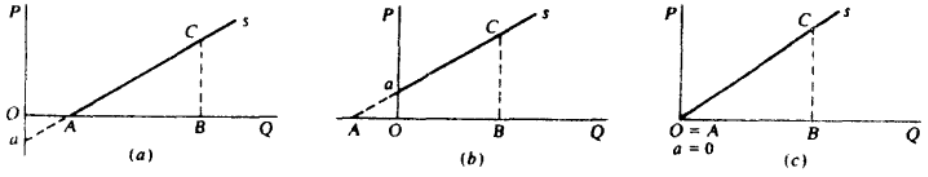


圖 4-16

圖 (*a*) 於圖 4-16 (*a*)，

$$\epsilon = \frac{AB}{OB}$$

因爲 $AB < OB$，$\epsilon < 1$。

當 $a < 0$，供給曲線與橫軸相交，則 AB 將小於 OB，則 $\epsilon_s < 1$。

(*b*) 於圖 4-16 (*b*) 中將曲線延長至 A 點（不可能達到之點，因爲 $Q < 0$ 無意義）以便測量其彈性。

$$\epsilon = \frac{AB}{OB} > 1$$

當 $a > 0$，供給曲線與縱軸相交，AB 將大於 OB，故 $\epsilon_s > 1$。

(*c*) 於圖 4-16 (*c*) 中，

$$\epsilon = \frac{AB}{OB} = 1$$

當 $a = 0$，供給曲線乃由原點開始，故 $AB = OB$，且 $\epsilon_s = 1$。

4.40 觀察下列供給函數：(*a*) $P = 3Q$，(*b*) $P = -2 + 5Q$，(*c*) $P = 3 + 4Q$ 試判斷其供給彈性 $\epsilon_s \gtrless 1$。

圖 (*a*) 其縱軸截距 $a = 0$，故此函數以原點爲起點則 $\epsilon_s = 1$。

(*b*) 此函數與橫軸相交（因 $a < 0$）故 $\epsilon_s < 1$。

(*c*) 因爲 $a > 0$，故此函數與縱軸相交，則 $\epsilon_s > 1$。

4.41 試以圖形證明一曲線供給函數的價格彈性可以下列方式測知：在一已知特定點

畫此曲線之切線，然後應用問題 4.37 有關之切線法則。

證 於圖 4-17 中我們可證得 C 點之供給彈性為 AB/OB 如下：

$$\epsilon_s = \frac{1}{dP/dQ}\frac{P}{Q}$$

但此供給曲線在 C 點的斜率 $= dP/dQ$ 亦等於此切線在 C 點之斜率 $= CB/AB$。因此，

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{CB}{AB}$$

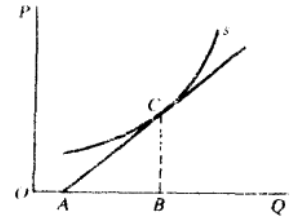


圖 4-17

因為 $P = CB$ 且 $Q = OB$，故

$$\epsilon_s = \frac{1}{CB/AB}\frac{CB}{OB} = \frac{AB}{CB}\frac{CB}{OB} = \frac{AB}{OB} \qquad \text{得證}$$

4.42 已知供給曲線如圖 4-18 所示，試求 A，B 與 C 點之供給彈性。

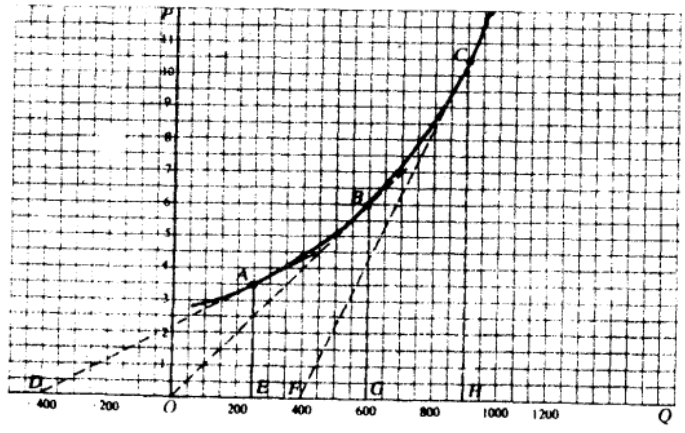


圖 4-18

A 點，
$$\epsilon_s = \frac{DE}{OE} = \frac{250-(-400)}{250-0} = \frac{650}{250} = 2.6$$

B 點，
$$\epsilon_s = \frac{OG}{OG} = \frac{600-0}{600-0} = \frac{600}{600} = 1$$

C 點，
$$\epsilon_s = \frac{FH}{OH} = \frac{900-400}{900-0} = \frac{500}{900} = 0.56$$

4.43 已知圖 4-19 之供給曲線，試利用邊際與平均函數求 (*a*) B 點之 $\epsilon_s \gtrless 1$，(*b*) B 點之供給彈性爲何？[注意，$Q = f(P)$]。

圖 (*a*)
$$\epsilon_s = \frac{dQ/dP}{Q/P} = \frac{\text{邊際函數}}{\text{平均函數}}$$

邊際函數即爲供給曲線上B點之切線斜率，或 $\tan\alpha$，而平均函數則爲原點與B點連線之斜率或 $\tan\beta$，因爲在B點，$\alpha > \beta$ 故邊際函數大於平均函數則 $\epsilon_s > 1$。

(*b*)
$$\epsilon_s = \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{BC/AC}{BC/OC} = \frac{OC}{AC}$$
$$= \frac{8-0}{4-0} = 2$$

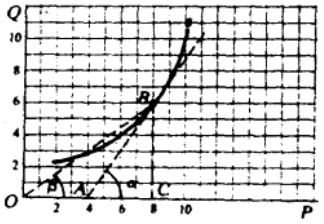


圖 4-19

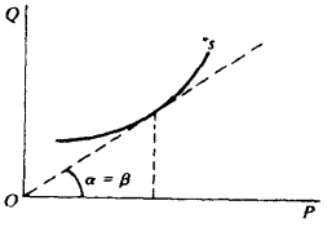


圖 4-20

4.44 假設一曲線供給函數 $Q = f(P)$，你如何求線上單一彈性之點？

圖 爲求得一曲線供給函數單一彈性之點，我們可從原點畫一條與此供給曲線相切之直線，如此，則此直線同時代表邊際與平均函數，且此時其邊際函數與平均函數相等，即 $\alpha = \beta$ 故其 $\epsilon_s = 1$，參見圖 4-20。

第五章
多變數函數之微分

5·1 偏導數

第四章所研究的導數侷限於單一自變數的函數，如 $y=f(x)$，然而事實上許多的經濟活動所指的函數，其變數均超過一個以上，如 $z=f(x,y)$。在一個多變數函數裡欲測量其中一個自變數的變動，如何影響依變數之變化時，我們必須討論**偏導數**（partial derivative），偏導數乃測量依變數（z）對於其中一個自變數（x）之瞬間變動率［並假設其它自變數（y）固定不變］，在比較靜態（comparative statics）分析上，偏導數之應用更是重要，所謂比靜態分析乃指其它變數固定不變，一自發性變數發生變化時，對均衡位置改變的效果。

在一多變數函數 $z=f(x,y)$ 中 z 對 x 之偏導數可寫爲 $\partial z/\partial x$，z_x，f_x 或 f_1，偏微分所根據之法則均與一般的微分法則相同，只不過是偏微分的處理應把其它自變數視爲固定之常數。

例題5.1

$z=5x^3+3xy+4y^2$ 之偏導數的求法如下：

(1) 當對於 x 微分時，我們只需對含有 x 之項微分即可，而忽略 $4y^2$ 只將其視爲常數罷，而且關於 $3xy$ 一項，乃視 y 爲一乘積常數，因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z_x=15x^2+3y$$

(2) 當對於 y 微分時，我們只需對含有 y 之項微分即可，而忽略 $5x^3$ 只將其視爲常數；而且就 $3xy$ 一項而言，x 可視爲一乘積常數，因爲

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z_y=3x+8y$$

例題5.2

試求 $z=3x^2y^3$ 之偏導：

(1) 當對於 x 微分時，我們將 y^3 視爲一乘積常數，並微分如下：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 6xy^3$$

(2) 當對於 y 微分時，我們將 x^2 視爲一乘積常數：

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = 9x^2y^2$$

例題5.3

偏微分所根據的法則與一般微分法則同，參見 3.4 節。

(1) 已知：$z = (3x + 5)(2x + 6y)$，由乘積法則知，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = (3x + 5)(2) + (2x + 6y)(3) = 12x + 10 + 18y$$

且

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = (3x + 5)(6) + (2x + 6y)(0) = 18x + 30$$

(2) 已知：$z = (6x + 7y)/(5x + 3y)$，由商數法則知，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = \frac{(5x + 3y)(6) - (6x + 7y)(5)}{(5x + 3y)^2} = \frac{30x + 18y - 30x - 35y}{(5x + 3y)^2} = \frac{-17y}{(5x + 3y)^2}$$

且

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = \frac{(5x + 3y)(7) - (6x + 7y)(3)}{(5x + 3y)^2} = \frac{35x + 21y - 18x - 21y}{(5x + 3y)^2} = \frac{17x}{(5x + 3y)^2}$$

5.2 二階偏導數

二階偏導數 f_{xx} 是指函數 f 對 x 連續取兩次微分而令其它自變數均維持固定不變，因此 f_{xx} 乃指一階偏導數 f_x 對 x 之變動率，而 y 維持固定不變，其它用以代表二階偏導數之符號尚包括 z_{xx}，$\partial^2 z/\partial x^2$ 與 $\dfrac{\partial\,(\partial z)}{\partial x\,(\partial x)}$，而 f_{yy} 之情況亦同。

一階偏導數 f_x（或 f_y）亦可對 y（或 x）取微分，此稱爲**交叉（或混合）偏導數**（cross or mixed partial derivative）f_{xy}（或 f_{yx}），交叉偏導數乃測量一階偏導數對另一個變數之瞬間變動率，簡言之，f_{xy} 是指原始函數 $z = f(x, y)$ 首先對 x 微分然後以此結果再對 y 偏微分，其它用以代表交叉偏導數 f_{xy} 之符號尚包括 z_{xy}，$\dfrac{\partial\,(\partial z)}{\partial y\,(\partial x)}$ 與 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$，就一已知函數而言，其不同方向之偏導數相等（即 $f_{xy} = f_{yx}$），其條件是交叉偏導數均爲連續者，此即有名的**楊氏定理**(Young's Theorem)。

例題5.4

$z = 7x^3 + 9xy + 2y^6$ 之一階與二階偏導數（包括交叉偏導數）如下：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 21x^2 + 9y \qquad \text{而，} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = z_y = 9x + 10y^4$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = 42x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} = 40y^3$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{(\partial z)}{(\partial x)} = \frac{\partial}{\partial y}(21x^2 + 9y) = z_{xy} = 9 \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{(\partial z)}{(\partial y)} = \frac{\partial}{\partial x}(9x + 10y^4) = z_{yx} = 9$$

例題5.5

一函數如 $z = 3xy^2$ 其一階與二階偏導數（包括交叉偏導數）如下：注意：$3xy^2 \neq (3xy)^2$ 。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 3y^2 \qquad \text{而，} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = z_y = 6xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = 0 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} = 6x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{(\partial z)}{(\partial x)} = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2) = z_{xy} = 6y \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{(\partial z)}{(\partial y)} = \frac{\partial}{\partial x}(6xy) = z_{yx} = 6y$$

5.3 微 分

於3.2節中，我們知道導數 dy/dx 是指 $\Delta y / \Delta x$ 當 $\Delta x \to 0$ 時之極限值，同時，dy/dx 亦可視爲 y 之**微分**（differential）dy 與 x 之微分 dx 之比例，y 之微分乃測量當 x 作極小量之變動時引起 y 之變動量，因而，如果 $y = 2x^2 + 5x + 4$，其導數爲

$$\frac{dy}{dx} = 4x + 5$$

等式兩邊各乘以 dx，則 y 之微分爲

$$dy = (4x + 5)\,dx$$

例題5.6

(1) 如果 $y = 4x^3 + 5x^2 - 7$，則 $dy/dx = 12x^2 + 10x$ 而其微分爲

$$dy = (12x^2 + 10x)\,dx$$

(2) 如果 $y = (2x - 5)^2$，則 $dy/dx = 2(2x - 5)(2) = 8x - 20$ 而其微分爲

$$dy = (8x - 20)\,dx$$

5.4 全微分與偏微分

對一含有兩個或多個變數之函數，其**全微分**（total differential）是指測量當

每一個自變數均作極微量之變動時，其依變數之變動量，因而，如果 $z = f(x, y)$，則全微分 dz 以數學式表示如下：

$$dz = z_x\,dx + z_y\,dy$$

式中 z_x 與 z_y 爲 z 分別對 x 與 y 之偏導數，而 dx 與 dy 是指 x 與 y 作極微量之變動，因此，全微分之求得乃此函數分別對每一個自變數取偏導數並且將這些值代入上述之公式。

例題5.7

全微分之求解步驟如下：

(1) 已知：$z = x^4 + 8xy + 3y^3$，則

$$z_x = 4x^3 + 8y \qquad z_y = 8x + 9y^2$$

然後將這些值代入公式，可得

$$dz = (4x^3 + 8y)\,dx + (8x + 9y^2)\,dy$$

(2) 已知：$z = (x - y)/(x + 1)$

$$z_x = \frac{(x+1)(1) - (x-y)(1)}{(x+1)^2} = \frac{y+1}{(x+1)^2}$$

$$z_y = \frac{(x+1)(-1) - (x-y)(0)}{(x+1)^2} = \frac{-1(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x+1}$$

其全微分爲

$$dz = \frac{y+1}{(x+1)^2}\,dx - \left(\frac{1}{x+1}\right)dy$$

如果其中有一個自變數維持不變，例如 $dy = 0$，則我們可求得偏微分爲：

$$dz = z_x\,dx$$

偏微分是指對一多變數函數而言，測量當其中某一個自變數作微量變動而令其它自變數固定不變時，其依變數之變動量，參見問題 5.13 。

5·5 全導數

已知 $z = f(x, y)$ 與 $y = g(x)$，亦即，x 與 y 彼此並不獨立，則 x 之變動將直接透過函數 f 與間接透過函數 g 而影響 z，這種關聯之管道如圖 5-1 所示，當 x 與 y

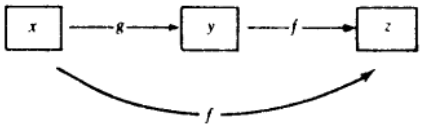


圖 5-1

並不獨立時，爲測量 x 之變動對 z 之影響時，我們必須求其**全導數**（total derivative），因而，全導數乃指測量 x 變動對 z 之直接效果（$\partial z/\partial x$）加上經由 y 而影響 z 之間接效果 $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)$，簡言之，全導數爲

$$\frac{dz}{dx} = z_x + z_y \frac{dy}{dx}$$

例題5.8

求全導數之另一方法是求 z 之全微分

$$dz = z_x\,dx + z_y\,dy$$

兩邊各除以 dx，則

$$\frac{dz}{dx} = z_x \frac{dx}{dx} + z_y \frac{dy}{dx}$$

因爲 $dx/dx = 1$，故

$$\frac{dz}{dx} = z_x + z_y \frac{dy}{dx}$$

例題5.9

全導數亦可予以延伸以調節其它之環結關係式，亦即如果 $z = f(x, y)$ 而 $x = g(t)$ 且 $y = h(t)$，則

$$\frac{dz}{dt} = z_x \frac{dx}{dt} + z_y \frac{dy}{dt}$$

例題5.10

已知

$$z = f(x, y) = 6x^3 + 7y$$

其中 $y = g(x) = 4x^2 + 3x + 8$，則對 x 之全導數（dz/dx）爲

$$\frac{dz}{dx} = z_x + z_y \frac{dy}{dx}$$

其中 $z_x = 18x^2$，$z_y = 7$，且 $dy/dx = 8x + 3$。代入上式，

$$\frac{dz}{dx} = 18x^2 + 7(8x + 3) = 18x^2 + 56x + 21$$

爲檢查此答案是否正確，將 $y = 4x^2 + 3x + 8$ 代入原來之函數使得 z 單獨爲 x 之函數，然後求其導數如下：

$$z = 6x^3 + 7(4x^2 + 3x + 8) = 6x^3 + 28x^2 + 21x + 56$$

因此，

$$\frac{dz}{dx} = 18x^2 + 56x + 21$$

例題5.11

已知 $z = 8x^2 + 3y^2$，試求全導數 dz/dt。

其中 $x = 4t$ 而 $y = 5t$。對於 t 之全導數爲

$$\frac{dz}{dt} = z_x\frac{dx}{dt} + z_y\frac{dy}{dt}$$

其中 $z_x = 16x$，$z_y = 6y$，$dx/dt = 4$，且 $dy/dt = 5$。代入上式，則

$$\frac{dz}{dt} = 16x(4) + 6y(5) = 64x + 30y$$

然後以 $x = 4t$ 與 $y = 5t$ 代入，可知

$$\frac{dz}{dt} = 64(4t) + 30(5t) = 406t$$

5·6 隱函數與逆函數之微分法

形如 $y = f(x)$ 之函數表示 y 可以明顯的以 x 項表示因而稱之爲**顯函數**（explicit function），而形如 $f(x, y) = 0$ 之函數則無法以 x 項明顯地表示 y，因而稱爲**隱函數**（implicit function），如果一隱函數 $f(x, y) = 0$ 存在，且在此隱函數有意義之點附近時 $f_y \neq 0$，則此隱函數之全微分可寫爲 $f_x dx + f_y dy = 0$。

記得前面曾指出，導數即爲兩微分之比例，因此我們可以將上式之項次重新整理而求得**隱函數法則**（implicit function rule）：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y}$$

注意，導數 dy/dx 爲負的相對應偏微分之倒數的比例，即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y} = -\frac{1}{f_y/f_x}$$

如果一逆函數存在（參見1.5節），則**逆函數法則**（inverse function rule）是指，一逆函數之導數爲其原始函數之導數的倒數，亦即，如果 $Q = f(P)$ 爲原始函數，則其導數爲 dQ/dP，而其逆函數［$P = f(Q)$］的導數爲 dP/dQ，且

$$\frac{dP}{dQ}=\frac{1}{dQ/dP} \qquad \text{假設 } \frac{dQ}{dP}\neq 0$$

例題5.12

下列諸隱函數的導數求法如下：

(1) 已知：$7x^2-y=0$。一隱函數之導數爲

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}$$

其中 $f_x=14x$ 而 $f_y=-1$。故，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{14x}{(-1)}=14x$$

此例之導數求法，亦可先以 x 項解 y 後再取其導數，即

$$y=7x^2 \quad \text{故} \quad \frac{dy}{dx}=14x$$

(2) 已知：$5x^2+8xy+6y^2=0$。

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{10x+8y}{8x+12y}$$

例題5.13

試求下列函數之逆函數的導數：

(1) 已知：$Q=20-2P$，

$$\frac{dP}{dQ}=\frac{1}{dQ/dP}$$

其中 $dQ/dP=-2$，故

$$\frac{dP}{dQ}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

(2) 已知：$Q=25+3P^2$，

$$\frac{dP}{dQ}=\frac{1}{dQ/dP}=\frac{1}{9P^2} \qquad (P\neq 0)$$

5.7 多變函數之最適化

於經濟學中對於一典型之多變數函數，$z=f(x,y)$，如圖5-2所示，欲求其極大點或極小點，需滿足下列條件：

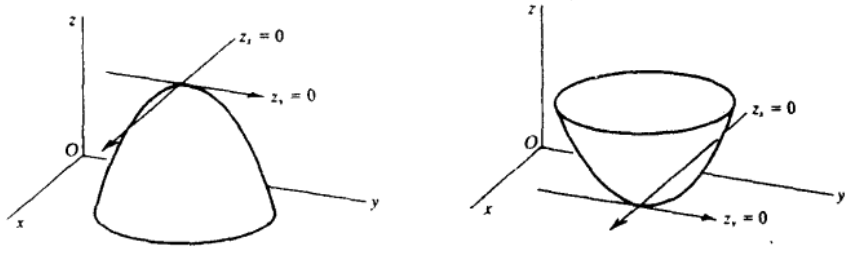


圖 5-2

(1) 所有之一階導數必須同時爲 0 ，即 $z_x = z_y = 0$ ，此即表示，在此函數之一已知點上，它既不上升也不下降，這些點謂之**臨界點**(critical values)。

(2) 在求極小值時，以這些臨界值計算之二階直接偏導數必須均大於 0 (即， z_{xx} ， $z_{yy} > 0$) 而在求極大值時， z_{xx} ， $z_{yy} < 0$ ，此即表示，此函數在臨界值時有往上升 (極小值的情況) ，或往下降 (極大值的情況) 。

(3) 二階直接偏導數的乘積以臨界值計算時將大於交叉偏導數之平方，亦即 $z_{xx}z_{yy} > (z_{xy})^2$ ，此即表示，無論從那一個方向來看此函數均處於**最適情況**(optimum) ，而不只是相對於其**主要軸**(principal axes) 而言才爲最適。

例題 5.14

對下列已知多變數函數，先求其臨界值，然後再指出此函數在其臨界值爲極小值或極大。

$$z = 6x^2 - 9x - 3xy - 7y + 5y^2$$

(1) 先取其一階偏導數，令它們均等於 0 ，並同時求解 x 與 y 。

$$z_x = 12x - 9 - 3y = 0$$
$$z_y = -3x - 7 + 10y = 0$$

因此，

$$12x - 3y = 9$$
$$-3x + 10y = 7$$

解上面之聯立式，可得

$$\bar{x} = 1 \qquad \bar{y} = 1$$

(2) 然後判別二階直接偏導數之正、負。

$$z_{xx} = 12 \qquad z_{yy} = 10$$

因爲 z_{xx} ， $z_{yy} > 0$ ，故此函數對於兩主軸而言爲極小。

(3) 最後求其混合偏導數並檢查是否 $z_{xx}z_{yy} > (z_{xy})^2$ 。

$$z_{xy} = -3$$
$$z_{xx}z_{yy} > (z_{xy})^2$$
$$(12)(10) > (-3)^2$$
$$120 > 9$$

故此函數在 $\bar{x} = \bar{y} = 1$ 時爲極小。

例題5.15

如果 $z_{xx}z_{yy} < (z_{xy})^2$ ，而且二階條件並不完全滿足，則以臨界值計算之函數值可能爲一反曲點（inflection point）（參見問題 5.21 ）或一鞍點（saddle point），如果是一鞍點，如圖 5-3所示者，則此函數從某一軸（在此即 y 軸）看來是極大值，但從另一軸（ x 軸）來看則爲極小值，在此鞍點的例子，二階直接偏導數之符號將不同，並且其第三條件 $z_{xx}z_{yy} > (z_{xy})^2$ 並不滿足，參見問題 5.22 。

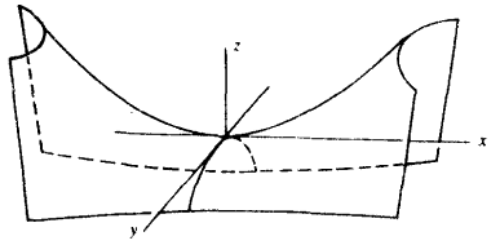


圖 5-3

5.8 有限制條件的極值

有限制條件的極大值或極小值之求解亦可使用微分方法，即已知一函數 $f(x, y)$ 受制於一限制式（constraint） $g(x, y)$ 則我們可令此限制式等於 0 ，並乘以 λ［拉格朗齊乘數（Lagrangian multiplier）］再加上原始函數，以建立一條新的函數如下：

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

$F(x, y, \lambda)$ 稱爲拉格朗齊函數（Lagrangian function），$f(x, y)$ 稱爲原始或目標函數（objective function）而 $g(x, y)$ 爲限制函數（constraining function），因爲限制式令其爲 0 ，故 $\lambda g(x, y) = 0$ ，且將其加至拉格朗齊函數裡並不影響目標函數之值。爲求其極值，首先對此函數求一階導數並令其爲 0 以求得 $\bar{x}$ ， $\bar{y}$ 與 $\bar{\lambda}$ 等臨界值，即：

$$F_x = F_y = F_\lambda = 0$$

其二階條件異於 12.4 節所討論沒有限制條件之最適化問題。

例題5.16

試最適化此函數

$$z = 4x^2 + 3xy + 6y^2 \tag{5.1}$$

受制於 $x + y = 56$ ，

(1) 令限制式等於 0 ，

$$x + y - 56 = 0$$

上式乘以 λ 並加上目標函數以構成拉格朗齊函數（ Z ）。

$$Z = 4x^2 + 3xy + 6y^2 + \lambda(x + y - 56) \tag{5.2}$$

(2) 取一階導數，並令之等於 0 ，以解聯立方程式，

$$Z_x = 8x + 3y + \lambda = 0 \tag{5.3}$$
$$Z_y = 3x + 12y + \lambda = 0 \tag{5.4}$$
$$Z_\lambda = x + y - 56 = 0 \tag{5.5}$$

(5.4)式減(5.3)式可得

$$5x - 9y = 0 \qquad x = 1.8y$$

以 $x = 1.8y$ 代入(5.5)式，可得

$$1.8y + y = 56 \qquad \bar{y} = 20$$

由此，可求得

$$\bar{x} = 36 \qquad \bar{\lambda} = -348$$

此函數最適化發生於 $\bar{x} = 36$ ， $\bar{y} = 20$ ， $\bar{\lambda} = -348$ ，再由(5.2)式知，

$$\begin{aligned} Z &= 4(36)^2 + 3(36)(20) + 6(20)^2 + (-348)(36 + 20 - 56) \\ &= 4(1296) + 3(720) + 6(400) - 348(0) = 9744 \end{aligned}$$

於第十二章例 5 中將討論，此時 Z 爲一極小值，應注意的是在臨界值時拉格朗齊函數等於目標函數，即 $Z = z$ 。

5.9 拉格朗齊乘數

拉格朗齊乘數 λ 是指限制式中其常數每變動一單位，如何影響其目標函數之變動，如果 λ 爲正，則限制式之常數每增加（減少）一單位，其目標函數將減少（增加）大約爲 λ 的值，反之，如果 λ 爲負值，則限制式之常數每增加（減少）一單位，其目標函數將增加（減少）大約爲 λ 的值。

例題5.17

於例 16 中，$\bar{x}=36$，$\bar{y}=20$，$\bar{\lambda}=-348$，與 $\bar{z}=9744$，當 λ 爲負值，則限制式函數之常數增加一單位時，其目標函數將大約增加 $\lambda=348$，於此證明如下，首先原始目標函數

$$z=4x^2+3xy+6y^2$$

極大化此函數而受制於一新的限制式，此限制式之常數項比前述增加 1：

$$x+y=57$$

故其拉格朗齊函數爲

$$Z=4x^2+3xy+6y^2+\lambda(x+y-57)$$
$$Z_\lambda=8x+3y+\lambda=0$$
$$Z_x=3x+12y+\lambda=0$$
$$Z_y=x+y-57=0$$

解上面聯立方程式，可得

$$\bar{x}=36.64 \qquad \bar{y}=20.36 \qquad \bar{\lambda}=-354.2$$

將這些值代入拉格朗齊函數可得新的受限制之最適 $\bar{Z}=10,095$，此時 Z 比舊的限制式下之極值 9744 大了 351，近似於 λ 之值 348，此即原先之拉格朗齊乘數。

習題與解答

一階偏導數

5.1 試求下列諸函數之一階偏導數：

答 (*a*) $z=8x^2+14xy+5y^2$

$$z_x=16x+14y$$
$$z_y=14x+10y$$

(*b*) $z=4x^3+2x^2y-7y^5$

$$z_x=12x^2+4xy$$
$$z_y=2x^2-35y^4$$

(*c*) $z=6w^3+4wx+3x^2-7xy-8y^2$

$$z_w=18w^2+4x$$
$$z_x=4w+6x-7y$$
$$z_y=-7x-16y$$

(*d*) $z=2w^2+8wxy-x^2+y^3$

$$z_w=4w+8xy$$
$$z_x=8wy-2x$$
$$z_y=8wx+3y^2$$

5.2 試利用乘積法則求下列諸函數的一階偏導數：

答 (*a*) $z=3x^2(5x+7y)$

$$z_x=3x^2(5)+(5x+7y)(6x)$$
$$=45x^2+42xy$$

(*b*) $z=(9x-4y)(12x+2y)$

$$z_x=(9x-4y)(12)+(12x+2y)(9)$$
$$=108x-48y+108x+18y=216x-30y$$

且 $z_y = 3x^2(7) + (5x + 7y)(0)$
$= 21x^2$

(c) $z = (2x^2 + 6y)(5x - 3y^3)$

$z_x = (2x^2 + 6y)(5) + (5x - 3y^3)(4x)$
$= 10x^2 + 30y + 20x^2 - 12xy^3$
$= 30x^2 + 30y - 12xy^3$

且 $z_y = (2x^2 + 6y)(-9y^2) + (5x - 3y^3)(6)$
$= -18x^2y^2 - 54y^5 + 30x - 18y^3$
$= -72y^5 - 18x^2y^2 + 30x$

且 $z_y = (9x - 4y)(2) + (12x + 2y)(-4)$
$= 18x - 8y - 48x - 8y = -30x - 16y$

(d) $z = (w - x - y)(3w + 2x - 4y)$

$z_w = (w - x - y)(3) + (3w + 2x - 4y)(1)$
$= 6w - x - 7y$
$z_x = (w - x - y)(2) + (3w + 2x - 4y)(-1)$
$= -w - 4x + 2y$

且 $z_y = (w - x - y)(-4) + (3w + 2x - 4y)(-1)$
$= -7w + 2x + 8y$

5.3 利用商數法則求下列諸函數之一階偏導數：

(a) $z = \dfrac{5x}{6x - 7y}$

$z_x = \dfrac{(6x - 7y)(5) - (5x)(6)}{(6x - 7y)^2}$
$= \dfrac{-35y}{(6x - 7y)^2}$

且 $z_y = \dfrac{(6x - 7y)(0) - (5x)(-7)}{(6x - 7y)^2}$
$= \dfrac{35x}{(6x - 7y)^2}$

(b) $z = \dfrac{x + y}{3y}$

$z_x = \dfrac{3y(1) - (x + y)(0)}{(3y)^2}$
$= \dfrac{1}{3y}$

且 $z_y = \dfrac{3y(1) - (x + y)(3)}{(3y)^2}$
$= \dfrac{-3x}{(3y)^2} = \dfrac{-x}{3y^2}$

(c) $z = \dfrac{4x - 9y}{5x + 2y}$

$z_x = \dfrac{(5x + 2y)(4) - (4x - 9y)(5)}{(5x + 2y)^2}$
$= \dfrac{53y}{(5x + 2y)^2}$

且 $z_y = \dfrac{(5x + 2y)(-9) - (4x - 9y)(2)}{(5x + 2y)^2}$
$= \dfrac{-53x}{(5x + 2y)^2}$

(d) $z = \dfrac{x^2 - y^2}{3x + 2y}$

$z_x = \dfrac{(3x + 2y)(2x) - (x^2 - y^2)(3)}{(3x + 2y)^2}$
$= \dfrac{3x^2 + 4xy + 3y^2}{(3x + 2y)^2}$

且 $z_y = \dfrac{(3x + 2y)(-2y) - (x^2 - y^2)(2)}{(3x + 2y)^2}$
$= \dfrac{-2x^2 - 6xy - 2y^2}{(3x + 2y)^2}$

5.4 利用連鎖律求下列諸函數的一階偏導數：

(a) $z = (x + y)^2$

$z_x = 2(x + y)(1)$
$= 2(x + y)$

且 $z_y = 2(x + y)(1) = 2(x + y)$

(b) $z = (2x - 5y)^3$

$z_x = 3(2x - 5y)^2(2)$
$= 6(2x - 5y)^2$

且 $z_y = 3(2x - 5y)^2(-5) = -15(2x - 5y)^2$

(c) $z = (7x^2 + 4y^3)^5$

$z_x = 5(7x^2 + 4y^3)^4(14x)$
$= 70x(7x^2 + 4y^3)^4$

且 $z_y = 5(7x^2 + 4y^3)^4(12y^2)$
$= 60y^2(7x^2 + 4y^3)^4$

(d) $z = (5w + 4x + 7y)^3$

$z_w = 3(5w + 4x + 7y)^2(5)$
$= 15(5w + 4x + 7y)^2$
$z_x = 3(5w + 4x + 7y)^2(4)$
$= 12(5w + 4x + 7y)^2$

且 $z_y = 3(5w + 4x + 7y)^2(7) = 21(5w + 4x + 7y)^2$

5.5 利用必要之各種微分法則的組合，求下列方程式之一階偏導數。

$$z=\frac{(5x^2-7y)(3x^2+8y)}{4x+2y}$$

解 利用乘積律與商數法則，

$$z_x=\frac{(4x+2y)[(5x^2-7y)(6x)+(3x^2+8y)(10x)]-(5x^2-7y)(3x^2+8y)(4)}{(4x+2y)^2}$$
$$=\frac{(4x+2y)(30x^3-42xy+30x^3+80xy)-(5x^2-7y)(12x^2+32y)}{(4x+2y)^2}$$
$$=\frac{(4x+2y)(60x^3+38xy)-(5x^2-7y)(12x^2+32y)}{(4x+2y)^2}$$

且
$$z_y=\frac{(4x+2y)[(5x^2-7y)(8)+(3x^2+8y)(-7)]-(5x^2-7y)(3x^2+8y)(2)}{(4x+2y)^2}$$
$$=\frac{(4x+2y)(40x^2-56y-21x^2-56y)-(5x^2-7y)(6x^2+16y)}{(4x+2y)^2}$$
$$=\frac{(4x+2y)(19x^2-112y)-(5x^2-7y)(6x^2+16y)}{(4x+2y)^2}$$

5.6 已知 $z=(5x^2-4y)^2(2x+7y^3)$ 重新作問題 5.5 。

解 利用乘積律與連鎖法則，其一階偏導數爲

$$z_x=(5x^2-4y)^2(2)+(2x+7y^3)[2(5x^2-4y)(10x)]$$
$$=2(5x^2-4y)^2+(2x+7y^3)(100x^3-80xy)$$

且
$$z_y=(5x^2-4y)^2(21y^2)+(2x+7y^3)[2(5x^2-4y)(-4)]$$
$$=21y^2(5x^2-4y)^2+(2x+7y^3)(-40x^2+32y)$$

5.7 已知 $z=\dfrac{(3x+11y)^3}{2x+6y}$ 重新作問題 5.5 。

解 利用商數法則與連鎖律，其一階偏導數爲

$$z_x=\frac{(2x+6y)[3(3x+11y)^2(3)]-(3x+11y)^3(2)}{(2x+6y)^2}$$
$$=\frac{(18x+54y)(3x+11y)^2-2(3x+11y)^3}{(2x+6y)^2}$$

且
$$z_y=\frac{(2x+6y)[3(3x+11y)^2(11)]-(3x+11y)^3(6)}{(2x+6y)^2}$$
$$=\frac{(66x+198y)(3x+11y)^2-6(3x+11y)^3}{(2x+6y)^2}$$

5.8 已知 $z=\left(\dfrac{8x+7y}{5x+2y}\right)^2$ 重新問題 5.5 。

解 利用連鎖律與商數法則，其一階偏導數爲

$$z_x = 2\left(\frac{8x+7y}{5x+2y}\right)\left[\frac{(5x+2y)(8)-(8x+7y)(5)}{(5x+2y)^2}\right]$$
$$= \frac{16x+14y}{5x+2y}\left[\frac{-19y}{(5x+2y)^2}\right] = \frac{-(266y^2+304xy)}{(5x+2y)^3}$$

且
$$z_y = 2\left(\frac{8x+7y}{5x+2y}\right)\left[\frac{(5x+2y)(7)-(8x+7y)(2)}{(5x+2y)^2}\right]$$
$$= \frac{16x+14y}{5x+2y}\left[\frac{19x}{(5x+2y)^2}\right] = \frac{304x^2+266xy}{(5x+2y)^3}$$

二階偏導數

5.9 試就下列諸函數求其二階直接偏導數 z_{xx} 與 z_{yy} 。

圖 (*a*) $z = x^2 + 2xy + y^2$

$$z_x = 2x + 2y \qquad z_y = 2x + 2y$$
$$z_{xx} = 2 \qquad z_{yy} = 2$$

(*b*) $z = x^3 - 9xy - 3y^3$

$$z_x = 3x^2 - 9y \qquad z_y = -9x - 9y^2$$
$$z_{xx} = 6x \qquad z_{yy} = -18y$$

(*c*) $z = 2xy^4 + 7x^3y$

$$z_x = 2y^4 + 21x^2y \qquad z_y = 8xy^3 + 7x^3$$
$$z_{xx} = 42xy \qquad z_{yy} = 24xy^2$$

(*d*) $z = x^4 + x^3y^2 - 3xy^3 - 2y^3$

$$z_x = 4x^3 + 3x^2y^2 - 3y^3 \qquad z_y = 2x^3y - 9xy^2 - 6y^2$$
$$z_{xx} = 12x^2 + 6xy^2 \qquad z_{yy} = 2x^3 - 18xy - 12y$$

(*e*) $z = (12x - 7y)^2$

$$z_x = 2(12x - 7y)(12) \qquad z_y = 2(12x - 7y)(-7)$$
$$= 288x - 168y \qquad = -168x + 98y$$
$$z_{xx} = 288 \qquad z_{yy} = 98$$

(*f*) $z = (7x + 3y)^3$

$$z_x = 3(7x + 3y)^2(7) \qquad z_y = 3(7x + 3y)^2(3)$$
$$= 21(7x + 3y)^2 \qquad = 9(7x + 3y)^2$$
$$z_{xx} = 42(7x + 3y)(7) \qquad z_{yy} = 18(7x + 3y)(3)$$
$$= 2058x + 882y \qquad = 378x + 162y$$

(*g*) $z = (x^2 + 2y)^4$

$$z_x = 4(x^2 + 2y)^3(2x) = 8x(x^2 + 2y)^3 \qquad z_y = 4(x^2 + 2y)^3(2) = 8(x^2 + 2y)^3$$
$$^*z_{xx} = 8x[3(x^2 + 2y)^2(2x)] + (x^2 + 2y)^3(8) \qquad z_{yy} = 24(x^2 + 2y)^2(2) = 48(x^2 + 2y)^2$$
$$= 48x^2(x^2 + 2y)^2 + 8(x^2 + 2y)^3$$

* 表經由乘積法則 。

5.10 試就下列諸函數求其交叉偏導數 z_{xy} 與 z_{yx} ：

圖 (*a*) $z = 3x^2 + 12xy + 5y^2$

$$z_x = 6x + 12y \qquad z_y = 12x + 10y$$
$$z_{xy} = 12 \qquad z_{yx} = 12$$

(*b*) $z = x^3 - xy - 2y^3$

$$z_x = 3x^2 - y \qquad z_y = -x - 6y^2$$
$$z_{xy} = -1 \qquad z_{yx} = -1$$

(*c*) $z = 8x^2y - 11xy^3$

$$z_x = 16xy - 11y^3 \qquad z_y = 8x^2 - 33xy^2$$
$$z_{xy} = 16x - 33y^2 \qquad z_{yx} = 16x - 33y^2$$

(*d*) $z = (8x - 4y)^5$

$$z_x = 5(8x - 4y)^4(8) \qquad z_y = 5(8x - 4y)^4(-4)$$
$$= 40(8x - 4y)^4 \qquad = -20(8x - 4y)^4$$
$$z_{xy} = 160(8x - 4y)^3(-4) \qquad z_{yx} = -80(8x - 4y)^3(8)$$
$$= -640(8x - 4y)^3 \qquad = -640(8x - 4y)^3$$

由上式 (*a*) ～ (*d*) 式，根據楊氏定理可知，$z_{xy} = z_{yx}$，亦即不管第一次偏導數是針對那一個變數。

微　分

5.11 試就下列諸函數求其微分 dy ：

圖 (*a*) $y = 7x^3 - 5x^2 + 6x - 3$

$$\frac{dy}{dx} = 21x^2 - 10x + 6$$

故，$dy = (21x^2 - 10x + 6)\,dx$

(*b*) $y = (4x + 3)(3x - 8)$

$$\frac{dy}{dx} = (4x + 3)(3) + (3x - 8)(4) = 24x - 23$$

故，$dy = (24x - 23)\,dx$

(*c*) $y = \dfrac{9x - 4}{5x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x(9) - (9x - 4)(5)}{(5x)^2} = \frac{20}{25x^2}$$

$$dy = \frac{4}{5x^2}\,dx$$

(*d*) $y = (11x + 9)^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2(11x + 9)^1(11)$$

$$dy = 22(11x + 9)^1\,dx$$

5.12 試就下列諸函數求其全微分，$dz = z_x dx + z_y dy$：

解 (*a*) $z = 5x^3 - 12xy - 6y^5$

$$z_x = 15x^2 - 12y \qquad z_y = -12x - 30y^4$$
$$dz = (15x^2 - 12y)\,dx - (12x + 30y^4)\,dy$$

(*b*) $z = 7x^2y^3$

$$z_x = 14xy^3 \qquad z_y = 21x^2y^2$$
$$dz = 14xy^3\,dx + 21x^2y^2\,dy$$

(*c*) $z = 3x^2(8x - 7y)$

$$z_x = 3x^2(8) + (8x - 7y)(6x) \qquad z_y = 3x^2(-7) + (8x - 7y)(0)$$
$$dz = (72x^2 - 42xy)\,dx - 21x^2\,dy$$

(*d*) $z = (5x^2 + 7y)(2x - 4y^3)$

$$z_x = (5x^2 + 7y)(2) + (2x - 4y^3)(10x) \qquad z_y = (5x^2 + 7y)(-12y^2) + (2x - 4y^3)(7)$$
$$dz = (30x^2 - 40xy^3 + 14y)\,dx - (112y^3 + 60x^2y^2 - 14x)\,dy$$

(*e*) $z = \dfrac{9y^3}{x - y}$

$$z_x = \frac{(x - y)(0) - 9y^3(1)}{(x - y)^2} \qquad z_y = \frac{(x - y)(27y^2) - 9y^3(-1)}{(x - y)^2}$$
$$dz = \frac{-9y^3}{(x - y)^2}\,dx + \frac{27xy^2 - 18y^3}{(x - y)^2}\,dy$$

(*f*) $z = (x - 3y)^3$

$$z_x = 3(x - 3y)^2(1) \qquad z_y = 3(x - 3y)^2(-3)$$
$$dz = 3(x - 3y)^2\,dx - 9(x - 3y)^2\,dy$$

5.13 於問題 5.12 中假設 $dy = 0$，試求每一函數在 x 作微量變動時之偏微分。

解 (*a*) $dz = (15x^2 - 12y)\,dx$ (*b*) $dz = 14xy^3\,dx$ (*c*) $dz = (72x^2 - 42xy)\,dx$

(*d*) $dz = (30x^2 - 40xy^3 + 14y)\,dx$ (*e*) $dz = \dfrac{-9y^3}{(x - y)^2}\,dx$ (*f*) $dz = 3(x - 3y)^2\,dx$

全導數

5.14 試就下列諸函數求其全導數 dz/dx：

解 (*a*) $z = 6x^2 + 15xy + 3y^2$, 其中 $y = 7x^2$.

$$\frac{dz}{dx} = z_x + z_y \frac{dy}{dx}$$
$$= (12x + 15y) + (15x + 6y)(14x)$$
$$= 210x^2 + 84xy + 12x + 15y$$

(*b*) $z = (13x - 18y)^2$, 其中 $y = x + 6$.

$$\frac{dz}{dx} = z_x + z_y \frac{dy}{dx}$$
$$= 26(13x - 18y) - 36(13x - 18y)(1)$$
$$= -10(13x - 18y)$$

(c) $z = \dfrac{9x - 7y}{2x + 5y}$, 其中 $y = 3x - 4$.

$$\frac{dz}{dx} = z_x + z_y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{59y}{(2x + 5y)^2} - \left[\frac{59x}{(2x + 5y)^2}\right](3) = \frac{59(y - 3x)}{(2x + 5y)^2}$$

(d) $z = 8x - 12y$, 其中 $y = (x + 1)/x^2$

$$\frac{dz}{dx} = z_x + z_y \frac{dy}{dx}$$

$$= 8 - \frac{12(-x^2 - 2x)}{x^4}$$

$$= 8 + \frac{12(x + 2)}{x^3}$$

5.15 試就下列諸函數，求其全導數 dz/dw：

解 (a) $z = 7x^2 + 4y^2$, 其中 $x = 5w$ 且 $y = 4w$.

$$\frac{dz}{dw} = z_x \frac{dx}{dw} + z_y \frac{dy}{dw} = 14x(5) + 8y(4) = 70x + 32y$$

(b) $z = 10x^2 - 6xy - 12y^2$, 其中 $x = 2w$ 且 $y = 3w$.

$$\frac{dz}{dw} = z_x \frac{dx}{dw} + z_y \frac{dy}{dw} = (20x - 6y)(2) + (-6x - 24y)(3) = 22x - 84y$$

隱函數與逆函數微分法

5.16 試就下列諸隱函數，求其導數 dy/dx 與 dx/dy：

解 (a) $y - 6x + 7 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y} = \frac{-(-6)}{1} = 6 \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{-f_y}{f_x} = \frac{-(1)}{-6} = \frac{1}{6}$$

(b) $3y - 12x + 17 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y} = \frac{-(-12)}{3} = 4 \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{-f_y}{f_x} = \frac{(3)}{-12} = \frac{1}{4}$$

(c) $x^2 + 6x - 13 - y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y} = \frac{-(2x + 6)}{-1} = 2x + 6 \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{-f_y}{f_x} = \frac{-(-1)}{2x + 6} = \frac{1}{2x + 6} \qquad (x \neq -3)$$

注意，上面各情形下，一導數爲另一導數之逆。

5.17 利用隱函數微分法求 dy/dx 及 dy/dz。

解 (a) $f(x, y) = 3x^2 + \quad + 4y^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y} = -\frac{6x + 2y}{12y^2 + 2x}$$

(b) $f(x, y) = 12x^5 - 2y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y} = \frac{-60x^4}{-2} = 30x^4$$

(c) $f(x, y) = 7x^2 + 2xy^2 + 9y^4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y} = -\frac{14x + 2y^2}{36y^3 + 4xy}$$

(d) $f(x, y) = 6x^3 - 5y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y} = -\frac{18x^2}{-5} = 3.6x^2$$

(e) $f(x, y, z) = x^2y^3 + z^2 + xyz$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y} = -\frac{2xy^3 + yz}{3x^2y^2 + xz}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{-f_z}{f_y} = -\frac{2z + xy}{3x^2y^2 + xz}$$

(f) $f(x, y, z) = x^3z^2 + y^3 + 4xyz$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y} = -\frac{3x^2z^2 + 4yz}{3y^2 + 4xz}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{-f_z}{f_y} = -\frac{2x^3z + 4xy}{3y^2 + 4xz}$$

5.18 試求下列函數之逆的導數，dP/dQ。

圖 (a) $Q = 210 - 3P$

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{dQ/dP} = -\frac{1}{3}$$

(b) $Q = 35 - 0.25P$

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{-0.25} = -4$$

(c) $Q = 14 + P^2$

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{2P} \qquad (P \neq 0)$$

(d) $Q = P^3 + 2P^2 + 7P$

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{3P^2 + 4P + 7}$$

多變數函數之最適化

5.19 已知函數 $z = 3x^2 + 2y^2 - xy - 4x - 7y + 12$ (a) 試求其極值，(b) 判別此函數爲極大、極小、反曲點、或鞍點，(c) 以臨界值計算此函數之值。

圖 (a) 取其一階偏導數，並令之爲 0，而聯立解 x 與 y

$$z_x = 6x - y - 4 = 0 \qquad z_y = 4y - x - 7 = 0$$

故 $\bar{x} = 1$ 且 $\bar{y} = 2$。

(b) 取二階直接偏導數並檢查其正、負符號

$$z_{xx} = 6 \qquad z_{yy} = 4$$

由於兩個二階直接偏導數均爲正值，故此函數沿著其主軸有一極小值。

最後求其交叉偏導數並檢查兩二階直接偏導數之乘積是否大於此交叉偏導數之平方，即

因此

$$z_{xy} = -1 = z_{yx}$$

$$z_{xx}z_{yy} > (z_{xy})^2$$

$$(6)(4) > (-1)^2$$

故此函數無論從那一個方向看均有一最小值。

(*c*) 以臨界值計算函數值，

$$z = 3(1)^2 + 2(2)^2 - (1)(2) - 4(1) - 7(2) + 12 = 3$$

5.20 已知 $z = 60x + 34y - 4xy - 6x^2 - 3y^2 + 5$ 重新作問題 5.19 。

圖 (*a*) 首先取一階偏導數並令之等於 0 ，

$$z_x = 60 - 4y - 12x = 0 \qquad z_y = 34 - 4x - 6y = 0$$

上式聯立解可得，$\bar{x} = 4$ 和 $\bar{y} = 3$ 。

(*b*) 然後取其二階直接偏導數，

$$z_{xx} = -12 \qquad z_{yy} = -6$$

因爲兩個二階偏導數均小於 0 ，故此函數沿著主軸有一極大值。

取交叉偏導數並檢查其第三個條件，

$$z_{xy} = -4 = z_{yx}$$

因此

$$z_{xx}z_{yy} > (z_{xy})^2$$

$$(-12)(-6) > (-4)^2$$

故此函數無論從那一個方向看均有一極大值。

(*c*) $z = 60(4) + 34(3) - 4(4)(3) - 6(4)^2 - 3(3)^2 + 5 = 176$ 。

5.21 已知 $z = 8x - 2x^2 + 12xy - 12y^2 + 6y$ 重新作問題 5.19 。

圖 (*a*) 首先取一階偏導數並令之等於 0 ，

$$z_x = 8 - 4x + 12y = 0 \qquad z_y = 12x - 24y + 6 = 0$$

聯立解之，可得 $\bar{x} = -5.5$ 與 $\bar{y} = -2.5$ 。

(*b*) 次取二階直接偏導數，

$$z_{xx} = -4 \qquad z_{yy} = -24$$

由於兩個二階偏導數均小於 0 ，故此函數沿著主軸有一極大值，最後取其交叉偏導數並檢查第三個條件。

$$z_{xy} = 12 = z_{yx}$$

因此，

$$z_{xx}z_{yy} \not> (z_{xy})^2$$

$$(-4)(-24) < (12)^2$$

結果此函數之極大值並非從每一個方向看皆然，當兩個二階直接偏導數爲同號，但 $z_{xx}z_{yy} < (z_{xy})^2$ ，則此函數有一反曲點。

(*c*) $z = 8(-5.5) - 2(-5.5)^2 + 12(-5.5)(-2.5) - 12(-2.5)^2 + 6(-2.5) = -29.5$

5.22 已知 $z = 5x^2 - 30x + 4xy - 3y^2 + 7y$ 重新作問題 5.19 。

圖 (*a*) 其一階條件爲

$$z_x = 10x - 30 + 4y = 0 \qquad z_y = 4x - 6y + 7 = 0$$

聯立解之，可得 $\bar{x} = 2$ 與 $\bar{y} = 2.5$ 。

(*b*) 檢查其二階條件，其中 $z_{xx} = 10$ ，$z_{yy} = -6$ 與 $z_{xy} = 4$ ，此顯示兩個二階直接偏導數之符號相反，且其乘積小於交叉偏導數之平方，即

$$(10)(-6) < (4)^2$$

結果，以臨界值計算此函數，既不是極大值，也不是極小值，而是一鞍點。

(*c*) $z = 5(2)^2 - 30(2) + 4(2)(2.5) - 3(2.5)^2 + 7(2.5) = -21.25$

5.23 已知：$z = 9x - 3x^2 + 6xy$ ，(*a*) 試求其極值，(*b*) 判別此函數有極大、極小、反曲點或鞍點，(*c*) 以臨界值計算此函數值。

解 (*a*) 一階條件爲

$$z_x = 9 - 6x + 6y = 0 \qquad z_y = 6x - 16y + 12 = 0$$

求上式之聯立解，可得 $\bar{x} = 3.6$ 與 $\bar{y} = 2.1$ 。

(*b*) 再取所有二階偏導數，並檢查是否滿足二階條件。

$$z_{xx} = -6 \qquad z_{yy} = -16 \qquad z_{xy} = 6$$

因爲兩個二階直接偏導數均爲負值，且其乘積大於交叉偏導數之平方，$(-6)(-16) > (6)^2$ ，故此函數在 $\bar{x} = 3.6$ ，$\bar{y} = 2.1$ 處有極大值。

(*c*) $z = 9(3.6) - 3(3.6)^2 + 6(3.6)(2.1) - 8(2.1)^2 + 12(2.1) = 28.8$

5.24 已知 $z = 48y - 3x^2 - 6xy - 2y^2 + 72x$ 重新作問題 5.23 。

解 (*a*) $z_x = -6x - 6y + 72 = 0 \qquad z_y = 48 - 6x - 4y = 0$

聯立解之，可得 $\bar{x} = 0$ 與 $\bar{y} = 12$ 。

(*b*) 二階偏導數爲

$$z_{xx} = -6 \qquad z_{yy} = -4 \qquad z_{xy} = -6$$

兩個二階偏導數均爲負值，表示此函數沿著主軸有一極大值，但因 $z_{xx}z_{yy} < (z_{xy})^2$ ，故此函數在 $\bar{x} = 0$ ，$\bar{y} = 12$ 處爲一反曲點。

(*c*) $z = 48(12) - 3(0)^2 - 6(0)(12) - 2(12)^2 + 72(0) = 288$

5.25 已知 $z = 120x - 2.25x^2 - 4xy - 2.4y^2 + 200y$ 重新作問題 5.23 。

解 (*a*) $z_x = 120 - 4.5x - 4y = 0 \qquad z_y = -4x - 4.8y + 200 = 0$

故，$\bar{x} = -40$ 與 $\bar{y} = 75$ 。

(*b*) 二階偏導數爲

$$z_{xx} = -4.5 \qquad z_{yy} = -4.8 \qquad z_{xy} = -4$$

因爲二階偏導數均爲負值，且 $(-4.5)(-4.8) > (-4)^2$ ，故此函數在 $\bar{x} = -40$ ，$\bar{y} = 75$ 處有極大值。

(*c*) $z = 120(-40) - 2.25(-40)^2 - 4(-40)(75) - 2.4(75)^2 + 200(75) = 5100$

三次方函數之最適化

5.26 已知：$z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy$，試判別在臨界值時此三次方函數爲極大或極小，應注意的是，對三次方函數而言，其極值 $\bar{x}$ 與 $\bar{y}$ 可能有兩個，無論是那一個，均必須通過二階條件之檢驗。

圖 一階條件爲

$$z_x = 9x^2 - 9y = 0 \tag{5.6}$$

$$z_y = 9y^2 - 9x = 0 \tag{5.7}$$

由（5.6）式得，　　$9y = 9x^2$　　$y = x^2$

以 $y = x^2$ 代入（5.7）式，

$$9(x^2)^2 - 9x = 0$$
$$9x^4 - 9x = 0$$
$$9x(x^3 - 1) = 0$$

若兩函數之乘積，如 $9x(x^3 - 1)$ 等於 0，則至少有一項必須爲 0，因此

$$9x = 0 \quad \text{或} \quad x^3 - 1 = 0$$
$$\bar{x} = 0 \qquad\qquad x^3 = 1$$
$$\bar{x} = 1$$

將這些值代入（5.6）式，即當 $\bar{x} = 0$，$\bar{y} = 0$，與當 $\bar{x} = 1$，$\bar{y} = 1$。

並檢查其二階條件，

$$z_{xx} = 18x \qquad z_{yy} = 18y \qquad z_{xy} = -9$$

當我們以 $\bar{x} = 0$ 與 $\bar{y} = 0$ 計算時

$$z_{xx} = 18(0) = 0 \qquad z_{yy} = 18(0) = 0 \qquad z_{xy} = -9$$

因爲 $z_{xx}z_{yy} < (z_{xy})^2$ 故此函數在 $\bar{x} = 0$，$\bar{y} = 0$ 處既不是極大也不是極小值，反之，當 $\bar{x} = 1$ 與 $\bar{y} = 1$ 時，其二階偏導數分別爲

$$z_{xx} = 18 \qquad z_{yy} = 18 \qquad z_{xy} = -9$$

由於兩個二階偏導數均爲正，並且 $(18)(18) > (-9)^2$，故此函數在 $\bar{x} = 1$，$\bar{y} = 1$ 之點時爲極小值。在該點上，函數值

$$z = 3(1)^3 + 3(1)^3 - 9(1)(1) = -3$$

5.27 已知：$z = 4x^3 + 6xy - x^2 + 3y^2 + 12$ 試判別此函數在臨界點上爲極大或極小。

圖 其一階條件爲

$$z_x = 12x^2 + 6y - 2x = 0 \tag{5.8}$$

$$z_y = 6x + 6y = 0 \tag{5.9}$$

由（5.9）式知，$y = -x$，代入（5.8）式

$$12x^2 + 6(-x) - 2x = 0$$
$$12x^2 - 8x = 0$$
$$x(12x - 8) = 0$$

因此，$\bar{x} = 0$ 或 $12x - 8 = 0$，$\bar{x} = \frac{2}{3}$

將這些值代入（5.9）式，即如果 $\bar{x} = 0$，$\bar{y} = 0$ 與如果 $\bar{x} = \frac{2}{3}$，$\bar{y} = -\frac{2}{3}$。取此函數之二階偏導數，

$$z_{xx} = 24x - 2 \qquad z_{yy} = 6 \qquad z_{xy} = 6$$

以 $\bar{x} = 0$，$\bar{y} = 0$ 計算此二階導數，

$$z_{xx} = -2 \qquad z_{yy} = 6 \qquad z_{xy} = 6$$

因爲 $(-2)(6) < (6)^2$，故此函數在 $\bar{x} = 0$，$\bar{y} = 0$ 並非爲最適值。

當以 $\bar{x} = \frac{2}{3}$，$\bar{y} = -\frac{2}{3}$ 計算其二階導數，則

$$z_{xx} = 14 \qquad z_{yy} = 6 \qquad z_{xy} = 6$$

因爲兩個二階偏導數均大於 0 且 $(14)(6) > (6)^2$，故函數在此臨界值爲最小，且

$$z = 4(\tfrac{2}{3})^3 + 6(\tfrac{2}{3})(-\tfrac{2}{3}) - (\tfrac{2}{3})^2 + 3(-\tfrac{2}{3})^2 + 12 = 11\tfrac{11}{27}$$

5.28 已知 $z = y^3 + 8xy - 5y^2 + 4x^2 + 13$ 重新作問題 5.27。

$$z_x = 8y + 8x = 0 \qquad z_y = 3y^2 + 8x - 10y = 0$$

圖 解聯立式可得，$\bar{x} = 0$ 與 $\bar{y} = 0$ 及 $\bar{x} = -6$ 與 $\bar{y} = 6$，其二階偏導數爲

$$z_{xx} = 8 \qquad z_{yy} = 6y - 10 \qquad z_{xy} = 8$$

以 $\bar{x} = 0$，$\bar{y} = 0$ 計算此二階導數，則

$$z_{xx} = 8 \qquad z_{yy} = -10 \qquad z_{xy} = 8$$

因爲 $(8)(-10) < (8)^2$，故此函數在 $\bar{x} = \bar{y} = 0$ 之點並非最適點。而以 $\bar{x} = -6$，$\bar{y} = 6$ 計算二階偏導數，則

$$z_{xx} = 8 \qquad z_{yy} = 26 \qquad z_{xy} = 8$$

因爲 $z_{xx}z_{yy} > 0$ 且 $(8)(26) > (8)^2$，故此函數確爲極小值，而函數值

$$z = (6)^3 + 8(-6)(6) - 5(6)^2 + 4(-6)^2 + 13 = -95$$

有限制條件之極值

5.29 (*a*) 就下列函數受制於已知之限制式下求其最適化之臨界值，(*b*) 當限制式之常數項變動一單位時，估算其對目標函數之影響效果。

已知：$z = 4x^2 - 2xy + 6y^2$，受制於 $x + y = 72$

圖 (*a*) 令限制式等於 0，並乘以 λ 再加上目標函數以建立一拉格朗齊表示式

$$Z = 4x^2 - 2xy + 6y^2 + \lambda(x + y - 72)$$

其一階條件爲

$$Z_x = 8x - 2y + \lambda = 0 \tag{5.10}$$
$$Z_y = -2x + 12y + \lambda = 0 \tag{5.11}$$
$$Z_\lambda = x + y - 72 = 0 \tag{5.12}$$

(5.10) 式減 (5.11) 式可得，

$$10x - 14y = 0 \qquad x = 1.4y$$

以 $x = 1.4y$ 代入 (5.12) 式

$$1.4y + y = 72 \qquad \bar{y} = 30$$

以 $\bar{y} = 30$ 代入前述各方程式可求得臨界值爲

$$\bar{x} = 42 \qquad \bar{y} = 30 \qquad \bar{\lambda} = -276$$

故

$$Z = 4(42)^2 - 2(42)(30) + 6(30)^2 - 276(40 + 32 - 72) = 9936$$

(*b*) 因爲 λ 爲負，故限制式之常數項每增加一單位，其目標函數值大約增加 276，亦即新的限制式下，$Z \cong 10,212$。

5.30 已知

$$z = 26x - 3x^2 + 5xy - 6y^2 + 12y$$

受制於 $3x + y = 170$ 重新作問題 5.29。

圖 (*a*) 拉格朗齊函數爲

$$Z = 26x - 3x^2 + 5xy - 6y^2 + 12y + \lambda(3x + y - 170)$$

故

$$Z_x = 26 - 6x + 5y + 3\lambda = 0 \tag{5.13}$$
$$Z_y = 5x - 12y + 12 + \lambda = 0 \tag{5.14}$$
$$Z_\lambda = 3x + y - 170 = 0 \tag{5.15}$$

(5.14) 式乘 3，然後以 (5.13) 式減此結果，可得

$$-21x + 41y = 10 \tag{5.16}$$

(5.15) 式乘 7 再加上 (5.16) 式，可得

$$48y = 1200 \qquad \bar{y} = 25$$

以 $\bar{y} = 25$ 代入上述各方程式可求得臨界值

$$\bar{x} = 48\tfrac{1}{3} \qquad \bar{y} = 25 \qquad \bar{\lambda} = 46\tfrac{1}{3}$$

故，$Z = -3159.54$。

(*b*) 因爲 λ 爲正，故限制式每增加一單位，其目標函數之值將減少約 46.33，亦即新的 $Z \cong -3205.86$。

5.31 已知 $z = 6x^2 - 8xy + 3y^2$，受制於 $x + 0.5y = 68$ 重新作問題 5.29 。

圖 (*a*)

$$Z = 6x^2 - 8xy + 3y^2 + \lambda(x + 0.5y - 68)$$

$$Z_x = 12x - 8y + \lambda = 0$$
$$Z_y = -8x + 6y + 0.5\lambda = 0$$
$$Z_\lambda = x + 0.5y - 68 = 0$$

解上述聯立式，可得 $\bar{x}=40$ ，$\bar{y} = 56$ ，$\bar{\lambda} = -32$ 與 $Z = 1088$ 。

(*b*) 因爲 $\lambda = -32$ ，故 $Z \cong 1120$ 。

5.32 於問題 5.29 中，如果限制式之常數項增加一單位，則受限制之最適值大約增加 276 ，即從 9936 增至 10,212 ，試以原始函數 $z = 4x^2 - 2xy + 6y^2$ 受制於新的限制式 $x + y = 73$ 檢查上述之估測值是否正確？

圖 拉格朗齊函數爲

$$Z = 4x^2 - 2xy + 6y^2 + \lambda(x + y - 73)$$

$$Z_x = 8x - 2y + \lambda = 0$$
$$Z_y = -2x + 12y + \lambda = 0$$
$$Z_\lambda = x + y - 73 = 0$$

聯立解爲 $\bar{x} = 42.58$ ，$\bar{y} = 30.42$ 與 $\bar{\lambda} = -279.8$ 。因此，$Z = 10,213.9$ ，與所估計之 10,212 相當接近。

5.33 有時候限制式可能是限制兩自變數間自成某一固定之比例，如 $x = 3y$ ，此時測量 λ 之效果將不具任何經濟意義，因爲此時如果限制式之常數項增加一單位，則兩變數固定之比例關係的限制條件，將遭到破壞，牢記此點，試對下列各式受制於固定比例之限制式下求其最適化。

圖 (*a*) $z = 4x^2 - 3x + 5xy - 8y + 2y^2$ ，受制於 $x = 2y$。

因爲 $x - 2y = 0$ ，拉格朗齊函數爲

$$Z = 4x^2 - 3x + 5xy - 8y + 2y^2 + \lambda(x - 2y)$$

$$Z_x = 8x - 3 + 5y + \lambda = 0$$
$$Z_y = 5x - 8 + 4y - 2\lambda = 0$$
$$Z_\lambda = x - 2y = 0$$

其聯立解爲，$\bar{x} = 0.5$ ，$\bar{y} = 0.25$ 與 $\bar{\lambda} = -2.25$ 。故，$Z = -1.75$

(*b*) $z = -5x^2 + 7x + 10xy + 9y - 2y^2$ ，受制於 $y = 5x$ 。

拉格朗齊函數爲 $Z = -5x^2 + 7x + 10xy + 9y - 2y^2 + \lambda(5x - y)$

$$Z_x = -10x + 7 + 10y + 5\lambda = 0$$
$$Z_y = 10x + 9 - 4y - \lambda = 0$$
$$Z_\lambda = 5x - y = 0$$

聯立解爲，$\bar{x} = 5.2$ ，$\bar{y} = 26$ 與 $\bar{\lambda} = -43$ 。故，$Z = 135.2$ 。

第六章

多變數函數之微分在經濟學上之應用

6.1 邊際生產力

資本的邊際實物產量（marginal physical product of capital，MPP_K）之定義爲，當只有資本發生微量之變動而其它生產要素之使用量固定不變，其產出之變動量謂之。已知一生產函數形如

$$Q = 36KL - 2K^2 - 3L^2$$

則其MPP_K即爲此函數對K取偏微分$\partial Q/\partial K$，故

$$MPP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = 36L - 4K$$

同樣地，勞動之邊際實物生產量，$MPP_L = \partial Q/\partial L = 36K - 6L$。

6.2 所得決定之乘數

偏導數的概念亦可以用來導出所得決定模型之各種乘數。已知

$$Y = C + I + G + (X - Z)$$

其中

$$C = C_0 + bY \qquad G = G_0 \qquad Z = Z_0$$
$$I = I_0 + aY \qquad X = X_0$$

由問題2.23知其均衡的所得水準爲

$$\bar{Y} = \frac{1}{1-b-a}(C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0) \tag{6.1}$$

在(6.1)式中對任一變數或參數取偏導數，可得該變數或參數之乘數，因此政府支出乘數爲，

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1-b-a}$$

而進口的乘數爲

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial Z_0} = -\frac{1}{1-b-a}$$

並且邊際投資傾向變動之乘數爲 $\partial \bar{Y}/\partial a$ ，由商數法則之方法可求得

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial a} = \frac{(1-b-a)(0)-(C_0+I_0+G_0+X_0-Z_0)(-1)}{(1-b-a)^2} = \frac{C_0+I_0+G_0+X_0-Z_0}{(1-b-a)^2}$$

此式可以另一種表示法，即 .

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial a} = \frac{1}{1-b-a}(C_0+I_0+G_0+X_0-Z_0)\left(\frac{1}{1-b-a}\right)$$

由（6.1）式知，可化簡爲

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial a} = \frac{\bar{Y}}{1-b-a}$$

6.3 偏彈性

需求的**所得彈性**（income elasticity of demand, ϵ_Y）乃測量所得變動某一百分比，而其它變數固定不變時，對於某一財貨需求變動之百分比。需求的**交叉彈性**（cross elasticity of demand ϵ_c）則測量一商品價格變動，而其它變數固定不變，以致引起另一種商品需求之變動量，已知需求函數

$$Q_1 = a - bP_1 + cP_2 + dY$$

式中Y＝所得，P_2＝替代財貨之價格，則需求的所得彈性爲

$$\epsilon_Y = \frac{\partial Q_1}{\partial Y}\left(\frac{Y}{Q_1}\right) = \frac{\partial Q_1}{Q_1} \div \frac{\partial Y}{Y}$$

而需求的交叉彈性爲

$$\epsilon_c = \frac{\partial Q_1}{\partial P_2}\left(\frac{P_2}{Q_1}\right) = \frac{\partial Q_1}{Q_1} \div \frac{\partial P_2}{P_2}$$

因爲一多變數函數有一個以上之彈性，這些彈性統稱爲**偏彈性**（partial elasticities）。

例題6.1

已知牛肉之需求爲

$$Q_b = 4850 - 5P_b + 1.5P_p + 0.1Y \qquad (6.2)$$

由於$Y = 10,000$，$P_b = 200$，且豬肉之價格，$P_p = 100$，故其(1)所得彈性(2)牛肉

需求之交叉彈性分別爲

(1)
$$\epsilon_Y = \frac{\partial Q_b}{Q_b} \div \frac{\partial Y}{Y} = \frac{\partial Q_b}{\partial Y}\left(\frac{Y}{Q_b}\right) \tag{6.3}$$

由（6.2）式知，
$$\frac{\partial Q_b}{\partial Y} = 0.1$$

而
$$Q_b = 4850 - 5(200) + 1.5(100) + 0.1(10{,}000) = 5000 \tag{6.4}$$

代入（6.3）式，$\epsilon_Y = 0.1(10{,}000/5000) = 0.2$ 。

由於 $\epsilon_Y < 1$ ，故此財貨不具所得彈性，即當國民所得增加某一比例時，則此財貨之需求增加的比例小於所得增加之比例，因此，此財貨之市場佔有量將隨經濟之擴張而減少，故可知由需求的所得彈性可瞭解一市場的潛在成長趨勢。

(2)
$$\epsilon_c = \frac{\partial Q_b}{Q_b} \div \frac{\partial P_p}{P_p} = \frac{\partial Q_b}{\partial P_p}\left(\frac{P_p}{Q_b}\right)$$

由（6.2）式知，$\partial Q_b / \partial P_p = 1.5$ ；且由（6.4）式知，$Q_b = 5000$ 。故

$$\epsilon_c = 1.5\left(\frac{100}{5000}\right) = 0.03$$

就其替代財貨，諸如牛肉與猪肉而言，其 $\partial Q_1 / \partial P_2 > 0$ 因而其交叉彈性爲正，反之，互補財貨，則 $\partial Q_1 / \partial P_2 < 0$ 因而其交叉彈性爲負，最後，如果 $\partial Q_1 / \partial P_2 = 0$ ，則財貨之間毫無相關。

例題6.2

繼續例 1 之問題，假若猪肉價格上漲 10 % 則對牛肉需求之變動量爲：

$$\epsilon_c = \frac{\partial Q_b}{Q_b} \div \frac{\partial P_p}{P_p}$$

重新整理各項並將已知參數代入

$$\frac{\partial Q_b}{Q_b} = \epsilon_c \frac{\partial P_p}{P_p} = (0.03)(0.10) = 0.003$$

亦即對牛肉需求將變動 0.3 % 。

6.4 自變數之變化

於經濟學中，我們往往必須測量自變數之變動（勞動僱用量、資本使用量、銷售量等）所引起依變數（成本、收益、利潤）之變動效果。如果，變動量是相對小時，則可用微分來測量其效果，因此，如果 $z = f(x, y)$，則 x 微量變動對 z 之效果可經

由取偏微分求得，即

$$dz = z_x\,dx$$

如果自變數之變動較大，則影響依變數之效果近似於偏導數乘以自變數之變動量，即

$$\Delta z \cong z_x \Delta x$$

如果原始函數 $z = f(x, y)$ 爲線性

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

而其變數變動之效果則爲

$$\Delta z = z_x\,\Delta x$$

例題6.3

廠商之成本與其產出 x 與 y 有關，設其函數關係爲

$$\mathrm{TC} = x^2 - 0.5xy + y^2$$

當產出 x 作微量變動時其成本之增加效果爲 TC 對 x 取微分，即

$$d\mathrm{TC} = (2x - 0.5y)\,dx$$

而當 x 產出變動較大時，其 TC 之變動效果爲 TC 對 x 之偏導數乘以 x 之變動量，以數學式表示如，

$$\Delta\mathrm{TC} \cong \frac{\partial \mathrm{TC}}{\partial x}\Delta x \qquad (6.5)$$

因爲 $\partial \mathrm{TC}/\partial x = x$ 之邊際成本（MC_x），(6.5) 式可改寫爲

$$\Delta\mathrm{TC} \cong \mathrm{MC}_x\,\Delta x$$

如果開始時，$x = 100$，$y = 60$ 且 $\Delta x = 3$，則

$$\Delta\mathrm{TC} \cong [2(100) - 0.5(60)](3) \cong 510$$

例題6.4

假設於 6.2 節中，$b = 0.7$，$a = 0.1$，且 $\bar{Y} = 1200$，則對各自變數變動效果可以微分予以測量，其偏導數爲

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1 - b - a}$$

而偏微分爲

$$d\bar{Y} = \frac{1}{1-b-a}\,dG_0$$

於一線性模型（如此例）中，其斜率固定不變。

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} = \frac{\Delta \bar{Y}}{\Delta G_0}$$

因此

$$\Delta \bar{Y} = \frac{1}{1-b-a}\,\Delta G_0$$

如果政府支出增加 $100，則

$$\Delta \bar{Y} = \frac{1}{1-0.7-0.1}(100) = 500$$

6.5 經濟學中多變數函數之極大化與極小化

食品加工業者經常銷售不同品級之產品諸如品質、標準型態、經濟特性等等；有些產品是以自己之品牌問市，有些則以它連鎖店之品牌出售。例如服裝設計業者往往有一種最佳的品牌，同時亦製造一些較便宜之仿製品，在這種情況下，無論是極大化利潤或極小化成本，可能均包含多個變數，因而有關多變數函數最適化之基本法則（參見 5.7 節）是必須的。

例題6.5

一廠商生產兩財貨 x 與 y 其利潤函數爲

$$\pi = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14$$

爲求得每一種財貨在利潤極大下之生產水準，並反過來檢查所求出之利潤是否爲最大，其步驟如下：

(1) 首先取一階偏導數並令爲 0，而解其聯立式

$$\pi_x = 64 - 4x + 4y = 0 \tag{6.6}$$

$$\pi_y = 4x - 8y + 32 = 0 \tag{6.7}$$

求上式之其聯立解，可得 $\bar{x} = 40$ 與 $\bar{y} = 24$。

(2) 然後取二階直接偏導數可知兩個偏導數在利潤極大化之情形下必須同時爲負，由 (6.6) 與 (6.7) 式可得

$$\pi_{xx} = -4 \qquad \pi_{yy} = -8$$

(3) 最後求取交叉偏導數以確知是否，$\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$，由 (6.6) 與 (6.7) 式可得 $\pi_{xy} = 4 = \pi_{yx}$，因此

$$\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$$
$$(-4)(-8) > (4)^2$$
$$32 > 16$$

故在 $\bar{x} = 40$ 與 $\bar{y} = 24$ 時利潤確實最大，在該點上，$\pi = 1650$ 。

例題6.6

獨佔性競爭之生產者必須能夠決定其利潤極大之售價，假設某一生產者出售兩種不同品牌之產品，其需求函數分別爲

$$Q_1 = 14 - 0.25P_1 \tag{6.8}$$
$$Q_2 = 24 - 0.5P_2 \tag{6.9}$$

而聯合成本函數爲

$$TC = Q_1^2 + 5Q_1Q_2 + Q_2^2 \tag{6.10}$$

利潤極大之產出水準及單位售價之求取步驟如下：

首先，以 Q_1 與 Q_2 建立其利潤函數（π），因爲 π =總收益（TR）減總成本（TC），而此廠商之總收益爲 $P_1Q_1 + P_2Q_2$ ，故此廠商之利潤函數爲

$$\pi = P_1Q_1 + P_2Q_2 - TC$$

以（6.10）式代入 π 函數，

$$\pi = P_1Q_1 + P_2Q_2 - (Q_1^2 + 5Q_1Q_2 + Q_2^2) \tag{6.11}$$

其次求（6.8）與（6.9）式之逆函數，即以 Q 求解 P，因而從（6.8）式可知

$$P_1 = 56 - 4Q_1 \tag{6.12}$$

且由（6.9）式得

$$P_2 = 48 - 2Q_2 \tag{6.13}$$

代入（6.11）式，

$$\begin{aligned}\pi &= (56 - 4Q_1)Q_1 + (48 - 2Q_2)Q_2 - Q_1^2 - 5Q_1Q_2 - Q_2^2 \\ &= 56Q_1 - 5Q_1^2 + 48Q_2 - 3Q_2^2 - 5Q_1Q_2 \end{aligned} \tag{6.14}$$

然後以吾人熟悉之法則極大化（6.14）式：

$$\pi_1 = 56 - 10Q_1 - 5Q_2 = 0 \qquad \pi_2 = 48 - 6Q_2 - 5Q_1 = 0$$

求其聯立解，可得 $\bar{Q}_1 = 2.75$ 與 $\bar{Q}_2 = 5.7$ 。

再取二階導數以確認 π 是否爲極大：

$$\pi_{11} = -10 \qquad \pi_{22} = -6 \qquad \pi_{12} = -5 = \pi_{21}$$

由於兩個二階直接偏導數均爲負，且 $\pi_{11}\pi_{22} > (\pi_{12})^2$ ，故此函數在臨界點時確爲極

大值。

最後以 $\overline{Q}_1 = 2.75$ 與 $\overline{Q}_2 = 5.7$ 代入（6.12）與（6.13）式，求得利潤極大之單位售價，

$$P_1 = 56 - 4(2.75) = 45 \qquad P_2 = 48 - 2(5.7) = 36.6$$

品牌 1 之售價爲 $45，品牌 2 之售價爲 $36.6，而其銷售量則分別爲 2.75 與 5.7 單位。再由（6.11）或（6.14）式可知其最大利潤爲

$$\pi = 45(2.75) + 36.6(5.7) - (2.75)^2 - 5(2.75)(5.7) - (5.7)^2 = 213.94$$

6.6 有限制條件之經濟函數的極大與極小

有關經濟問題之解往往會受制於某些限制式（如，受制於預算限制求效用之極大，或受制於諸如最小產出配額限制下求成本最小），處理諸如此類之問題必須使用 5.8 節所討論之拉格朗齊函數。

例題 6.7

假設某一廠商生產 x 與 y 財貨，其成本函數爲 $c = 8x^2 - xy + 12y^2$ 且由於契約之規定，它生產 x 與 y 總共 42 單位，即 $x + y = 42$，試求此廠商成本最小之臨界點。

首先令限制式等於 0，並以 λ 乘以此限制式以建立拉格朗齊函數，

$$C = 8x^2 - xy + 12y^2 + \lambda(x + y - 42)$$

取一階偏導數，

$$C_x = 16x - y + \lambda = 0$$
$$C_y = -x + 24y + \lambda = 0$$
$$C_\lambda = x + y - 42 = 0$$

求上式之聯立解，可得 $\overline{x} = 25$，$\overline{y} = 17$ 與 $\overline{\lambda} = -383$，由於 $\overline{\lambda} = -383$ 故限制式或生產配額每增加一單位，其成本將大約增加 $383，有關其二階條件之檢驗，請參見 12.4 節與問題 12.32(a)。

6.7 不等限制式

根據某些經濟學家之研究，認爲大公司所追求的並非利潤極大而是在可接受的利潤水準下追求總收益最大。已知 $f(x, y)$ 函數，受制於限制式 $g(x, y) \geq 0$，則其拉格朗齊之乘數方法可改用不等式之形式表現之，解決此問題首先假設其限制式爲一等式，即，$g(x, y) = 0$，然後以熟悉的拉格朗齊方法（參見 5.8 節）求解，並應用下列簡單之步驟：

I. 受制於 $g(x, y) \geq 0$ ，求極大化之問題。

(1) 如果 $\lambda > 0$ ，則限制式具實質之限制之功能，故此受限制之極值可予求出。

(2) 如果 $\lambda \leq 0$ ，則限制式不具限制功能，因而可以忽略此限制式，而逕以目標函數求其極大化。

II. 受制於 $g(x, y) < 0$ ，求極大化之問題。

(1) 如果 $\lambda > 0$ ，則限制式不具限制功能，此時只要獨立地對目標函數求取最大值。

(2) 如果 $\lambda \leq 0$ ，則限制式發揮作用，因而可求得受限制之極值。

III. 受制於 $g(x, y) \geq 0$ 求極小化之問題。

(1) 如果 $\lambda > 0$ ，則限制式不具作用，因而可以忽略此限制式而逕以目標函數求其極小值。

(2) 如果 $\lambda \leq 0$ ，則限制式發揮作用，因而可求得受限制之極值。

IV. 受制於 $g(x, y) \leq 0$ 求極小化之問題。

(1) 如果 $\lambda > 0$ ，則限制式發揮作用，因而可求得受限制之極小值。

(2) 如果 $\lambda \leq 0$ ，則限制式不具作用，因而可以忽略此限制而逕以目標函數求其極小值。

例題6.8

已知：$\pi = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14$ 受制於 $x + y \leq 50$ 。

爲了極大化此函數，假設其限制式爲 $x + y = 50$ 並構成拉格朗齊表示式

則

$$\Pi = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14 + \lambda(x + y - 50)$$

$$\Pi_x = 64 - 4x + 4y + \lambda = 0$$

$$\Pi_y = 4x - 8y + 32 + \lambda = 0$$

$$\Pi_\lambda = x + y - 50 = 0$$

由此可求得 $\bar{x} = 31.6$ ，$\bar{y} = 18.4$ ，$\bar{\lambda} = -11.2$ 與 $\pi = 1571.6$ 。

受制於 $g(x, y) \leq 0$ 之極大化問題且其 $\lambda < 0$，故此時限制式發揮作用，而其受限制下之極大值爲 $\pi = 1571.6$ 而例 5 中所示未受限制之極值爲 $\pi = 1650$ 。

例題6.9

如果已知函數爲例 8 所示者，但受制於 $x + y \leq 79$ ，則其求極大值之步驟如下:

首先，假設 $x + y = 79$ ，則其拉格朗齊函數爲

$$\Pi = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14 + \lambda(x + y - 79)$$

因而

$$\Pi_x = 64 - 4x + 4y + \lambda = 0$$

$$\Pi_y = 4x - 8y + 32 + \lambda = 0$$

$$\Pi_\lambda = x + y - 79 = 0$$

因此，$\bar{x} = 49$，$\bar{y} = 30$，$\bar{\lambda} = 12$ 且 $\pi = 1560$。

由於 $\lambda > 0$，故此限制式不具作用，因而求解利潤之極大只需就其目標函數予以極大化即可，與例 5 之未受限制之極大值 $\pi = 1650$ 比較可知其極大值相同

習題與解答

邊際的概念

6.1 試就下列各生產函數 (Q) 中求每一投入或生產要素之邊際實物生產量。

圖 (*a*) $Q = 6x^2 + 3xy + 2y^2$

$$\text{MPP}_x = \frac{\partial Q}{\partial x} = 12x + 3y$$

$$\text{MPP}_y = \frac{\partial Q}{\partial y} = 3x + 4y$$

(*b*) $Q = 0.5K^2 - 2KL + L^2$

$$\text{MPP}_K = K - 2L$$
$$\text{MPP}_L = 2L - 2K$$

(*c*) $Q = 20 + 8x + 3x^2 - 0.25x^3 + 5y + 2y^2 - 0.5y^3$

$$\text{MPP}_x = 8 + 6x - 0.75x^2$$
$$\text{MPP}_y = 5 + 4y - 1.5y^2$$

(*d*) $Q = x^2 + 2xy + 3y^2 + 1.5yz + 0.2z^2$

$$\text{MPP}_x = 2x + 2y$$
$$\text{MPP}_y = 2x + 6y + 1.5z$$
$$\text{MPP}_z = 1.5y + 0.4z$$

6.2 (*a*) 假設問題 6.1(*a*) 中 $\bar{y} = 4$，試求 $x = 5$ 與 $x = 8$ 之 MPP_x (*b*)如果在 $\bar{x} = 5$，$\bar{y} = 4$ 之邊際收益爲 \$3 計算第 5 單位 x 之邊際收益產出。

圖 (*a*) $\text{MPP}_x = 12x + 3y$

當 $x = 5$, $\bar{y} = 4$, $\text{MPP}_x = 12(5) + 3(4) = 72$

當 $x = 8$, $\bar{y} = 4$, $\text{MPP}_x = 12(8) + 3(4) = 108$.

(*b*) $\text{MRP}_x = \text{MPP}_x(\text{MR})$

當 $\bar{x} = 5$, $\bar{y} = 4$, $\text{MRP}_x = (72)(3) = 216$.

6.3 (*a*) 當成本函數爲 $c = 3x^2 + 7x + 1.5xy + 6y + 2y^2$，試求此廠商在各個產量下之邊際成本，(*b*) 當 $x = 5$，$\bar{y} = 3$ 時 x 之邊際成本爲何？

圖 (*a*)

$$\text{MC}_x = 6x + 7 + 1.5y$$
$$\text{MC}_y = 1.5x + 6 + 4y$$

(*b*) 當 $x = 5$ 而 y 固定爲 3 時，x 之邊際成本爲

$$\text{MC}_x = 6(5) + 7 + 1.5(3) = 41.5$$

所得決定之乘數

6.4 已知一個三部門之所得決定模型如下：

$$Y = C + I_0 + G_0 \qquad Yd = Y - T \qquad C_0,\ I_0,\ G_0,\ T_0 > 0 \qquad 0 < b,\ t < 1$$
$$C = C_0 + bYd \qquad T = T_0 + tY$$

試求出下列各項變動所得變動方向及大小 (*a*) 政府支出變動，(*b*) 總額稅變動，(*c*) 均衡所得水準下之稅率變動，簡言之，即計算出政府支出乘數，自發性

稅收乘數及稅率乘數。

解 爲求取各種不同的乘數，首先求解均衡的所得水準如下：

$$Y = C_0 + bY - bT_0 - btY + I_0 + G_0$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{1-b+bt}(C_0 - bT_0 + I_0 + G_0) \tag{6.15}$$

然後取適當之偏導數。

(*a*)
$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1-b+bt}$$

因爲 $0 < b < 1$，$\partial \bar{Y} / \partial G_0 > 0$，則政府支出每增加一單位均衡所得水準將增加 $1/(1-b+bt)$。

(*b*)
$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial T_0} = \frac{-b}{1-b+bt} < 0$$

而自發性稅收每增加一單位其國民所得將減少 $b/(1-b+bt)$。

(*c*) 因爲在 (6.15) 式之分子中出現 t，故必須應用商數法則。

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} = \frac{(1-b+bt)(0) - (C_0 - bT_0 + I_0 + G_0)(b)}{(1-b+bt)^2}$$

$$= \frac{-b(C_0 - bT_0 + I_0 + G_0)}{(1-b+bt)^2} = \frac{-b}{1-b+bt}\left(\frac{C_0 - bT_0 + I_0 + G_0}{1-b+bt}\right)$$

因此從 (6.15) 式知
$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} = \frac{-b\bar{Y}}{1-b+bt} < 0$$

即稅率每增加一單位將使國民所得減少之數額爲稅率乘數。

6.5 已知一簡單模型如下：

$$Y = C_0 + I_0 + G_0 \qquad Yd = Y - T$$
$$C = C_0 + bYd \qquad T = T_0$$

其中稅額多寡並不由所得決定，試計算政府支出每變動一單位剛好被一單位稅收之變動抵銷之均衡所得水準變動的效果。亦即，計算一經濟體系內只有自發性課稅時之平衡預算乘數爲

$$Y = C_0 + b(Y - T_0) + I_0 + G_0$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{1-b}(C_0 - bT_0 + I_0 + G_0)$$

解 因此，政府支出乘數爲

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1-b} \tag{6.16}$$

而租稅乘數爲

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial T_0} = \frac{-b}{1-b} \tag{6.17}$$

故平衡預算效果剛好爲政府支出增加一單位與稅收增加一單位之效果的總稅，即

$$\Delta \bar{Y} = \frac{1}{1-b} + \left(\frac{-b}{1-b}\right) = \frac{1}{1-b} - \frac{b}{1-b} = \frac{1-b}{1-b} = 1$$

故，當政府支出與稅收作同額之變動時，對均衡所得水準之變動效果爲正，且其變動數額剛好等於政府支出與稅收之變動額，亦即，此例之乘數剛好爲＋1。

6.6 已知

$$Y = C + I_0 + G_0 \qquad Yd = Y - T$$
$$C = C_0 + bYd \qquad T = T_0 + tY$$

式中稅收爲所得之函數，試說明政府支出與自發性稅收（T_0）同時變動一單位對均衡所得水準之變動效果爲何？亦即，計算一經濟體系內稅收爲所得的函數時，其平衡預算乘數。

圖 由（6.15）式知，$\bar{Y} = [1/(1-b+bt)](C_0 - bT_0 + I_0 + G_0)$。故

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1-b+bt} \tag{6.18}$$

且

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial T_0} = \frac{-b}{1-b+bt} \tag{6.19}$$

一單位政府支出增加與一單位自發性稅收增加對Y之聯合效果爲（6.18）與(6.19)式之總和，因此

$$\Delta \bar{Y} = \frac{1}{1-b+bt} + \left(\frac{-b}{1-b+bt}\right) = \frac{1-b}{1-b+bt}$$

因此$(1-b) < (1-b+bt)$故其效果爲正但小於1，當稅收與所得正相關時，政府支出與自發性稅收同額變動對均衡所得水準之變動效果爲正，但小於原先政府支出之變動量，亦即其乘數小於1，因爲稅收之總變動量（$\Delta T = \Delta T_0 + t\Delta Y$）大於$G_0$之變動量。

6.7 已知

$$Y = C + I_0 + G_0 + X_0 - Z \qquad T = T_0 + tY$$
$$C = C_0 + bYd \qquad Z = Z_0 + zYd$$

式中所有自變數均爲正值，且$0 < b$，z，$t < 1$，試求下列各項變動對均衡所得之影響，(*a*) 出口，(*b*) 自發性進口，(*c*) 自發性稅收，簡言之，求出口，自發性進口與自發性稅收乘數。[注意，$Z = f(Yd)$，]

圖 均衡的所得水準爲

$$Y = C_0 + b(Y - T_0 - tY) + I + G_0 + X_0 - Z_0 - z(Y - T_0 - tY)$$
$$\bar{Y} = \frac{1}{1-b+bt+z-zt}(C_0 - bT_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0 + zT_0)$$

(a) $$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial X_0} = \frac{1}{1-b+bt+z-zt} > 0$$

因爲 $0 < b$ ，$z < 1$ 。故出口增加一單位對 $\bar{Y}$ 之變動效果爲正，且數額等於其乘數。

(b) $$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial Z_0} = \frac{-1}{1-b+bt+z-zt} < 0$$

自發性進口增加一單位將導致 $\bar{Y}$ 減少，

(c) $$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial T_0} = \frac{z-b}{1-b+bt+z-zt} \gtrless 0$$

因爲邊際進口傾向（ z ）往往小於邊際消費傾向（ b ），即 $z < b$ ，或 $z - b < 0$ ，故自發性稅收之增加將導致國民所得減少，如（6.19）式所示，但由於分子中有 z ，故具有緩和所得減少之效果 亦即，當邊際進口傾向爲正時，稅收增加將減少進口之現金支出因而對於稅收增加致所得減少之影響，正的邊際進口傾向具有反效果。

6.8 試求問題 6.7 中邊際進口傾向變動對 $\bar{Y}$ 之影響效果。

圖
$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial z} = \frac{(1-b+bt+z-zt)(T_0) - (C_0 - bT_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0 + zT_0)(1-t)}{(1-b+bt+z-zt)^2}$$
$$= \frac{T_0}{1-b+bt+z-zt} - \frac{\bar{Y}(1-t)}{1-b+bt+z-zt}$$
$$= \frac{-[\bar{Y} - (T_0 + t\bar{Y})]}{1-b+bt+z-zt} = \frac{-\bar{Y}d}{1-b+bt+z-zt} < 0$$

6.9 $Y = C + I_0 + G_0$　　$Yd = Y - T$　　$C_0 = 100$　　$I_0 = 90$　　$b = 0.75$
$C = C_0 + bYd$　　$T = T_0 + tY$　　$G_0 = 330$　　$T_0 = 240$　　$t = 0.20$

(a) 均衡之所得水準（ $\bar{Y}$ ）爲何？當 (b) 政府支出增加 \$50 ，(c) 自發性稅收增加 \$50 對 $\bar{Y}$ 之影響效果又爲何？

圖 (a) 由（6.15）式知，
$$\bar{Y} = \frac{1}{1-b+bt}(C_0 - bT_0 + I_0 + G_0)$$
$$= \frac{1}{1-0.75+0.75(0.20)}[100 - 0.75(240) + 90 + 330]$$
$$= \frac{1}{0.40}(100 - 180 + 90 + 330) = 2.5(340) = 850$$

(b) 如果政府支出增加 \$50 ，則
$$\Delta \bar{Y} = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0}\Delta G_0 = \frac{1}{1-b+bt}(50) = 2.5(50) = 125$$

(c) 如果自發性稅收（ T_0 ）增加 \$50 ，則
$$\Delta \bar{Y} = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial T_0}\Delta T_0 = \frac{b}{1-b+bt}(50) = \frac{-0.75}{1-0.75+0.75(0.20)}(50) = -1.875(50) = -93.75$$

6.10 如果於問題 6.9(*a*) 中，充分就業的所得水準 ($Y_{f.}$) 爲 1000 ，並且政府想要達到此目標，則將如何改變其 (*a*) 政府支出或 (*b*) 自發性稅收？

圖 (*a*) 目前之所得水準爲 850 而充分就業之所得水準爲 1000 ，故政府欲填補之差距 $\Delta\bar{Y} = 150$ ，以此代入問題 6.9(*b*) 之公式，

$$\Delta\bar{Y} = \frac{\partial\bar{Y}}{\partial G_0}\Delta G_0$$

$$150 = 2.5\,\Delta G_0 \qquad \Delta G_0 = 60$$

故增加政府支出 60 將可使所得提高 150 。

(*b*) 如果政府欲以改變自發性稅收以達到充分就業，則可由問題 6.9(*c*) 得知，

$$\Delta\bar{Y} = \frac{\partial\bar{Y}}{\partial\bar{T}_0}\Delta T_0$$

$$150 = -1.875\,\Delta T_0 \qquad \Delta T_0 = -80$$

此時政府必須減少自發性稅收 80 。

6.11 試解釋下列各項對政府赤字之影響效果 (*a*) 如果採取問題 6.10 之政策 *a* ，(*b*) 反之，如果採取政策 *b* 呢？

圖 (*a*) 政府之財務收支餘額爲其收入 (T) 減支出 (G) ，當所得水準爲原先之850

$$T = 240 + 0.2(850) = 410 \qquad G_0 = 330 \qquad T - G_0 = 410 - 330 = 80$$

此時政府有盈餘 80 。

今若政府增加支出 60 ，所得將因而提高，並導致稅收增加，亦即此時 $\Delta\bar{Y} = 150$ ，連帶地 $\Delta T = 0.2(150) = 30$ 。由於支出增加 60 而收入只增加 30 ，故政府爲刺激經濟以達到充分就業，所必須支付之淨成本只爲 $30。在此新的 $\bar{Y} = 1000$ 時

$$T = 240 + 0.2(1000) = 440 \qquad G_0 = 330 + 60 = 390 \qquad T - G_0 = 440 - 390 = 50$$

亦即政府盈餘由 $80 減至 $50 。

(*b*) 如果政府採取的政策是減稅，其幅度爲 80 ，但此時對於所得之刺激效果則爲 $150 ，並因而反使稅收增加 $\Delta T = 0.2(150) = 30$ 。因此，利用減稅以刺激經濟達到充分就業之淨成本爲 $50 。此外，政府盈餘則減少爲 $ 30 ：

$$T = 160 + 0.2(1000) = 360 \qquad G_0 = 330 \qquad T - G_0 = 360 - 330 = 30$$

6.12 (*a*) 於問題6.9中，如果比例稅提高 10 %，則對 $\bar{Y}$ 之影響效果爲何？(*b*) 如果政府欲以改變邊際稅率以達到 $Y_{f.} = 1000$ 則需如何改變 t ？

圖 (*a*) 如果比例稅增加10％，則

$$\Delta t = 0.10(0.20) = 0.02$$

所得之變動爲

$$\Delta \bar{Y} = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial t}\Delta t$$

由問題6.4(*c*)可知，

$$\Delta \bar{Y} \cong \frac{-b\bar{Y}}{1-b+bt}(0.02)$$

由於參數之變動，不同於自變數之變動，它將改變乘數值，此時乘數效果將只是近似於（而非等於）其變動之效果，亦即，

$$\Delta \bar{Y} \cong \frac{-0.75(850)}{0.4}(0.02) = -31.88$$

(*b*) 如果政府欲提高$\bar{Y}$ 150，則以$\Delta \bar{Y} = 150$代入上述方程式，

$$150 \cong \frac{-0.75(850)}{0.4}\Delta t$$

$$\Delta t \cong -0.09$$

故稅率應減少約0.09，亦即，新的稅率大約爲11％（0.20 − 0.09 = 0.11）。

6.13 已知

$$Y = C + I_0 + G_0 + X_0 - Z \qquad T = T_0 + tY$$
$$C = C_0 + bYd \qquad Z = Z_0 + zYd$$

且

$$b = 0.9 \qquad t = 0.2 \qquad C_0 = 125$$
$$X_0 = 150 \qquad Z_0 = 55 \qquad I_0 = 92.5$$
$$z = 0.15 \qquad T_0 = 150 \qquad G_0 = 600$$

試計算 (*a*) 均衡的所得水準，(*b*) 出口（X_0）增加60對$\bar{Y}$之影響效果，(*c*) 進口（Z_0）增加30對$\bar{Y}$之影響？

圖 (*a*) 由問題6.7知，

$$\bar{Y} = \frac{1}{1-b+bt+z-zt}(C_0 - bT_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0 + zT_0)$$
$$= \frac{1}{1-0.9+0.9(0.2)+0.15-0.15(0.2)}[125-0.9(150)+92.5+600+150-55+22.5]$$
$$= 2.5(800) = 2000$$

(*b*)
$$\Delta \bar{Y} = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial X_0}\Delta X_0 = \frac{1}{1-b+bt+z-zt}(60) = 2.5(60) = 150$$

(*c*)
$$\Delta \bar{Y} = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial Z_0}\Delta Z_0 = \frac{-1}{1-b+bt+z-zt}(30) = -2.5(30) = -75$$

6.14 於問題 6.13 中，如果充分就業的所得水準爲 2075，(*a*)政府應增加多少支出方能達到此水準，(*b*) 若減稅應減少若干稅收才能達到相同之效果？

圖 (*a*) 政府支出增加對國民所得之影響爲

$$\Delta \bar{Y} = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} \Delta G_0$$

以 $\Delta \overline{Y} = 75$ 代入，

$$75 = \frac{1}{1 - b + bt + z - zt} \Delta G_0 = 2.5 \, \Delta G_0 \qquad \Delta G_0 = 30$$

(*b*)

$$\Delta \bar{Y} = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial T_0} \Delta T_0$$

$$75 = \frac{z - b}{1 - b + bt + z - zt} \Delta T_0 = -1.875 \, \Delta T_0 \qquad \Delta T_0 = -40$$

爲達充分就業政府必須減稅 40 。

6.15 於問題 6.14 中，如果政府以 (*a*) 增加支出，(*b*)減稅以達到充分就業之所得水準，則政府赤字分別爲多少？

圖 (*a*) 如果政府支出增加 30，則開始時政府赤字增加 30，然而此時所得亦將增加 75，即 $\Delta \overline{Y} = 75$，故稅收亦將增加 $\Delta T = 0.2(75) = 15$，因此，政府若將採增加支出之政策以達充分就業之所得水準其淨成本（亦即赤字增加）爲 \$15（30 − 15 = 15）。

(*b*) 如果政府減稅 40，則開始時政府赤字增加 40，但此時所得亦即增加 75，並促使稅收增加 15，因此，政府若採減稅政策以達到充分就業之所得水準，其淨成本（即赤字增加）爲 25（40 − 15 = 25）。

6.16 於問題 6.14 中，試計算 (*a*) 政府支出增加，(*b*) 減稅之國際收支平衡表（balance of payment, B/P）。

圖 (*a*) 因爲 $B/P = X - Z$，代入問題 6.13，

$$B/P = X_0 - (Z_0 + zYd) = X_0 - Z_0 - zY + zT_0 + ztY \qquad (6.20)$$

當政府支出增加 30，$\Delta \overline{Y} = 75$。因爲 Y 爲 (6.20) 式右邊各項唯一可變動者，故

$$\Delta(B/P) = -z(75) + zt(75)$$

以 $z = 0.15$，$zt = 0.03$ 代入可得，$\Delta(B/P) = -9$。

(*b*) 當政府減稅爲 40 時，$\Delta \overline{Y} = 75$，由 (6.20) 式可知，

$$\Delta(B/P) = -z(75) + z(40) - zt(75) = -15$$

因爲減稅比增加政府支出導致可支用所得（disposal income）增加較多，因而對於進口之需求較高，以致其國際收支之逆差較大。

6.17 於問題 6.13 中，若邊際進口傾向降低 1 %，試估算其對 $\bar{Y}$ 之影響效果，

$$\Delta\bar{Y} \cong \frac{\partial \bar{Y}}{\partial z}\Delta z$$

圖 以問題 6.8 之 $\dfrac{\partial \bar{Y}}{\partial z}$ 代入，

$$\Delta\bar{Y} = \frac{-\bar{Y}d}{1-b+bt+z-zt}\Delta Z$$

其中 $$\bar{Y}d = \bar{Y} - T_0 - t\bar{Y} = 2000 - 150 - 0.2(2000) = 1450$$

因此， $$\Delta\bar{Y} = \frac{-1450}{0.4}(-0.01) = +36.25$$

比較靜態分析

6.18 已知傳統之供、需函數分別爲

供給： $$P = -g + hQ \qquad (g, h > 0) \tag{6.21}$$

需要： $$P = u - vQ \qquad (u, v > 0) \tag{6.22}$$

(*a*) 試求均衡價格（$\bar{P}$），(*b*) 試說明四個參數之變動分別對均衡價格之影響，並以傳統經濟學之表示方法，畫圖說明此變動情形。

圖 (*a*) 爲求解 $\bar{P}$，令 $s = d$，而解得均衡之產出水準（$\bar{Q}$），然後，以 $\bar{Q}$ 代入(6.21)或(6.22)式以解 $\bar{P}$，

$$\begin{aligned} -g + hQ &= u - vQ \\ hQ + vQ &= g + u \\ Q &= \frac{g+u}{h+v} \end{aligned} \tag{6.23}$$

以(6.23)式代入(6.21)式，

$$\begin{aligned} P &= -g + h\left(\frac{g+u}{h+v}\right) = -g + \frac{gh+hu}{h+v} \\ &= \frac{-gh - gv + gh + hu}{h+v} = \frac{hu - gv}{h+v} \end{aligned}$$

(*b*) 爲求得每一參數微量變動對 $\bar{P}$ 之影響，我們只需各別取其偏導數，亦即

(1) $$\frac{\partial \bar{P}}{\partial g} = \frac{(h+v)(-v) - (hu - gv)(0)}{(h+v)^2} = \frac{-v}{h+v}$$

因爲所有參數均爲正，故分子出現之負號將使得 $\partial P / \partial g < 0$，如圖6-1(*a*)所示者，在增大維度之座標圖上，由於(6.21)式中 g 增加，使得 $-g$ 變小而縱軸截距變得更低，亦即供給曲線將由 S_1 往右平行移動至 S_2，因而均衡之價格將降至 P_2。

(2) $$\frac{\partial \bar{P}}{\partial h} = \frac{(h+v)(u) - (hu - gv)(1)}{(h+v)^2} = \frac{v(g+u)}{(h+v)^2} > 0$$

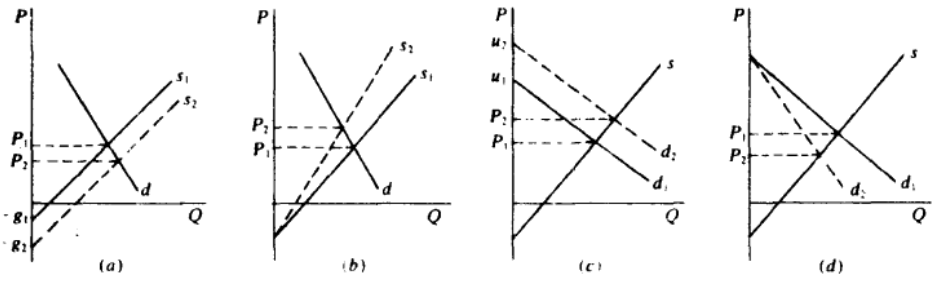


圖 6-1

(6.21) 式之 h 增加使得供給曲線變得較陡，因而均衡價格上昇，參見圖 6-1 (*b*)。

(3) $$\frac{\partial \bar{P}}{\partial u} = \frac{(h+v)(h) - (hu - gv)(0)}{(h+v)^2} = \frac{h}{h+v} > 0$$

(6.22) 式之 u 增加，將導致需求曲線之縱軸截距上升，並使得需求曲線往右平行移動至 d_2，因而 $\bar{P}$ 上升。參見圖 6-1 (*c*)。

(4) $$\frac{\partial \bar{P}}{\partial v} = \frac{(h+v)(-g) - (hu - g)(1)}{(h+v)^2} = \frac{-h(g+u)}{(h+v)^2} < 0$$

(6.22) 式之 v 增加，使得需求曲線斜率之絕對值變大，亦即變得較陡且往左移動，則均衡價格將跌至 P_2，參見圖 6-1 (*d*)。

6.19 假設大衆欲保定額之通貨（currency）$\bar{C}$ 與定期存款（time deposit）$\overline{TD}$，且貨幣供給（M_s）之公式可寫爲

$$M_s = \bar{C} - \frac{r_t \overline{TD}}{r_d} + \frac{R}{r_d}$$

其中 R = 準備金，而 r_t 與 r_d 分別爲定期存款與活期存款（demand deposit）之法定準備（reserve requirement），(*a*) 準備金變動對貨幣供給之影響如何？(*b*) 如果 $r_d = 0.25$，而準備金增加 1500 萬，則貨幣供給變動若干？

圖 (*a*) $\dfrac{\partial M_s}{\partial R} = \dfrac{1}{r_d}$　　(*b*) $\Delta M_s = \dfrac{\partial M_s}{\partial R}\Delta R = \dfrac{1}{0.25}(15) = 60$

6.20 (*a*) 當中央銀行改變活期存款之法定準備率時對貨幣供給有何影響？(*b*) 如果 $R = 2000$ 萬，$\overline{TD} = 200$ 萬且 $r_t = 0.15$ 則 r_d 由 0.25 降至 0.2 時對貨幣供給有何影響？(*c*) 試檢查 (*b*) 之答案是否正確？

圖 (*a*) 因爲 r_d 位於貨幣方程式中之分母，故一簡單之技巧是對 $1/r_d$ 取偏導數，即

$$\frac{\partial M_s}{\partial (1/r_d)} = R - r_t \overline{TD}$$

(*b*) $$\Delta M_s = (R - r_t\overline{TD})\,\Delta\frac{1}{r_d}$$

其中 $\Delta(1/r_d) = 1/0.2 - 1/0.25 = 1$。因此

$$\Delta M_s = [20 - 0.15(2)](1) = 19.7$$

(*c*) 假設 $\overline{C} = 500$ 萬，並代入貨幣方程式（參見問題 6.19）

$$M_{s_1} = 5 - \frac{0.15(2)}{0.25} + \frac{20}{0.25} = 83.8$$

$$M_{s_2} = 5 - \frac{0.15(2)}{0.2} + \frac{20}{0.2} = 103.5$$

$$M_{s_2} - M_{s_1} = 19.7$$

6.21 關於問題 6.19-6.20，(*a*) 試求 r_t 變動對 M_s 之影響，(*b*) 如果 r_t 由 0.15 提高爲 0.2 且假設 $r_d = 0.25$，試估算 M_s 之變動量，(*c*) 試檢查您的答案是否正確?

圖 (*a*) $$\frac{\partial M_s}{\partial r_t} = -\frac{\overline{TD}}{r_d}$$

(*b*) $$\Delta M_s = \frac{-\overline{TD}}{r_d}\Delta r_t = \frac{-2}{0.25}(0.05) = -0.4$$

(*c*) $$M_{s_1} = 5 - \frac{0.15(2)}{0.25} + \frac{20}{0.25} = 83.8$$

$$M_{s_2} = 5 - \frac{0.2(2)}{0.25} + \frac{20}{0.25} = 83.4$$

$$M_{s_2} - M_{s_1} = -0.4$$

偏彈性

6.22 已知 $Q = 700 - 2P + 0.02Y$，其中 $P = 25$ 且 $Y = 5000$，試求 (*a*) 需求的價格彈性。(*b*) 需求的所得彈性。

圖 (*a*) $$\epsilon_d = \frac{\partial Q}{\partial P}\left(\frac{P}{Q}\right)$$

其中 $\partial Q/\partial P = -2$ 且 $Q = 700 - 2(25) + 0.02(5000) = 750$。因此

$$\epsilon_d = -2\left(\frac{25}{750}\right) = -0.067$$

(*b*) $$\epsilon_Y = \frac{\partial Q}{\partial Y}\left(\frac{Y}{Q}\right) = 0.02\left(\frac{5000}{750}\right) = 0.133$$

6.23 已知 $Q = 400 - 8P + 0.05Y$，式中 $P = 15$ 且 $Y = 12{,}000$，試求 (*a*) 需求的所得彈性，(*b*) 如果所得每年成長 5 %，試求此商品之成長率？(*c*) 試評論此商品之成長率。

圖 (*a*) $Q = 400 - 8(15) + 0.05(12{,}000) = 880$ 且 $\partial Q/\partial Y = 0.05$。因此

$$\epsilon_Y = \frac{\partial Q}{\partial Y}\left(\frac{Y}{Q}\right) = 0.05\left(\frac{2{,}000}{880}\right) = 0.68$$

(b)
$$\epsilon_Y = \frac{\partial Q}{Q} \div \frac{\partial Y}{Y}$$

重新整理各項，並將已知參數代入，

$$\frac{\partial Q}{Q} = \epsilon_Y \frac{\partial Y}{Y} = 0.68(0.05) = 0.034$$

亦即，此財貨之需求將增加 3.4 %。

(c) 因爲 $0 < \epsilon_Y < 1$，故我們可預期此財貨之需求將隨著國民所得之成長而增加，但增加之比例較小，因而，雖然此財貨需求之絕對量增加，但在整個擴張中之經濟體系而言，其市場佔有率（配額）將縮小。反之，如果 $\epsilon_Y > 1$，則此財貨之需求成長速度大於經濟擴張之速度，因而其市場之相對佔有率提高，最後，如果 $\epsilon_Y < 0$，則隨著所得之增加，此財貨之需求將減少。

6.24 已知 $Q_1 = 100 - P_1 + 0.75P_2 - 0.25P_3 + 0.0075Y$。當 $P_1 = 10$，$P_2 = 20$，$P_3 = 40$，且 $Y = 10{,}000$，$Q_1 = 170$，試求其不同之需求交叉彈性。

解

$$\epsilon_{12} = \frac{\partial Q_1}{\partial P_2}\left(\frac{P_2}{Q_1}\right) = 0.75\left(\frac{20}{170}\right) = 0.088$$

$$\epsilon_{13} = \frac{\partial Q_1}{\partial P_3}\left(\frac{P_3}{Q_1}\right) = -0.25\left(\frac{40}{170}\right) = -0.059$$

6.25 已知 $Q_1 = 50 - 4P_1 - 3P_2 + 2P_3 + 0.001Y$，當 $P_1 = 5$，$P_2 = 7$，$P_3 = 3$ 且 $Y = 11{,}000$，$Q_1 = 26$，(a) 試利用交叉彈性判別財貨 1 與其它財貨之關係，(b) 其它各種財貨之價格各增加 10 % 時分別對 Q_1 有何影響？

解 (a)
$$\epsilon_{12} = -3\left(\frac{7}{26}\right) = -0.81 \qquad \epsilon_{13} = 2\left(\frac{3}{26}\right) = 0.23$$

因爲 $\epsilon_{12} < 0$，故財貨 1 與 2 爲互補品，亦即 P_2 上升將導致 Q_1 減少，反之，因爲 $\epsilon_{13} > 0$，故財貨 1 與 3 互爲替代財貨，因而 P_3 上升將導致 Q_1 增加。

(b)
$$\epsilon_{12} = \frac{\partial Q_1}{Q} \div \frac{\partial P_2}{P_2}$$

重新整理各項，並將已知參數代入

$$\frac{\partial Q_1}{Q_1} = \epsilon_{12}\frac{\partial P_2}{P_2} = -0.81(0.10) = -0.081$$

亦即，如果 P_2 上升 10 %，Q_1 將減少 8.1 %

$$\epsilon_{13} = \frac{\partial Q_1}{Q_1} \div \frac{\partial P_3}{P_3}$$

$$\frac{\partial Q_1}{Q_1} = \epsilon_{13}\frac{\partial P_3}{P_3} = 0.23(0.10) = 0.023$$

亦即，如果 P_1 上升 10%，Q_1 將上升 2.3%。

經濟函數之最適化

6.26 已知總成本 (c) 函數 $c = 8x^2 + 6y^2 - 2xy - 40x - 42y + 180$，其中 x 與 y 爲廠商之兩種財貨之產出，(a) 試求成本最小之產量，(b) 檢查其二階條件，(c) 計算臨界點之函數值。

解 (a) $c_x = 16x - 2y - 40 = 0$ $c_y = 12y - 2x - 42 = 0$

聯立解之，可得 $\bar{x} = 3$ 與 $\bar{y} = 4$。

(b) 取二階偏導數，

$$c_{xx} = 16 \qquad c_{yy} = 12 \qquad c_{xy} = -2$$

由於二階直接偏導數均爲正，且其乘積大於交叉偏導數之平方，$(16)(12) > (-2)^2$，故當 $\bar{x} = 3$ 與 $\bar{y} = 4$ 時其 TC 確爲最小。

(c) $c = 8(3)^2 + 6(4)^2 - 2(3)(4) - 40(3) - 42(4) + 180 = 36$

6.27 已知利潤 (π) 函數爲 $\pi = 160x - 3x^2 - 2xy - 2y^2 + 120y - 18$，其中 x，y 爲廠商之兩種財貨之產出，(a) 試求利潤最大之產量，(b) 檢查其二階條件，(c) 以臨界值計算此函數。

解 (a) $\pi_x = 160 - 6x - 2y = 0$ $\pi_y = -2x - 4y + 120 = 0$

聯立解之，可得 $\bar{x} = 20$ 與 $\bar{y} = 20$。

(b) 取二階偏導數，

$$\pi_{xx} = -6 \qquad \pi_{yy} = -4 \qquad \pi_{xy} = -2$$

由於二階直接偏導數均爲負，且 $\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$，故 π 在 $\bar{x} = \bar{y} = 20$ 時最大。

(c) $\pi = 2782$

6.28 已知 $c = 5x^2 - 50x - 3xy + 6y^2 - 22y + 240$，重新作問題 6.26。

解 (a) $c_x = 10x - 50 - 3y = 0$ $c_y = -3x + 12y - 22 = 0$

聯立解之，可得 $\bar{x} = 6$ 與 $\bar{y} = 3\frac{1}{3}$。

(b) 二階偏導數爲

$$c_{xx} = 10 \qquad c_{yy} = 12 \qquad c_{xy} = -3$$

由於 c_{xx}、$c_{yy} > 0$ 且 $c_{xx}c_{yy} > (c_{xy})^2$，故成本在 $\bar{x} = 6$ 與 $\bar{y} = 3\frac{1}{3}$ 時爲最小。

(c) $c = 53.33$

6.29 已知 $\pi = 25x - x^2 - xy - 2y^2 + 30y - 28$，重新作問題 6.27。

圖 (*a*) $\pi_x = 25 - 2x - y = 0$ $\pi_y = -x - 4y + 30 = 0$

故，$\bar{x} = 10$ 與 $\bar{y} = 5$。

(*b*) $\pi_{xx} = -2$ $\pi_{yy} = -4$ $\pi_{xy} = -1$

由於 π_{xx} 與 π_{yy} 均爲負且 $\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$，故 π 爲最大。

(*c*) $\pi = 172$

6.30 一獨佔者出售 x 與 y 兩種商品，其需求函數分別爲

$$x = 25 - 0.5P_x \tag{6.24}$$

$$y = 30 - P_y \tag{6.25}$$

而其聯合成本函數爲

$$c = x^2 + 2xy + y^2 + 20 \tag{6.26}$$

試求(*a*)利潤最大時每一產品之產量，(*b*) 其價格各爲若干，(*c*) 利潤之極大值若干？

圖 (*a*) 因爲 $\pi = \mathrm{TR}_x + \mathrm{TR}_y - \mathrm{TC}$，

$$\pi = P_x x + P_y y - c \tag{6.27}$$

由 (6.24) 與 (6.25) 式

$$P_x = 50 - 2x \tag{6.28}$$

$$P_y = 30 - y \tag{6.29}$$

代入 (6.27) 式

$$\begin{aligned}\pi &= (50 - 2x)x + (30 - y)y - (x^2 + 2xy + y^2 + 20) \\ &= 50x - 3x^2 + 30y - 2y^2 - 2xy - 20\end{aligned} \tag{6.30}$$

極大化 (6.30) 式之一階條件爲

$$\pi_x = 50 - 6x - 2y = 0 \qquad \pi_y = 30 - 4y - 2x = 0$$

聯立解之，可得 $\bar{x} = 7$ 與 $\bar{y} = 4$。檢查其二階條件：$\pi_{xx} = -6$，$\pi_{yy} = -4$，與 $\pi_{xy} = -2$。因爲兩直接偏導數均爲負且 $\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$，$\pi$ 爲極大值。

(*b*) 以 $\bar{x} = 7$，$\bar{y} = 4$ 代入 (6.28) 與 (6.29) 式

$$P_x = 50 - 2(7) = 36 \qquad P_y = 30 - 4 = 26$$

(*c*) 以 $\bar{x} = 7$，$\bar{y} = 4$ 代入 (6.30) 式可知，$\pi = 215$。

6.31 一獨佔者面對之需求函數如下所示，試求在利潤極大時之 (*a*) 產量，(*b*) 價格，(*c*) 利潤。

$$x = 50 - 0.5P_x \tag{6.31}$$

$$y = 76 - P_y \tag{6.32}$$

而其總成本函數 $c = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 55$ 。

圖 (*a*) 由 (6.31) 與 (6.32) 式知，

$$P_x = 100 - 2x \tag{6.33}$$

$$P_y = 76 - y \tag{6.34}$$

代入 $\pi = P_x x + P_y y - c$ ，

$$\begin{aligned}\pi &= (100 - 2x)x + (76 - y)y - (3x^2 + 2xy + 2y^2 + 55) \\ &= 100x - 5x^2 + 76y - 3y^2 - 2xy - 55\end{aligned} \tag{6.35}$$

極大化 (6.35) 式，

$$\pi_x = 100 - 10x - 2y = 0 \qquad \pi_y = 76 - 6y - 2x = 0$$

故，$\bar{x} = 8$ 且 $\bar{y} = 10$ ，檢查二階條件：$\pi_{xx} = -10$ ，$\pi_{yy} = -6$ ，而 $\pi_{xy} = -2$ 。因爲 $\pi_{xx}, \pi_{yy} < 0$ 且 $\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$ ，故 π 在極點上爲最大值。

(*b*) 以 $\bar{x} = 8$ ，$\bar{y} = 10$ 代入 (6.33) 與 (6.34) 式

$$P_x = 100 - 2(8) = 84 \qquad P_y = 76 - 10 = 66$$

(*c*) 由 (6.35) 式知，$\pi = 725$ 。

6.32 已知一獨佔者面臨之需求函數如下所示，試求利潤極大之 (*a*) 產出，(*b*) 價格，(*c*) 利潤。

$$Q_1 = 49\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3}P_1 \tag{6.36}$$

$$Q_2 = 36 - \tfrac{1}{2}P_2 \tag{6.37}$$

而其聯合成本函數爲 $c = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2 + 120$ 。

圖 (*a*) 由 (6.36) 與 (6.37) 式可得

$$P_1 = 74 - 1.5Q \tag{6.38}$$

$$P_2 = 72 - 2Q_2 \tag{6.39}$$

代入 $\pi = P_1Q_1 + P_2Q_2 - c$ ，

$$\begin{aligned}\pi &= (74 - 1.5Q_1)Q_1 + (72 - 2Q_2)Q_2 - Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2 + 120) \\ &= 74Q_1 - 2.5Q_1^2 + 72Q_2 - 3Q_2^2 - 2Q_1Q_2 - 120\end{aligned} \tag{6.40}$$

求 (6.40) 式極大之一階條件爲

$$\pi_1 = 74 - 5Q_1 - 2Q_2 = 0 \qquad \pi_2 = 72 - 6Q_2 - 2Q_1 = 0$$

故，$\bar{Q}_1 = 11.54$ 且 $\bar{Q}_2 = 8.15$ 。檢查其二階條件，$\pi_{11} = -5$ ，$\pi_{22} = -6$ ，與 $\pi_{12} = -2$ 。故 $\pi_{11}, \pi_{22} < 0$ ；$\pi_{11}\pi_{22} > (\pi_{12})^2$ ，而 π 爲最大。

(*b*) 以臨界值代入 (6.38) 與 (6.39) 式

$$P_1 = 74 - 1.5(11.54) = 56.69 \qquad P_2 = 72 - 2(8.15) = 55.70$$

(*c*)
$$\pi = 600.46$$

6.33 當需求與成本函數分別如下所示，試求利潤極大之 (*a*) 產出，(*b*) 價格，(*c*) 利潤。

$$Q_1 = 5200 - 10P_1 \tag{6.41}$$

$$Q_2 = 8200 - 20P_2 \tag{6.42}$$

而

$$c = 0.1Q_1^2 + 0.1Q_1Q_2 + 0.2Q_2^2 + 325$$

圖 (*a*) 由 (6.41) 與 (6.42) 式可得，

$$P_1 = 520 - 0.1Q_1 \tag{6.43}$$

因而，

$$P_2 = 410 - 0.05Q_2 \tag{6.44}$$

$$\begin{aligned}\pi &= (520 - 0.1Q_1)Q_1 + (410 - 0.05Q_2)Q_2 - (0.1Q_1^2 + 0.1Q_1Q_2 + 0.2Q_2^2 + 325) \\ &= 520Q_1 - 0.2Q_1^2 + 410Q_2 - 0.25Q_2^2 - 0.1Q_1Q_2 - 325\end{aligned} \tag{6.45}$$

求 (6.45) 式之極大，

$$\pi_1 = 520 - 0.4Q_1 - 0.1Q_2 = 0 \qquad \pi_2 = 410 - 0.5Q_2 - 0.1Q_1 = 0$$

故，$\overline{Q}_1 = 1152.63$ 且 $\overline{Q}_2 = 589.47$。檢查其二階條件，$\pi_{11} = -0.4$。$\pi_{22} = -0.5$，與 $\pi_{12} = -0.1 = \pi_{21}$。因爲 $\pi_{11}, \pi_{22} < 0$ 與 $\pi_{11}\pi_{22} > (\pi_{12})^2$，當 $\overline{Q}_1 = 1152.63$ 與 $\overline{Q}_2 = 589.47$，π 爲極大。

(*b*) 代入 (6.43) 與 (6.44) 式，

$$P_1 = 520 - 0.1(1152.63) = 404.74 \qquad P_2 = 410 - 0.05(589.47) = 380.53$$

(*c*)

$$\pi = 420{,}201.32$$

經濟學中受限制的極值

6.34 (*a*) 當一廠商之聯合成本函數爲 $c = 6x^2 + 10y^2 - xy + 30$ 且其生產限額爲 $x + y = 34$ 時，此廠商如何分別生產 x 與 y 以追求成本之最小？(*b*) 如果生產限額減少一單位，對其生產有何影響？

圖 (*a*) 首先令限制式等於 0 並乘以 λ 再與原先或目標函數相加以建立一新的拉格朗齊函數，亦即

$$\begin{aligned}C &= 6x^2 + 10y^2 - xy + 30 + \lambda(x + y - 34) \\ C_x &= 12x - y + \lambda = 0 \\ C_y &= 20y - x + \lambda = 0 \\ C_\lambda &= x + y - 34 = 0\end{aligned}$$

聯立解之，可得 $\overline{x} = 21$，$\overline{y} = 13$ 與 $\overline{\lambda} = -239$。故，$C = 4093$，其二階條件如 12.5 節所討論者。

(*b*) 由於 $\lambda < 0$，故限制式之常數項（生產限額）每減少一單位，其成本將減少約 239。

6.35 (*a*) 當一廠商之總利潤函數 $\pi = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$ 且其最大生產

能量爲 $x + y = 12$，則爲追求利潤極大時，應如何生產 x 與 y？(*b*)如果生產能量增加一單位，試計算其對利潤之影響？

圖 (*a*)

$$\Pi = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y + \lambda(x + y - 12)$$
$$\Pi_x = 80 - 4x - y + \lambda = 0$$
$$\Pi_y = -x - 6y + 100 + \lambda = 0$$
$$\Pi_\lambda = x + y - 12 = 0$$

聯立解之，可得 $\bar{x} = 5$，$\bar{y} = 7$ 與 $\bar{\lambda} = -53$。故 $\pi = 868$。

(*b*) 因爲 $\bar{\lambda} = -53$，故生產能量每增加一單位，利潤將增加約 53。

6.36 一農場經營者面對之利潤函數爲

$$\pi = 110x - 3x^2 - 2xy - 2y^2 + 140y$$

其中 x = 邊肉而 y = 獸皮。因爲生產每一張獸皮時將同時生產兩塊邊肉，亦即

$$\frac{x}{2} = y \qquad x = 2y$$

此經營者利潤極大之產量爲何？

圖

$$\Pi = 110x - 3x^2 - 2xy - 2y^2 + 140y + \lambda(x - 2y)$$
$$\Pi_x = 110 - 6x - 2y + \lambda = 0$$
$$\Pi_y = -2x - 4y + 140 - 2\lambda = 0$$
$$\Pi_\lambda = x - 2y = 0$$

聯立解之可得，$\bar{x} = 20$，$\bar{y} = 10$，$\bar{\lambda} = 30$ 且 $\pi = 1800$。

6.37 某廠商之成本函數 $c = 5x^2 + 2xy + 3y^2 + 800$，試求受制於生產限額 $x + y = 39$ 時之最小成本，(*b*) 當限額增加爲 40 時將增加多少成本。

圖 (*a*)

$$C = 5x^2 + 2xy + 3y^2 + 800 + \lambda(x + y - 39)$$
$$C_x = 10x + 2y + \lambda = 0$$
$$C_y = 2x + 6y + \lambda = 0$$
$$C_\lambda = x + y - 39 = 0$$

聯立解之可得，$\bar{x} = 13$，$\bar{y} = 26$，$\bar{\lambda} = -182$，且 $C = 4349$。

(*b*) 因爲 $\bar{\lambda} = -182$，故生產限額增加一單位，其成本大約增加 182。

6.38 一獨佔廠商生產 x 與 y，其需求函數分別爲

$$x = 72 - 0.5P_x \tag{6.46}$$
$$y = 120 - P_y \tag{6.47}$$

而聯合成本函數爲 $c = x^2 + xy + y^2 + 35$ 並且最大產能爲 40，即 $x + y = 40$，試求利潤極大之 (*a*) 產出，(*b*) 價格與 (*c*) 利潤。

圖 (*a*) 由 (6.46) 與 (6.47) 式知，

$$P_x = 144 - 2x \tag{6.48}$$

$$P_y = 120 - y \tag{6.49}$$

因此，$\pi = (144 - 2x)x + (120 - y)y - (x^2 + xy + y^2 + 35) = 144x - 3x^2 - xy - 2y^2 + 120y - 35$ 納入限制式，則

$$\Pi = 144x - 3x^2 - xy - 2y^2 + 120y - 35 + \lambda(x + y - 40)$$

因此，

$$\Pi_x = 144 - 6x - y + \lambda = 0$$

$$\Pi_y = -x - 4y + 120 + \lambda = 0$$

$$\Pi_\lambda = x + y - 40 = 0$$

並且，$\bar{x} = 18$，$\bar{y} = 22$ 與 $\bar{\lambda} = -14$。

(*b*) 代入 (6.48) 與 (6.49) 式

$$P_x = 144 - 2(18) = 108 \qquad P_y = 120 - 22 = 98$$

(*c*)
$$\pi = 2861$$

6.39 某三輪車零件製造業者，每出售一件車架 (y) 時將同時出售三個輪胎 (x)，亦即

$$\frac{x}{3} = y \qquad x = 3y$$

如果需求爲

$$x = 63 - 0.25P_x \tag{6.50}$$

$$y = 60 - \tfrac{1}{3}P_y \tag{6.51}$$

而成本爲

$$c = x^2 + xy + y^2 + 190$$

試求利潤極大之 (*a*) 產出，(*b*) 價格，(*c*) 利潤。

解 (*a*) 由 (6.50) 與 (6.51) 式知，

$$P_x = 252 - 4x \tag{6.52}$$

$$P_y = 180 - 3y \tag{6.53}$$

因此，$\pi = (252 - 4x)x + (180 - 3y)y - (x^2 + xy + y^2 + 190) = 252x - 5x^2 - xy + 180y - 190 - 4y^2$ 建立一有限制條件之新函數如下，

$$\Pi = 252x - 5x^2 - xy - 4y^2 + 180y - 190 + \lambda(x - 3y)$$

因此，$\Pi_x = 252 - 10x - y + \lambda = 0$，$\Pi_y = -x - 8y + 180 - 3\lambda = 0$

$\Pi_\lambda = x - 3y = 0$ 且 $\bar{x} = 27$，$\bar{y} = 9$ 與 $\bar{\lambda} = 27$。

(*b*) 由 (6.52) 與 (6.53) 式可得，$P_x = 144$ 與 $P_y = 153$。

(*c*)
$$\pi = 4022$$

6.40 問題 4.13 是處理一廠商生產單一產品時，追求利潤極大之產量，並同時在兩個不同市場且分別採取或不採差別訂價之問題，其函數已知爲

$$Q_1 = 21 - 0.1P_1 \tag{6.54}$$

$$Q_2 = 50 - 0.4P_2 \tag{6.55}$$

$$c = 2000 + 10Q \qquad \text{其中} \quad Q = Q_1 + Q_2 \tag{6.56}$$

試用多變數微分法則檢查問題 4.13 的答案是否相同。

解 由 (6.54)，(6.55) 與 (6.56) 式可得，

$$P_1 = 210 - 10Q_1 \tag{6.57}$$

$$P_2 = 125 - 2.5Q_2 \tag{6.58}$$

$$c = 2000 + 10Q_1 + 10Q_2$$

採差別訂價時，$P_1 \neq P_2$ 因爲在不同市場裡索取不同之價格，因而

$$\pi = (210 - 10Q_1)Q_1 + (125 - 2.5Q_2)Q_2 - (2000 + 10Q_1 + 10Q_2)$$
$$= 200Q_1 - 10Q_1^2 + 115Q_2 - 2.5Q_2^2 - 2000$$

取一階偏導數，

$$\pi_1 = 200 - 20Q_1 = 0 \qquad \pi_2 = 115 - 5Q_2 = 0$$

因此，$\overline{Q}_1 = 10$ 與 $\overline{Q}_2 = 23$。代入 (6.57) 與 (6.58) 式可得，$\overline{P}_1 = 110$ 與 $\overline{P}_2 = 67.5$。

反之在不採差別訂價時，在兩個市場所索取的價格相同。故 $P_1 = P_2$。代入 (6.57) 與 (6.58) 式，

$$210 - 10Q_1 = 125 - 2.5Q_2$$
$$2.5Q_2 - 10Q_1 = -85$$

將此視爲一限制式並建立一新的函數。

則
$$\Pi = 200Q_1 - 10Q_1^2 + 115Q_2 - 2.5Q_2^2 - 2000 + \lambda(2.5Q_2 - 10Q_1 + 85)$$
$$\Pi_1 = 200 - 20Q_1 - 10\lambda = 0 \qquad \Pi_2 = 115 - 5Q_2 + 2.5\lambda = 0 \qquad \Pi_\lambda = 2.5Q_2 - 10Q_1 + 85 = 0$$

且 $\overline{Q}_1 = 13.4$，$\overline{Q}_2 = 19.6$ 與 $\overline{\lambda} = -6.4$。代入 (6.57) 與 (6.58) 式可得，

$$P_1 = 210 - 10(13.4) = 76$$
$$P_2 = 125 - 2.5(19.6) = 76$$
$$Q = 13.4 + 19.6 = 33$$

6.41 已知

$$Q_1 = 24 - 0.2P_1 \qquad Q_2 = 10 - 0.05P_2$$
$$c = 35 + 40Q \qquad \text{其中} \quad Q = Q_1 + Q_2$$

試檢查問題 4.14 的答案。

解 已知

$$P_1 = 120 - 5Q_1 \tag{6.59}$$
$$P_2 = 200 - 20Q_2 \tag{6.60}$$
$$c = 35 + 40Q_1 + 40Q_2$$

採差別取價的情形是，

$$\pi = (120 - 5Q_1)Q_1 + (200 - 20Q_2)Q_2 - (35 + 40Q_1 + 40Q_2) = 80Q_1 - 5Q_1^2 + 160Q_2 - 20Q_2^2 - 35$$

故 $$\pi_1 = 80 - 10Q_1 = 0 \qquad \pi_2 = 160 - 40Q_2 = 0$$

且 $\overline{Q}_1 = 8$，$\overline{Q}_2 = 4$，$P_1 = 80$ 與 $P_2 = 120$。

不採差別取價的情形是 $P_1 = P_2$，代入（6.59）與（6.60）式

$$120 - 5Q_1 = 200 - 20Q_2$$
$$20Q_2 - 5Q_1 = 80 \tag{6.61}$$

（6.61）式爲一新的限制式，

故 $$\Pi = 80Q_1 - 5Q_1^2 + 160Q_2 - 20Q_2^2 - 35 + \lambda(20Q_2 - 5Q_1 - 80)$$
$$\Pi_1 = 80 - 10Q_1 - 5\lambda = 0 \qquad \Pi_2 = 160 - 40Q_2 + 20\lambda = 0 \qquad \Pi_\lambda = 20Q_2 - 5Q_1 - 80 = 0$$

且 $\overline{Q}_1 = 6.4$，$\overline{Q}_2 = 5.6$ 與 $\overline{\lambda} = 3.2$。代入（6.59）與（6.60）式，

$$P_1 = 120 - 5(6.4) = 88$$
$$P_2 = 200 - 20(5.6) = 88$$
$$Q = 6.4 + 5.6 = 12$$

6.42 (*a*) 當 $P_1 = 1$，$P_2 = 4$，且預算限制爲 $B = 120$，求極大化 $u = Q_1Q_2$。

(*b*) 試估計預算增加一單位之效果爲何？

圖 (*a*) 預算限制式爲 $Q_1 + 4Q_2 = 120$。將此限制式納入拉格朗齊函數，則

$$U = Q_1Q_2 + \lambda(Q_1 + 4Q_2 - 120)$$

故 $$U_1 = Q_2 + \lambda = 0 \qquad U_2 = Q_1 + 4\lambda = 0 \qquad U_\lambda = Q_1 + 4Q_2 - 120 = 0$$

且 $\overline{Q}_1 = 60$，$\overline{Q}_2 = 15$ 與 $\overline{\lambda} = -15$。

(*b*) 由於 $\lambda < 0$，故預算每增加 1 元，效用約增加 15，亦即當 $\overline{Q}_1 = 60$ 且 $\overline{Q}_2 = 15$ 時，貨幣（或所得）之邊際效用約爲 15。

6.43 (*a*) 求極大化 $u = Q_1Q_2$，受制於 $P_1 = 10$，$P_2 = 2$，與 $B = 240$。(*b*) 貨幣之邊際效用爲何？

圖 (*a*) 拉格朗齊函數爲 $U = Q_1Q_2 + \lambda(10Q_1 + 2Q_2 - 240)$。

$$U_1 = Q_2 + 10\lambda = 0 \qquad U_2 = Q_1 + 2\lambda = 0 \qquad U_\lambda = 10Q_1 + 2Q_2 - 240 = 0$$

故，$\overline{Q}_1 = 12$，$\overline{Q}_2 = 60$ 且 $\overline{\lambda} = -6$。

(b) 當 $\overline{Q}_1 = 12$ 且 $\overline{Q}_2 = 60$ 時其貨幣之邊際效用約爲 6 。

6.44 求極大化 $u = Q_1Q_2 + Q_1 + 2Q_2$ ，受制於 $P_1 = 2$ ， $P_2 = 5$ 與 $B = 51$ 。

圖 拉格朗齊函數爲 $U = Q_1Q_2 + Q_1 + 2Q_2 + \lambda(2Q_1 + 5Q_2 - 51)$ 。

$$U_1 = Q_2 + 1 + 2\lambda = 0 \qquad U_2 = Q_1 + 2 + 5\lambda = 0 \qquad U_\lambda = 2Q_1 + 5Q_2 - 51 = 0$$

故， $\overline{Q}_1 = 13$ ， $\overline{Q}_2 = 5$ ，且 $\overline{\lambda} = -3$ 。

6.45 受制於 $P_x = 8$ ， $P_y = 12$ 與 $B = 212$ 。試求 $u = xy + 3x + y$ 之極大值 。

圖 拉格朗齊函數爲 $U = xy + 3x + y + \lambda(8x + 12y - 212)$ 。

$$U_x = y + 3 + 8\lambda = 0 \qquad U_y = x + 1 + 12\lambda = 0 \qquad U_\lambda = 8x + 12y - 212 = 0$$

則， $\overline{x} = 15$ ， $\overline{y} = 7\frac{2}{3}$ 與 $\overline{\lambda} = -1\frac{1}{3}$ 。

不等限制式

6.46 極小化總成本函數 $c = 8x^2 + 6y^2 - 2xy - 40x - 42y + 180$ 受制於生產限額 $x + y \geq 12$ 。

圖 假設開始時， $x + y = 12$ ，則加入限制式之新的函數爲

$$C = 8x^2 + 6y^2 - 2xy - 40x - 42y + 180 + \lambda(x + y - 12)$$

則

$$C_x = 16x - 2y - 40 + \lambda = 0 \qquad C_y = -2x + 12y - 42 + \lambda = 0 \qquad C_\lambda = x + y - 12 = 0$$

且 $\overline{x} = 5.19$ ， $\overline{y} = 6.81$ ， $\overline{\lambda} = -29.4$ ，與 $C = 109.44$ 。

根據 6.7 節之法則 III ，受制於 $g(x, y) \geq 0$ 之極小化問題，如果 $\overline{\lambda} \leq 0$ 則限制式發揮作用，因而可求得受限制之極小值，反之，如果沒有限制條件，則成本最小時 $\overline{x} = 3$ 且 $\overline{y} = 4$ 而 $C = 36$ （參見問題 6.26 ）。

6.47 於問題 6.46 中若限制式爲 $x + y \geq 5$ ，試求此函數之極小值 。

圖 本題之拉格朗齊函數爲

$$C = 8x^2 + 6y^2 - 2xy - 40x - 42y + 180 + \lambda(x + y - 5)$$

且 $C_x = 16x - 2y - 40 + \lambda = 0 \qquad C_y = 12y - 2x - 42 + \lambda = 0 \qquad C_\lambda = x + y - 5 = 0$

故， $\overline{x} = 2.125$ ， $\overline{y} = 2.875$ ， $\overline{\lambda} = 11.75$ ，與 $C = 47.76$ 。

由於 $\overline{\lambda} > 0$ ，故限制式不發揮作用，因此，我們可直接對目標函數求取極小值，故從問題 6.26 知當 $\overline{x} = 3$ ， $\overline{y} = 4$ 時 $\overline{c} = 36$ 爲最小，並且將滿足 $x + y \geq 5$ 之限制條件 。

6.48 已知某廠商生產 x 與 y 其聯合產量不超 35 ，亦即 $x + y \leq 35$ ，試求該廠商利潤 $\pi = 160x - 3x^2 - 2xy - 2y^2 + 10y - 18$ 之極大值 。

圖 拉格朗齊函數爲

$$\Pi = 160x - 3x^2 - 2xy - 2y^2 + 120y - 18 + \lambda(x + y - 35)$$

$$\Pi_x = 160 - 6x - 2y + \lambda = 0 \qquad \Pi_y = -2x - 4y + 120 + \lambda = 0 \qquad \Pi_\lambda = x + y - 35 = 0$$

故，$\bar{x} = 18.33$，$\bar{y} = 16.67$，$\bar{\lambda} = -16.68$ 與 $\pi = 2740.34$。

當受制於 $g(x, y) \leq 0$ 求極大時，如果 $\bar{\lambda} < 0$，則限制式發揮作用，則可求出受限制之極大值，反之，由問題 6.27 知沒有限制條件時其利潤在 $\bar{x} = 20$，與 $\bar{y} = 20$ 時最大，即 $\pi = 2782$。

6.49 受制於 $x + y \leq 50$ 求問題 6.48 之函數的極大值。

解 建立拉格朗齊函數 $\Pi = 160x - 3x^2 - 2xy - 2y^2 + 120y - 18 + \lambda(x + y - 50)$。

$$\Pi_x = 160 - 6x - 2y + \lambda = 0 \qquad \Pi_y = -2x - 4y + 120 + \lambda = 0 \qquad \Pi_\lambda = x + y - 50 = 0$$

故，$\bar{x} = 23.33$，$\bar{y} = 26.67$，$\bar{\lambda} = 33.33$ 與 $\pi = 2615.33$。

因爲 $\bar{\lambda} > 0$，故限制式不具作用，可予以忽略，而逕自目標函數求其極大值。

第七章

對數與指數之複習

7·1 冪函數

冪函數（power function）之形式爲 $y=x^a$，式中 y = 依變數，x = 自變數，a = 一固定之指數，由定義 $x^0=1$ 可知任意數之零次方爲 1。另外，沒有指數之數或變數均可視其冪爲 1，亦即，$x=x^1$，$8=8^1$。

關於冪函數，較重要之法則有：

(1) $x^a(x^c)=x^{a+c}$

(2) $(x^a)^c=x^{ac}$

(3) $(xz)^a=x^a(z^a)$

(4) $\left(\frac{x}{z}\right)^c=\frac{x^c}{z^c}$

(5) $\frac{1}{x^a}=x^{-a}$

(6) $\frac{x^a}{x^c}=x^{a-c}$

(7) $\sqrt{x}=x^{1/2}$

(8) $\sqrt[a]{x}=x^{1/a}$

(9) $\sqrt[c]{x^a}=x^{a/c}$

例題 7.1

冪函數法則之例示如下。

(1) $x^3(x^5)=x^{3+5}=x^8$

(2) $(x^4)^3=x^{4(3)}=x^{12}$

(3) $(xz)^5=x^5(z^5)$

(4) $\left(\frac{x}{z}\right)^3=\frac{x^3}{z^3}$

(5) $\frac{1}{x^2}=x^{-2}$

(6) $\frac{x^6}{x^2}=x^{6-2}=x^4$

(7) $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$

(8) $\sqrt[5]{x^3}=x^{3/5}$

(9) $\sqrt{x^5}=x^{5/2}$

(10) $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{1/2}}=x^{-1/2}$

7·2 指數函數

指數函數（exponential function）是指一函數由常數基底 a 與變數指數 x 所形成；$y=a^x$，其中 a 大於 0 但不等於 1，指數函數描述間斷成長（discrete growth）之固定比例，亦即，發生於間斷區間（如年底或每季末日）之成長率。又指數函數經常被應用於複利，折現、與折舊（depreciation）等之問題，並且於經濟學之問題中，基底與指數經常乘上某常數，例如，$y=ba^{cx}$，指數函數之一些基本法則與冪函數者相同（參見 7.1 節）。

例題 7.2

(1) 本金爲 P，複利率 i，期間爲 t 則其未來值的指數函數爲

$$S = P(1+i)^t$$

其中（$1+i$）爲基底，t 爲變數指數，而 P 爲基底之乘積常數。如果 $P = \$100$，$i = 0.10$，且 $t = 2$，則

$$S = 100(1+0.10)^2 = \$121$$

(2) 有關折舊或衰退等問題，其成長率爲負，例如，價值 $100,000 之機器每年以 25 %之比例折舊，則其一年後價值之指數函數爲

$$S = 100{,}000(1-0.25)^1$$

其中（$1-0.25$）爲基底，1 爲指數，而 100,000 爲基底之常數乘積，故

$$S = 100{,}000(0.75) = 75{,}000$$

7·3 自然指數函數

自然指數函數（natural exponential function）是以自然數“ e ”爲基底之指數函數，如 $y = e^x$，其中 $e = \lim_{n\to\infty}[1+(1/n)]^n = 2.718281828$，自然指數函數用以描述連續成長之固定比例。亦即，非間斷區間之成長率，於經濟學中自然指數函數經常被應用在諸如人口成長率與農舍裡牛隻體重之增加率等問題上。

例題 7.3

不像一般的複利問題，人口成長是連續的並不只發生在年底，例如，1,000,000 人口若每年以 3 %之比例成長 則其自然指數函數可表示爲

$$P = 1{,}000{,}000e^{0.03t}$$

兩年後，即 $t = 2$，

$$P = 1{,}000{,}000e^{0.03(2)}$$

由附錄 Ⅱ 知，當 $x = 0.06$ 時，

$$P = 1{,}000{,}000(1.0618) = 1{,}061{,}800$$

任何函數若其形式爲 $P = e^{rt}$，r 必定指連續之成長率，而負的 r（如折舊之問題）表負的成長率。

下列是有關自然指數之重要法則：

(1) $e^0 = 1$

(2) $e^1 = e = 2.71828$

(3) $e^a(e^b) = e^{a+b}$

(4) $(e^a)^b = e^{ab}$

(5) $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

7·4 對數函數

對數(logarithm)乃爲求得一特定數而以一已知基底之次方求之，此“次方”即爲對數，常用對數(common logarithms)是以10爲基底，寫成 $\log_{10}$ 或簡寫爲 log 。因爲 $10^2 = 100$ ，故2爲100之常用對數，因此，

$\log_{10} 10 = 1$ 因爲 $10^1 = 10$
$\log_{10} 100 = 2$ 因爲 $10^2 = 100$
$\log_{10} 1000 = 3$ 因爲 $10^3 = 1000$

同樣地，對於任意指數函數 $y = a^x$ ，其中 a 爲基底而 x 爲指數，則

$$\log_a y = x$$

上式讀作，x 爲以 a 爲基底以求得 y 之對數。

例題7.4

如果基底之次方爲整數則其logs很容易求得

$\log_{10} 1 = 0$ 因爲 $10^0 = 1$
$\log_{10} 0.1 = -1$ 因爲 $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$
$\log_{10} 0.01 = -2$ 因爲 $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0.01$

$\log_4 16 = 2$ 因爲 $4^2 = 16$
$\log_3 27 = 3$ 因爲 $3^3 = 27$
$\log_5 125 = 3$ 因爲 $5^3 = 125$
$\log_2 32 = 5$ 因爲 $2^5 = 32$

7·5 log之形成

爲求一非10基底之整數次方的數(如，521)之對數，首先用科學記號表示該數，即 $N = a(10)^x$ ，其中 $0 < a < 10$ ，例如，$521 = 5.21(10)^2$ ，其中10的整數冪構成對數的第一部分稱爲對數之首數(characteristic)，對數之第二部分稱爲尾數(mantissa)，其求法需參考附錄I之對數表，首先忽略其小數點，並從附錄I之對數表中找出52(最左邊之行)與1(第3行)交叉之數，可知521之對數的尾數爲0.7168，(應注意的是，對數表內之數學均爲小數點後之數)，因此，

$$\log_{10} 521 = 2.7168$$

同樣地，

$$\log_{10} 5.21 = 0.7168$$
$$\log_{10} 52.1 = 1.7168$$
$$\log_{10} 5210 = 3.7168$$

此四頁之表格精確至小數第四位，故從此表查出之對數將爲小數點以下四位。

例題7.5

求 0.307 之對數，首先以科學符號表示如下：

$$0.307 = 3.07(10)^{-1}$$

故其首數爲 $\bar{1}$ 或 9 - 10，注意在對數表示法中，負號是擺在首數之上方而非置於其前。〔置於標數前面之負號，代表另一種不同之意義，參見例 8，第(5)項〕，其次由附錄 I 中找出 30 與 7 交叉之數，可知其尾數爲 0.4871。因此，

$$\log 0.307 = \bar{1}.4871 \text{ 或 } 9.4871-10 \text{ 或 } 0.4871-1$$

同樣地，

$$\log 0.0307 = \bar{2}.4871 \text{ 或 } 8.4871-10 \text{ 或 } 0.4871-2$$

$$\log 0.00307 = \bar{3}.4871 \text{ 或 } 7.4871-10 \text{ 或 } 0.4871-3$$

7·6 插補法

超過三位以上整數之對數的求法，往往必須使用插補法（interpolation），例如 log 2536，將位於 log 2530 與 log 2540 之間，因爲 2536 與 2530 之差（2536 − 2530 = 6）是 2530 與 2540（2540 − 2530 = 10）之差的 60 %，故 log 2536 等於 log 2530 加 60 %的 log 2540 與 log 2530 之差，亦即

$$\log 2536 = \log 2530 + 0.6(\log 2540 - \log 2530)$$
$$= 3.4031 + 0.6(3.4048 - 3.4031) = 3.4031 + 0.0010 = 3.4041$$

有關反對數（antilogs）之插補法說明，請參見例 7 第三項，另指數函數之插補法說明，參見問題 7.16 (a)。

例題7.6

log 0.7342 將介於 log 0.7340 與 log 0.7350 之間，因爲 0.7342 與 0.7340 之差爲 0.7340 與 0.7350 之差的 20 %，故

$$\log 0.7342 = \log 0.7340 + 0.2(\log 0.7350 - \log 0.7340) = \bar{1}.8657 + 0.2(\bar{1}.8663 - \bar{1}.8657) = \bar{1}.8657 + 0.0001 = \bar{1}.8658$$

7·7 反對數

求反對數的方法剛好與求對數之方法顛倒，爲求 3.9253 之反對數，我們必須先從附錄 I 中找出尾數爲 0.9253 者，再將此數以科學記號表示之，並以其首數（3）做爲 10 之指數，從表中我們發現與 0.9253 對應的是 842 故

$$\text{antilog } 3.9253 = 8.42(10)^3 = 8420$$

例題7.7

(1) antilog $\bar{2}.6243$ 求法如下：

與尾數 0.6243 對應的是 421 ，則以首數作爲 10 之指數的科學記號是

$$\text{antilog } \bar{2}.6243 = 4.21(10)^{-2} = 0.0421$$

(2) antilog 4.7966 求法如下：

與尾數 0.7966 對應的是 626 ，則以首數作爲 10 之指數的科學記號是

$$\text{antilog } 4.7966 = 6.26(10)^{4} = 62{,}600$$

(3) antilog 1.3310 求法如下：

因爲，我們無法由附錄 I 直接找出尾數 0.3310 ，故需採用插補法，同時因爲 0.3310 乃介於 0.3304 與 0.3324 之間。因此，antilog 1.3310 將介於 antilog 1.3304 與 antilog 1.3324 之間，又 1.3310 與 1.3304 之差爲 1.3304 與 1.3324 之差的 30 % ，故

$$\begin{aligned}\text{antilog } 1.3310 &= \text{antilog } 1.3304 + 0.3(\text{antilog } 1.3324 - \text{antilog } 1.3304)\\ &= 21.4 + 0.3(21.5 - 21.4) = 21.4 + 0.03 = 21.43\end{aligned}$$

7.8 對數之法則

對數可用以簡化包含 > 0 之各種數的複雜運算，例如，兩數相乘我們可將兩數取對數後再相加；而兩數相除，則可先取其對數再相減；又計算指數時，我們可以用 log 乘以其乘冪即可；最後計算某數之 n 次方根（nth root），我們只要以其 log 除以 n 即可，簡言之，這些有關對數之法則例示如下：

(1) $\log(xy) = \log x + \log y$

(2) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$

(3) $\log x^a = a \log x$

(4) $\log(\sqrt[a]{x}) = \frac{\log x}{a}$

例題7.8

logs 可用以解下列各方程式：

(1) $y = 950 \times 80$.

$$\begin{aligned}\log y &= \log 950 + \log 80\\ &= 2.9777 + 1.9031 = 4.8808\end{aligned}$$

然後取其反對數

$$y = \text{antilog } 4.8808 = 76{,}000$$

(2) $y = 8400/240$.

$$\begin{aligned}\log y &= \log 8400 - \log 240\\ &= 3.9243 - 2.3802 = 1.5441\end{aligned}$$

$$y = \text{antilog } 1.5441 = 35$$

(3) $y = 8^3$.

$$\begin{aligned}\log y &= 3 \log 8\\ &= 3(0.9031) = 2.7093\end{aligned}$$

$$y = \text{antilog } 2.7093 = 512$$

(4) $y = \sqrt[3]{343}$.

$$\log y = \frac{\log 343}{3} = \frac{2.5353}{3} = 0.8451$$

$$y = \text{antilog } 0.8451 = 7$$

(5) $y = \frac{30}{50}$.

$$\log y = \log 30 - \log 50 = 1.4771 - 1.6990 = -0.2219$$

方程式(5)計算之結果爲負數，但因爲於附錄 I 中之所有尾數均爲正，爲求其反對數，我們必須先加然後再減去最小之整數以求得正的對數，在此例，我們是先加 1 再減 1，因而不會改變其值，故，$\log y = -0.2219 = 0.7781 - 1$（因爲 $-0.2219 + 1.000 = 0.7781$），結果 $y = \text{antilog}(-0.2219) = \text{antilog}(0.7781 - 1) = 6.00(10)^{-1} = 0.6$。（注意，當計算之結果得到一負的常用對數時，我們必須如上述先加再減去最小之正整數，以使得在取其反對數前有一正的尾數）。

7·9 自然對數

以自然數 e 爲基底之對數稱爲自然或 Napier 對數，寫爲 $\log_e$ 或簡寫爲 ln，因爲自然對數乃以 2.71828 而非以 10 爲基底，故它們之形成將更爲複雜，附錄 II 列舉從 0.000 至 999 之首數與尾數，在該表中找不到的數字，則先將該數以科學記號表示，然後再加上 10 的自然對數（即 2.30259）；例如，100 的話則加上 2 ln 10，即 2(2.30259)；等等。因爲 ln 10 = 2.302585093，故使用 2.30259 事實上會有某些誤差，自然對數之法則與 7.8 節所述者相同，惟不同於常用對數者小於 1 之正數的自然對數，其負號將位於此自然對數之前（而非其上面）。

例題 7.9

爲求 0 至 999 間任一數之自然對數，我們只需查閱附錄 II 即可，如果首數無法很明顯地找出，則其求法如下所示，將一系列 ln 全部列出，再一一計算之

$$\ln 0.521 = -0.65201$$
$$\ln 5.21 = 1.65058$$
$$\ln 521 = 6.25575$$

ln 52.1 在附錄 II 中無法很明顯找出，且因爲 $52.1 = 5.21(10)^1$，故

$$\ln 52.1 = \ln 5.21 + \ln 10 = 1.65058 + 2.30259 \cong 3.95317$$

同樣地

$$\ln 5210 = \ln 5.21 + 3 \ln 10 = 1.65058 + 3(2.30259) \cong 8.55835$$

ln 52.1 亦可以插補法求得。

$$\ln 52.1 = \ln 52 + 0.1(\ln 53 - \ln 52) = 3.95124 + 0.1(3.97029 - 3.95124) \cong 3.95315$$

例題 7.10

超過三位以上之數其 ln 之求得需藉助於插補法，如 190.2，因爲 190.2 與 190 之差爲 190 與 191 之差的 20 %，故

$$\ln 190.2 = \ln 190 + 0.2(\ln 191 - \ln 190)$$
$$= 5.24702 + 0.2(5.25227 - 5.24702) = 5.24702 + (0.00105) = 5.24807$$

例題7.11

假設 n 爲一實數，則形如 e^n 之自然對數爲 n，例如，$\ln e^3 = 3$，因爲 e 必須昇上 3 次方始爲 e^3，同樣地，

$\ln e^2 = 2$
$\ln e = 1$　因爲　$e^1 = e$
$\ln 1 = 0$　因爲　$e^0 = 1$

$\ln \frac{1}{e} = -1$　因爲　$e^{-1} = \frac{1}{e}$
$\ln 2.71828 = 1$　因爲　$e = 2.71828$
$\ln e^x = x$

7.10 指數函數之對數解法

欲求解指數函數之問題，利用對數之運算特別有用，其中指數函數以常用數爲基底者，用常用對數解之，反之以自然數爲基底者則用自然對數解之。

例題7.12

(1) 已知 $y = 150(1.04)^{2x}$，其中 $x = 3$。試求 y，首先以 $x = 3$ 代入，因此可得 $y = 150(1.04)^6$。然後兩邊取常用 log 如下：

$$\log y = \log 150 + 6\log(1.04) = 2.1761 + 6(0.0170) = 2.2781$$

最後，經由插補法取其 antilog：

$$y = \text{antilog } 2.2781 = 189.70$$

(2) 已知 $262 = 200e^{0.1x}$，試求指數 x，首先，將兩邊轉換成 log 之方程式，又因爲此例爲自然指數函數，故取自然對數。

$$\ln 262 = \ln 200 + 0.1x$$

因爲 $\ln e^{0.1x} = 0.1x$。則由附錄 II 之自然對數表可知，

$$5.56834 = 5.29832 + 0.1x$$
$$x = 2.7$$

7.11 對數與指數函數間之關係

對數函數爲某指數函數之反函數，正因爲這樣，故將一對數函數轉換爲指數函數形態非常容易，反之亦然。因爲 $\log_a y = x$ 可讀作 x 是爲使得 a 等於 y 之次方（指數）或 $y = a^x$。反之，已知 $y = a^x$，當底數 a 之冪次 y 必等於 x，亦即，$\log_a y = x$。

例題7.13

對數與指數函數間關係例示如下。

若 $\log_{10} y = 2x$, 則 $y = 10^{2x}$　　若 $y = a^{3x}$, 則 $\log_a y = 3x$

若 $\log_a y = xz$, 則 $y = a^{xz}$　　若 $y = 10^{6x}$, 則 $\log_{10} y = 6x$

若 $\ln y = 5t$, 則 $y = e^{5t}$　　若 $y = e^{t+1}$, 則 $\ln y = t + 1$

習題與解答

指數法則

7.1 利用指數法則，簡化下列各冪函數。

圖 (a) $y = x^5(x^7)$

$$y = x^{5+7} = x^{12}$$

(b) $y = \dfrac{x^2}{x^3}$

$$y = x^{2-5} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

(c) $y = x\sqrt{x}$

$$y = x(x^{1/2}) = x^{1+(1/2)} = x^{3/2}$$

(d) $y = x\sqrt[3]{x^4}$

$$y = x(x^{4/3}) = x^{1+(4/3)} = x^{7/3}$$

(e) $y = (x^2)^4$

$$y = x^{2(4)} = x^8$$

(f) $y = 2x^2(x^6)^3$

$$y = 2x^2(x^{6(3)}) = 2x^2(x^{18}) = 2x^{2+18} = 2x^{20}$$

7.2 利用指數法則，簡化冪函數 $y = (2/3)^3$。

$$y = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

注意 $(2/3)^3 \neq 2/3$，因爲其基底不同，故不能相消。

7.3 化簡下列各指數函數。

圖 (a) $y = a^{4x}(a^{3x})$

$$y = a^{4x+3x} = a^{7x}$$

(b) $y = \dfrac{a^{6x}}{a^{4x}}$

$$y = a^{6x-4x} = a^{2x}$$

(c) $y = e^{2x}(e^{3x})$

$$y = e^{2x+3x} = e^{5x}$$

(d) $y = e^2(e^t)$

$$y = e^{2+t} = e^{t+2}$$

(e) $y = e^3(e^5)$

$$y = e^{3+5} = e^8$$

(f) $y = (e^t)^2$

$$y = e^{2t}$$

(g) $y = \dfrac{e^{t+1}}{e^t}$

$$y = e^{t+1-t} = e^1 = e$$

(h) $y = \dfrac{e(e^t)}{e^{t+1}}$

$$y = e^{t+1-(t+1)} = e^0 = 1$$

7.4 試求下列之對數（log）：

解 (*a*) $\log_4 64$

$\log_4 64 = 3$ 因 $(4)^3 = 64$.

(*b*) $\log_5 625$

$\log_5 625 = 4$ 因 $(5)^4 = 625$

(*c*) $\log_{10} 1000$

$\log_{10} 1000 = 3$ 因 $(10)^3 = 1000$

(*d*) $\log_{10} 0.01$

$\log_{10} 0.01 = \bar{2}$ 因 $(10)^{-2} = 0.01$

(*e*) $\log_2 32$

$\log_2 32 = 5$ 因 $(2)^5 = 32$

(*f*) $\log_{12} 144$

$\log_{12} 144 = 2$ 因 $(12)^2 = 144$

查表法

7.5 利用附錄 I 之常用對數表，求出下列諸值．

解 (*a*) log 26.9

以科學符號表示，$26.9 = 2.69 \times 10^1$ 。先將小數點忽略之，則尾數爲 $269 = 0.4298$ 。然後再以 10 之指數爲首數，則 $\log 26.9 = 1.4298$。

(*b*) log 11,400

$11{,}400 = 1.14 \times 10^4$. 因此，$\log 11{,}400 = 4.0569$.

(*c*) log 5.48

$5.48 = 5.48 \times 10^0$. 因此，$\log 5.48 = 0.7388$.

(*d*) log 0.764

$0.764 = 7.64 \times 10^{-1}$. 因此，$\log 0.764 = \bar{1}.8831$, 或 $0.8831 - 1$, 或 $9.8831 - 10$.

(*e*) log 0.006

$0.006 = 6.00 \times 10^{-3}$. 因此，$\log 0.006 = \bar{3}.7782$, 或 $0.7782 - 3$, 或 $7.7782 - 10$.

(*f*) log 0.089

$0.089 = 8.90 \times 10^{-2}$. 因此，$\log 0.089 = \bar{2}.9494$, 或 $0.9494 - 2$, 或 $8.9494 - 10$.

7.6 利用附錄 I 求下列諸 logs 之值：

解 (*a*) log 32.87

因爲超過三位數之數的尾數無法由附錄 I 找出，而必須使用插補法，故 log 32.87 將位於 log 32.80 與 log 32.9 之間，又因爲 32.87 與 32.80 之差爲 32.80 與 32.90 之差的 70 %，故

$$\log 32.87 = \log 32.80 + 0.7(\log 32.90 - \log 32.80)$$
$$= 1.5159 + 0.7(1.5172 - 1.5159) = 1.5159 + 0.0009 = 1.5168$$

(*b*) log 796.3

$$\log 796.3 = \log 796.0 + 0.3(\log 797.0 - \log 796.0)$$
$$= 2.9009 + 0.3(2.9015 - 2.9009) = 2.9009 + 0.0002 = 2.9011$$

7.7 利用附錄 I 求下列之反對數：

圖 (*a*) antilog 3.7752

由表中觀察可知尾數爲 0.7752 者是 596，將此數以科學符號表之，並以已知之首數 3 爲 10 之指數，即 $5.96 \times 10^3 = 5960$。故，antilog 3.7752 = 5960。

(*b*) antilog 0.3874

0.3874 爲 244 之尾數。 故， $\text{antilog } 0.3874 = 2.44 \times 10^0 = 2.44.$

(*c*) antilog 2.5855

0.5855 爲 385 之尾數。 因此， $\text{antilog } 2.5855 = 3.85 \times 10^2 = 385.$

(*d*) antilog $\bar{1}.9643$

0.9643 爲 921 之尾數。 故， $\text{antilog } \bar{1}.9643 = 9.21 \times 10^{-1} = 0.921.$

(*e*) antilog 7.5933−10

0.5933 爲 392 之尾數。 其首數 7 − 10 = 3。 故

$$\text{antilog } 7.5933 - 10 = 3.92 \times 10^{-3} = 0.00392 \cong 0.0039$$

(*f*) antilog 0.8494−2

0.8494 爲 707 之尾數。 其首數 − 2。 故，

$$\text{antilog } 0.8494 - 2 = 7.07 \times 10^{-2} = 0.0707$$

7.8 利用附錄 I 求下列諸 antilog 之值：

圖 (*a*) antilog −1.2314

當一負號位於常用對數之前時，其對數爲負，因爲附錄 I 所列各數均爲正的尾數，故先加再減最小整數將使得 log 爲正，如此一加一減同一數並不會改變 antilog 之值，因此

$$\begin{array}{rr} 2.0000 & -2 \\ -1.2314 & \\ \hline .7686 & -2 \end{array}$$

然後再求 antilog 之值，因爲 0.7686 爲 587 之尾數，故 antilog(−1.2314) = antilog(0.7686 − 2) = $5.87 \times 10^{-2} = 0.0587$。參見問題 7.17 (*c*) 與 (*d*)。

(*b*) antilog (−3.6882)

本題之 log 亦爲負，故

$$\begin{array}{rr} 4.0000 & -4 \\ -3.6882 & \\ \hline .3118 & -4 \end{array}$$

爲 205 之尾數，因此，

$$\text{antilog } (-3.6882) = \text{antilog } (0.3118 - 4) = 2.05 \times 10^{-4} = 0.000205 \cong 0.0002$$

7.9 利用附錄 II，求下列各自然對數之值：

圖 (*a*) ln 8.42

由表列中可知 8.42 之尾數爲 0.13061，而首數則列於表中之首行，故

$$\ln 8.42 = 2.13061$$

(*b*) ln 4.53

$$\ln 4.53 = 1.51072$$

(*c*) ln 2.72

附錄 II 之表中位於 0.00063 前之星號是代表一系列首數中由此開始改變，亦即從此數開始其首數增加，例如本題之首數由 0 變到 1，故

$$\ln 2.72 = 1.00063$$

7.10 對下列諸 logs 重新作問題 7.9：

圖 (*a*) ln 0.137

$$\ln 0.137 = -1.98777$$

(*b*) ln 263

$$\ln 263 = 5.57215$$

(*c*) ln 32

$$\ln 32 = 3.46574$$

(*d*) ln 77

$$\ln 77 = 4.34381$$

7.11 試求下列自然對數之值：

圖 (*a*) ln 43.1

ln 43.1 無法很明顯由附錄 II 找出，故先用科學符號表示之，然後再轉換爲自然對數，

故
$$43.1 = 4.31 \times 10^1$$
$$\ln 43.1 = \ln 4.31 + \ln 10$$
$$= 1.46094 + 2.30259 \cong 3.76353$$

同時 ln 43.1 亦可由插補法求得，因爲 ln 43.1 = ln 43 + 0.1(ln 44 − ln 43)。參見問題 7.12。

(*b*) ln 29.4

$29.4 = 2.94 \times 10^1$. 故

$$\ln 29.4 = \ln 2.94 + \ln 10 = 1.07841 + 2.30259 \cong 3.38100$$

(*c*) ln 1250

$1250 = 1.25 \times 10^3$. 故

$$\ln 1250 = \ln 1.25 + 3 \ln 10 = 0.22314 + 3(2.30259) \cong 7.13091$$

(*d*) ln 47,900

$$\ln 47{,}900 = \ln 4.79 + 4 \ln 10 = 1.56653 + 4(2.30259) \cong 10.77689$$

7.12 求下列諸自然對數之值：

圖 (*a*) ln 442.5

因爲附錄 II 並沒列出 4 位數之數字，故本例需使用插補法，而 442.5

與 442.0 之差爲 442 與 443 之差的 50 %，因此，

$$\ln 442.5 = \ln 442 + 0.5(\ln 443 - \ln 442)$$
$$= 6.09131 + 0.5(6.09357 - 6.09131) = 6.09131 + 0.00113 = 6.09244$$

(*b*) ln 7.656

$$\ln 7.656 = \ln 7.65 + 0.6(\ln 7.66 - \ln 7.65)$$
$$= 2.03471 + 0.6(2.03601 - 2.03471) = 2.03471 + 0.00078 = 2.03549$$

7.13 利用附錄 II 求下列諸 antilogs：

圖 (*a*) $\text{antilog}_e 5.40268$

在附錄 II 中自然對數爲 5.40268 者是 222，因此，$\text{antilog}_e 5.40268 = 222$。

(*b*) $\text{antilog}_e 1.92425$

$$\text{antilog}_e 1.92425 = 6.85$$

(*c*) $\text{antilog}_e (-2.33304)$

$$\text{antilog}_e (-2.33304) = 0.097$$

(*d*) $\text{antilog}_e (-0.14503)$

$$\text{antilog}_e (-0.14503) = 0.865$$

7.14 試求下列諸 antilogs 之值：

圖 (*a*) $\text{antilog}_e 6.30335$

$\text{antilog}_e 6.30335$ 無法從附錄 II 找出，它乃介於 antilog 546 與 antilog 547 之間，又因爲 6.30335 與 6.30262 之差爲 6.30262 與 6.30445 之差的 40 %，故

$$\text{antilog}_e 6.30335 = \text{antilog}_e 6.30262 + 0.4(\text{antilog}_e 6.30445 - \text{antilog}_e 6.30262)$$
$$= 546 + 0.4(547 - 546) = 546.4$$

(*b*) $\text{antilog}_e 1.81238$

$$\text{antilog}_e 1.81238 = \text{antilog}_e 1.81156 + 0.5(\text{antilog}_e 1.81319 - \text{antilog}_e 1.81156)$$
$$= 6.12 + 0.5(6.13 - 6.12) = 6.125$$

(*c*) $\text{antilog}_e 8.44033$

附錄 I 所列首數最大者不超過 6，因此，先減去 ln 10 之倍數最大者，而此仍將使此 antilog 維持正數，由此可得以科學記號表示之 antilog_e 之數，亦即

$$\begin{array}{r} 8.44033 \\ -6.90777 = 3 \ln 10 \\ \hline 1.53256 \end{array}$$

$\text{antilog}_e 1.53256 = 4.63$。因爲減去 3 ln 10 即等於除以 1000，故

$$\text{antilog}_e\, 8.44033 = 4.63 \times 10^3 = 4630$$

(*d*) $\text{antilog}_e\, 10.14250$

減去最大之 ln 10 的倍數，

$$\begin{array}{r} 10.14250 \\ -9.21034 = 4 \ln 10 \\ \hline .93216 \end{array}$$

$\text{antilog}_e\, 0.93216 = 2.54$。因爲減去 4 ln 10 即等於除以 10,000，故

$$\text{antilog}_e\, 10.14250 = 2.54 \times 10^4 = 25{,}400$$

7.15 利用附錄 III 求出下列各自然指數函數之值：

圖 (*a*) $y = e^x$, 當 $x = 0.07$

$$y = e^{0.07} = 1.0725$$

(*b*) $y = e^{3x}$, 當 $x = 0.04$

$$y = e^{3(0.04)} = e^{0.12} = 1.1275$$

(*c*) $y = 100e^{0.5x}$, 當 $x = 0.16$

$$y = 100e^{0.5(0.16)} = 100e^{0.08} = 108.33$$

(*d*) $y = e^{2x+3}$, 當 $x = 0.3$

$$y = e^{0.6+3} = e^{3.6} = 36.60$$

(*e*) $y = 1000e^{-0.25}$

$$y = 1000(0.778801) = 778.801$$

(*f*) $y = e^{-5x}$, 當 $x = 0.02$

$$y = e^{-0.1} = 0.904837$$

(*g*) $y = (e^x)^2$, 當 $x = 0.03$

$$y = e^{2x} = e^{0.06} = 1.0618$$

(*h*) $y = e^{x^2}$, 當 $x = 0.9$

$$y = e^{0.81} = 2.2479$$

(*i*) $y = 100e^{x^2}$, 當 $x = -0.8$

$$y = 100e^{0.64} = 189.65$$

7.16 對於下列諸式，重新作問題 7.15：

圖 (*a*) $y = e^{0.175}$

從附錄 III，並以插補法求之，

$$y = e^{0.17} + 0.5(e^{0.18} - e^{0.17})$$
$$= 1.1853 + 0.5(1.1972 - 1.1853) = 1.1853 + 0.0059 = 1.1912$$

(*b*) $y = e^{0.65738}$

$$y = e^{0.65} + 0.738(e^{0.66} - e^{0.65})$$
$$= 1.9155 + 0.738(1.9348 - 1.9155)$$
$$= 1.9155 + 0.0142 = 1.9297$$

(*c*) $y = e^{2.64529}$

$$y = e^{2.6} + 0.45(e^{2.7} - e^{2.6})$$
$$= 13.46 + 0.45(14.88 - 13.46)$$
$$= 13.46 + 0.64 = 14.10$$

方程式之對數解法

7.17 利用常用對數解下列諸方程式：

圖 (*a*) $y = 625(0.8)$

$$\log y = \log 625 + \log 0.8$$
$$= 2.7959 + 0.9031 - 1 = 3.6990 - 1 = 2.6990$$
$$y = \text{antilog } 2.6990 = 500$$

(*b*) $y = \dfrac{130}{0.25}$

$$\log y = \log 130 - \log 0.25$$
$$= 2.1139 - (.3979 - 1) = 1.7160 + 1 = 2.7160$$
$$y = \text{antilog } 2.7160 = 520$$

(*c*) $y = \dfrac{40}{100}$

$$\log y = \log 40 - \log 100$$
$$= 1.6021 - 2 = -0.3979$$

取 antilog 前先加 1 再減 1 ，$\log y = 0.6021 - 1$ ，因此，

$$y = \text{antilog}(-0.3979) = \text{antilog}(0.6021 - 1) = 4.00 \times 10^{-1} = 0.40$$

(*d*) $y = \dfrac{36}{5000}$

$$\log y = \log 36 - \log 5000$$
$$= 1.5563 - 3.6990 = -2.1427$$

取 antilog 前先加 3 再減 3 ，

$$y = \text{antilog}(-2.1427) = \text{antilog}(0.8573 - 3) = 7.20 \times 10^{-3} = 0.0072$$

(*e*) $y = (1.06)^{10}$

$$\log y = 10 \log 1.06 = 10(0.0253) = 0.2530$$
$$y = \text{antilog } 0.2530 = 1.79$$

(*f*) $y = 1024^{0.20}$

$$\log y = 0.20 \log 1024$$

用插補法，可得

$$\log 1024 = \log 1020 + 0.4(\log 1030 - \log 1020)$$
$$= 3.0086 + 0.4(3.0128 - 3.0086) = 3.0103$$

故

$$\log y = 0.20(3.0103) = 0.6021$$
$$y = \text{antilog } 0.6021 = 4$$

(*g*) $y = \sqrt[5]{1024}$

$y = 1024^{1/5} = 1024^{0.20} = 4$ ，正如 (*f*) 所求得者，兩個問題充分相同，因爲 5 次方根即爲 $\frac{1}{5}$ 或 0.20 次方（冪），其中 (*f*) 是 log 1024 除以 5；而 (*g*) 則爲 log 1024 乘以 0.20 。

7.18 利用自然對數解下列諸方程式：

圖 (*a*) $y = 300(0.58)$

$$\ln y = \ln 300 + \ln 0.58 = 5.70378 + (-0.54473)$$

小於 1 之正數，其自然對數小於 0 ，故

$$\ln y = 5.15905$$
$$y = \text{antilog}_e\, 5.15905 = 174$$

(*b*) $y = \dfrac{150}{750}$

$$\ln y = \ln 150 - \ln 750 = 5.01064 - 6.62007 = -1.60943$$
$$y = \text{antilog}_e\,(-1.60943) = 0.20$$

(*c*) $y = \sqrt[3]{729}$

$$\ln y = \tfrac{1}{3}\ln 729 = \tfrac{1}{3}(6.59167) = 2.19722$$
$$y = \text{antilog}_e\, 2.19722 = 9$$

(*d*) $y = 9200(0.015)$

$$\ln y = \ln 9200 + \ln 0.015$$

其中 $\ln 9200 = \ln 9.2 + 3\ln 10 = 2.21920 + 3(2.30259) = 9.12697$. 故，

$$\ln y = 9.12697 + (-4.19971) = 4.92726$$
$$y = \text{antilog}_e\, 4.92726 = 138$$

(*e*) $y = \dfrac{712}{16}$

$$\ln y = \ln 712 - \ln 16 = 6.56808 - 2.77259 = 3.79549$$
$$y = \text{antilog}_e\, 3.79549$$

因爲 3.79549 並未列於附錄 II 之表中，故我們可以插補法或減去最大倍數之 ln 10（但仍使 antilog_e 爲正）方法求解，如果我們使用第二個方法，則 $3.79549 - 2.30259 = 1.49290$，$\text{Antilog}_e\, 1.49290 = 4.45$ 故 $\text{antilog}_e\, 3.79549 = 4.45 \times 10^1 = 44.5$。

反函數之關係式

7.19 將下列 log 函數轉換爲指數函數，必須記住，log 函數是某指數函數之反函數：

圖 (*a*) $\log_{10} 25 = 1.3979$

此 log 表示 1.3979 是爲求得 25 之 10 的次方，因此其逆指數函數爲

$$10^{1.3979} = 25$$

(*b*) $\log_{10} 1000 = 3$ $\quad 10^3 = 1000$

(*c*) $\log_a y = 6x$ $\quad y = a^{6x}$

(*d*) $\log_6 36 = 2$ $\quad 6^2 = 36$

(*e*) $\ln y = 2t + 1$

$y = e^{2t+1}$，因爲 $2t + 1$ 是爲求得 y 之 e 的次方。

(*f*) $\ln 1.6 = 0.47000$ $\quad e^{0.47000} = 1.6$

(*g*) $\ln 24 = 3.17805$ $\quad e^{3.17805} = 24$

(*h*) $\ln y = 3x$ $\quad y = e^{3x}$

7.20 將下列指數函數轉換爲 log 函數：

圖 (*a*) $y = 2^{7x}$

$\log_2 y = 7x$，其中 $7x$ 是爲求得 y 之 2 的次方。

(b) $y = a^{x^{3/4}}$ $\quad \log_a y = x^{3/4}$

(c) $y = e^{t-2}$ $\quad \ln y = t - 2$

(d) $y = e^{(1/2)t}$ $\quad \ln y = \frac{1}{2}t$

(e) $y = e^{3.61092}$ $\quad \ln y = 3.61092$

(f) $49 = e^{3.89182}$ $\quad \ln 49 = 3.89182$

(g) $112 = e^{4.71850}$ $\quad \ln 112 = 4.71850$

7.21 利用對數法則化簡下列諸式：

圖 (a) $\ln (Pe^3)$

$$\ln (Pe^3) = \ln P + 3 \ln e$$
$$= \ln P + 3(1) = \ln P + 3$$

(b) $\ln (ce^t)$

$$\ln (ce^t) = \ln c + t \ln e$$
$$= \ln c + t$$

(c) $\ln \frac{a}{e^3}$

$$\ln \frac{a}{e^3} = \ln a - 3 \ln e$$
$$= \ln a - 3$$

(d) $\ln \frac{e^2}{e^6}$

$$\ln \frac{e^2}{e^6} = 2 \ln e - 6 \ln e$$
$$= 2 - 6 = -4$$

(e) $\ln x^3$

$$\ln x^3 = 3 \ln x$$

(f) $\ln e^{10}$

$$\ln e^{10} = 10$$

(g) $\ln (xy^3)$

$$\ln (xy^3) = \ln x + 3 \ln y$$

(h) $\ln (x^2e^t)$

$$\ln (x^2e^t) = 2 \ln x + t$$

(i) $\ln \left(\frac{ce^2}{d}\right)$

$$\ln \left(\frac{ce^2}{d}\right) = \ln c + 2 \ln e - \ln d$$
$$= \ln c - \ln d + 2$$

(j) $\ln \left(\frac{a}{e^5}\right)$

$$\ln \left(\frac{a}{e^5}\right) = \ln a - 5 \ln e$$
$$= \ln a - 5$$

7.22 解下列諸方程式之 x，亦即以 y 之項來表示 x：

圖 (a) $\log_a x = y^3$ $\quad x = a^{y^3}$

(b) $\log_a x = \log_a 3 + \log_a y$ $\quad x = 3y$ 因爲在對數運算中相加＝在一般代數中之相乘。

(c) $\ln x = 3y$ $\quad x = e^{3y}$

(d) $\ln x = \log_a y$ $\quad x = e^{\ln \log_a y}$

(e) $\log_a x = \ln y$ $\quad x = a^{\ln y}$

(f) $y = ge^{hx}$

當 x 爲自然指數函數之指數，故求解 x 時，首先對兩邊取自然對數，再以代數運算求解如下：

$$\ln y = \ln g + hx \ln e = \ln g + hx$$

$$x = \frac{\ln y - \ln g}{h}$$

(*g*) $y = ae^{x+1}$

$$\ln y = \ln a + (x+1)\ln e = \ln a + x + 1$$
$$x = \ln y - \ln a - 1$$

(*h*) $y = p(1+i)^x$

當 x 爲指數函數（基底非 e 者）之指數，故首先對兩邊取常用對數，再以代數運算求解，可得

$$\log y = \log p + x \log(1+i)$$
$$x = \frac{\log y - \log p}{\log(1+i)}$$

第八章

指數、對數與冪函數在經濟學上之應用

8.1 複　利

已知本金爲 P，每年並以利率 i 計算其複利，在經過 t 年後，其本息值 S 可以指數函數表示如下：

$$S = P(1+i)^t$$

如果一年複利計算 m 次，共 t 年，則

$$S = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}$$

如果每年以 100 % 之利率連續複計算之，則一年之本息爲，

$$S = P\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = P(2.71828) = Pe$$

如果利率爲 r 而非 100 % 並且期間是 t 年而非一年，則

$$S = Pe^{rt}$$

關於負的成長率［如折舊或通貨緊縮（deflation）］，這些公式亦可適用，只不過 i 與 r 應爲負數。

例題 8.1

試求本金 $100，利率爲 10 % 其兩年複利計算之本息爲何：

(1) 一年之情況，$S = P(1+i)^t$。

$$S = 100(1+0.10)^2 = 121$$

(2) 半年之情況，其中 $m = 2$ 且 $t = 2$，$S = P[1+(i/m)]^{mt}$。

$$S = 100\left(1+\frac{0.10}{2}\right)^{2(2)} = 100(1+0.05)^4$$

利用 logs 求解 S，則

$$\log S = \log 100 + 4\log 1.05 = 2 + 4(0.0212) = 2.0848$$

故 $S = \text{antilog } 2.0848 \cong 121.6$

(3) 連續複利之情況，$S = Pe^{rt}$ 。

$$S = 100e^{0.10(2)} = 100e^{0.2}$$

由附錄 III 可知，

$$S = 100(1.2214) = 122.14$$

8.2 實際利率與名目利率

如例 1 所討論者，在已知之本金下，雖然其**名目利率**（nominal rate of interest）相同，但若複利計算方式不同，則其**實際利率**（effective rate of interest）將有不同，例如，本金 \$100 時若每年複利一次，則兩年後本息爲 \$121；當半年複利一次則 $S = \$121.60$；最後，當採連續之複利計算，其 $S = \$122.14$ 。

爲求得多重複利計算法之實際利率（i_e），其解之步驟如下：

$$P(1 + i_e)^t = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}$$

兩邊除以 P 並取 t 次方根，

$$1 + i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

$$i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

同樣地，爲求得連續複利計算之實際利率，公式如下：

$$(1 + i_e) = e^r$$

$$i_e = e^r - 1$$

例題 8.2

已知名目利率爲 10 % 則(1)半年複利一次(2)連續之複利計算，兩年之實際利率例示如下：

(1) 半年複利一次，$i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 = (1.05)^2 - 1$

對 $(1.05)^2$ 取 log，$\log(1.05)^2 = 2 \log 1.05 = 2(0.0212) = 0.0424$ 。故

$$(1.05)^2 = \text{antilog } 0.0424 = 1.1025$$

代入公式，

$$i_e = 1.1025 - 1 = 0.1025 = 10.25\%$$

(2) 連續複利時，　　$i_e = e^r - 1 = e^{0.10} - 1$

由附錄 III 可得，　　$i_e = 1.1052 - 1 = 0.1052 = 10.52\%$

8.3 折 現

將來獲得之一筆金額其價值並不就等於現在獲得該筆金額之價值，因爲目前獲得這筆金額時，我們可以某一利率貸放出去而在將來收取較大之金額，如果現行之市場利率爲 8 % 則某人現在貸放 $100，則於一年後以複利計算利息，其本利和變爲$108，因此我們可以說一年後 $108 之價值只與現在 $100 之價值——即**現值**（present value）相等。

折現（discounting）即爲將未來貨幣金額之值（S）折換成現值（P）之方法，因此在每年複利的情況則，

$$S = P(1+i)^t$$

故

$$P = \frac{S}{(1+i)^t} = S(1+i)^{-t}$$

同樣地，在多重複利計算之情形時，$P = S[1 + (i/m)]^{-mt}$ 而在連續複利計算之情形，則 $P = Se^{-rt}$。又爲求取現值之利率，稱爲**折現率**（rate of discount）。

例題8.3

一張 5 年期證券面值爲 $1000 且無任何附帶利息，則其現值爲多少？（假設現行可能利率爲 9 %，並以每年複利計算之）。

$$P = S(1+i)^{-t} = 1000(1+0.09)^{-5}$$
$$\log P = \log 1000 + (-5 \log 1.09) = 3 - 5(0.0374) = 2.8130$$
$$P = \text{antilog } 2.8130 \cong 650.1$$

因此，5 年後可獲得 $1000 之證券就目前而言，只值 $650.1，因爲 $650.1以 9 % 之利率累積到 5 年後其本利和共 $1000。

8.4 未來所得川流之折現

投資於廠房或設備正常而言，將在未來各年中收取所得川流之報酬，而未來所得川流（stream of income）之現值，等於各期所獲得報酬之現值的加總，如果每一期回收之報酬（S）相等，且利息是以每年複利之方式計算的話，其折現公式爲：

$$P = S\left(\frac{1}{i}\right)\left[1 - \frac{1}{(1+i)^t}\right]$$

例題8.4

折現率爲 6 %，利息以每年複利之計算公式，則目前 $100 經過 8 年後其價值爲

$$P = S\left(\frac{1}{i}\right)\left[1 - \frac{1}{(1+i)^t}\right] = 100\left(\frac{1}{0.06}\right)\left[1 - \frac{1}{(1.06)^8}\right]$$

對 $1/(1.06)^8$ 取 logs ，

$$P = 100\left(\frac{1}{0.06}\right)(1 - 0.627) = 621.7$$

例題8.5

一廠商要購買一部機器，該機器每年可回收 $1000 之收益，共十年，且無殘值，當折現率爲 2 %時，試問此廠商願意支付多少以購此機器。利用例 4 之公式，可知

$$P = 1000\left(\frac{1}{0.02}\right)\left[1 - \frac{1}{(1.02)^{10}}\right]$$

對 $1/(1.02)^{10}$ 取 logs ，　　$P = 1000\left(\frac{1}{0.02}\right)(1 - 0.82) = 9000$

8.5 間斷與連續成長之轉換因子

7.2與 7.3節分別討論間斷與連續成長之問題，間斷成長之公式爲 $S = P(1 + i/m)^{mt}$ ；而連續成長之公式則爲 $S = Pe^{rt}$ ，又指數函數 $S = P(1 + i/m)^{mt}$ 可以轉換爲自然指數函數（即以連續成長公式之項表示者）。爲此，我們令兩式相等並解 r 如下所示：

$$P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} = Pe^{rt}$$

兩邊各除以 P ，

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} = e^{rt}$$

兩邊各取自然對數，則

$$\ln\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} = \ln e^{rt}$$

$$mt \ln\left(1 + \frac{i}{m}\right) = rt$$

兩邊再各除以 t ，故，

$$r = m \ln\left(1 + \frac{i}{m}\right)$$

故，　　$S = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} = Pe^{m \ln(1+i/m)t}$

例題8.6 .

自然指數函數可用以計算複利 10 % ，半年複利一次則 2 年後 $100 之價值 ，例

示如下。

$$S = Pe^{rt}$$

其中 $r = m \ln(1 + i/m)$。故

$$r = 2\ln\left(1 + \frac{0.10}{2}\right) = 2\ln 1.05 = 2(0.04879) = 0.09758$$

代入上式，

$$S = 100e^{(0.09758)2} = 100e^{0.19516}$$

因爲 $e^{0.19516}$ 無法由附錄 III 查到，故我們需使用插補法，0.19516 與 0.19 之差爲 0.2 與 0.19 之差的 51.6 %。因此，

$$e^{0.19516} = e^{0.19} + 0.516(e^{0.20} - e^{0.19}) = 1.2092 + 0.516(1.2214 - 1.2092) = 1.2092 + 0.0063 = 1.2155$$

故 $S = 100(1.2155) = 121.55$，如果我們如例 1 所示，只取四位數的話，其等於 121.6。

注意，如果是自然指數函數的話，連續成長之公式爲 Pe^{rt}，因此，本金 $100，利率 10 %而以半年複利一次則其每年成長率爲 0.09758 或 9.758 %，亦即，9.758 %之連續複利會等於 10 %利率每半年複利一次者。

例題8.7

一廠商目前年銷售額爲 $100,000，它計畫每年以 12 %成長，則它在 5 年後之計畫銷售額以一般指數函數計算如下，

$$S = 100{,}000(1 + 0.12)^5$$

故

$$\log S = \log 100{,}000 + 5\log 1.12 = 5 + 5(0.0492) = 5.2460$$

$$S = \text{antilog } 5.2460 = 176{,}200$$

例題8.8

於例 7 所描述之銷售計畫，我們亦可使用自然指數函數重新計算如下，其中 $r = m \ln(1 + i/m)$ 而 $m = 1$。

$$r = \ln 1.12 = 0.11333$$

故

$$S = 100{,}000e^{0.11333(5)} = 100{,}000(1.762) = 176{,}200$$

8.6 由資料所代表之時點估計其成長率

已知一函數——銷售量、成本、利潤——之兩組資料，從頭到尾呈一致的成長，則我們可以建立一自然指數之聯立方程組而測得每年成長率，此二組資料所代表之時點可以 $S = Pe^{rt}$ 表示，例如，如果第 1 年之銷售額爲 436 萬而第 4 年之銷售額爲 687

為，則分別代入一般公式可得

$$4.36 = Pe^{r(1)}$$
$$6.87 = Pe^{r(4)}$$

若本金額以百萬為單位，由於上式包含兩個方程式兩個未知數，故可求得其解。首先對每一方程式取自然對數，即

$$\ln 4.36 = \ln P + r$$
$$\ln 6.87 = \ln P + 4r$$

由附錄 II 求得 $\ln s$，並代入

$$1.47247 = \ln P + r \qquad (8.1)$$
$$1.92718 = \ln P + 4r \qquad (8.2)$$

(8.1)式減(8.2)式以消去 $\ln P$，

$$-0.45469 = -3r \qquad r = 0.15156$$

以 $r = 0.15156$ 代入(8.1)或(8.2)式，

$$1.47247 = \ln P + 0.15156 \qquad \ln P = 1.32091$$

因此，
$$P = \text{antilog}_e 1.32091 = 3.746$$

而
$$S = 3.746e^{0.1516t}$$

因為每年之連續成長率為 15.156 %，為求得間斷期間之成長率(i)，須使用下列公式

$$r = m \ln\left(1 + \frac{i}{m}\right)$$

由於每年複利一次，故 $m = 1$，

$$0.15156 = \ln(1 + i)$$
$$1 + i = \text{antilog}_e 0.15156 = 1.164$$
$$i = 1.164 - 1 = 0.164 \qquad 或 \qquad 16.4\%$$

例題8.9

使用上述已知資料，則一成長之指數函數可寫為 $S = P(1 + i)^t$。

將已知資料代入此公式，

$$4.36 = P(1 + i)^1 \qquad (8.3)$$
$$6.87 = P(1 + i)^4 \qquad (8.4)$$

兩方程式均取常用對數，

$$\log 4.36 = \log P + 1\log(1+i)$$
$$\log 6.87 = \log P + 4\log(1+i)$$

由附錄 I 求得諸 logs 並代入，

$$0.6395 = \log P + \log(1+i) \tag{8.5}$$
$$0.8370 = \log P + 4\log(1+i) \tag{8.6}$$

(8.5)式減(8.6)式

$$-0.1975 = -3\log(1+i) \qquad \log(1+i) = 0.0658$$
$$1+i = \text{antilog}\,0.0658 \cong 1.164$$
$$i = 1.164 - 1 = 0.164 = 16.4\%$$

然後，以 $i = 0.164$ 代入 (8.3) 式

$$4.36 = P(1+0.164) \qquad P = 3.746$$

因此

$$S = 3.746(1+0.164)^t$$

8.7 齊次生產函數

一生產函數如果當每一投入要素均乘以一正的變數常數 k，而此常數能完全被析出，則稱此生產函數爲齊次的(homogeneous)，如果要素之冪數爲 1，則此函數爲一次齊次；反之，如果要素之冪(指)數 >1 則此函數爲大於一次之齊次函數，最後，如果要素之指數小於 1 則此函數爲小於一次之齊次函數。若以數學式陳述則爲，一函數 $z=f(x,y)$，如果對每一正的實數 k 而言，$f(kx,ky)=k^n f(x,y)$ 成立的話則稱 f 爲 n 次齊次函數。

例題8.10

一函數之齊次性例示如下：

(1) $z=8x+9y$ 爲一次齊次，因爲

$$f(kx,ky) = 8kx + 9ky = k(8x+9y)$$

(2) $z=x^2+xy+y^2$ 爲二次齊次，因爲

$$f(kx,ky) = (kx)^2 + (kx)(ky) + (ky)^2 = k^2(x^2+xy+y^2)$$

(3) $z=x^{0.3}y^{0.4}$ 爲小於一次之齊次，因爲

$$f(kx,ky) = (kx)^{0.3}(ky)^{0.4} = k^{0.3+0.4}(x^{0.3}y^{0.4}) = k^{0.7}(x^{0.3}y^{0.4})$$

(4) $z=2x/y$ 爲零次齊次，因爲

$$f(kx,ky) = \frac{2kx}{ky} = 1\left(\frac{2x}{y}\right) \qquad \text{因 } \frac{k}{k} = k^0 = 1$$

(5) $z = x^3 + 2xy + y^3$ 並非齊次函數，因爲 k 並不能完全分解出：

$$f(kx,ky) = (kx)^3 + 2(kx)(ky) + (ky)^3$$
$$= k^3x^3 + 2k^2xy + k^3y^3 = k^2(kx^3 + 2xy + ky^3)$$

8.8 規模報酬

一生產函數，如果其全部投入均增加一已知比例 k，而其產出亦同比例增加，則此生產函數爲固定之**規模報酬**(constant returns to scale)，如果產出增加之比例大於 k 則爲**遞增的規模報酬**(increasing returns to scale)；反之，如果產出增加之比例小於 k，則爲**遞減之規模報酬**(diminishing returns to scale)。換句話說，如果生產函數大於、等於或小於一次齊次，則其規模報酬爲遞增、固定或遞減。

例題8.11

柯布道格拉斯生產函數(Cobb-Douglas production function, C-D)之形式爲

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

式中 A 爲正的常數，K 與 L 分別爲資本與勞動之投入，而 α 與 β 則爲正的但小於 1 之分數，一嚴格C - D生產函數指 $\alpha + \beta = 1$；而一般化之C - D生產函數其 $\alpha + \beta$ 可能 ≥ 1，但無論如何，其齊次次數與規模報酬可以很快地由其指數相加而知：

$$f(kK,kL) = A(kK)^{\alpha}(kL)^{\beta} = Ak^{\alpha}K^{\alpha}k^{\beta}L^{\beta}$$
$$= k^{\alpha+\beta}(AK^{\alpha}L^{\beta}) = k^{\alpha+\beta}(Q)$$

因此，如果

$\alpha + \beta = 1$，則規模報酬固定

$\alpha + \beta > 1$，則規模報酬遞增

$\alpha + \beta < 1$，則規模報酬遞減

注意，就嚴格之C - D生產函數而言，其規模報酬必然是固定的。

例題8.12

已知：生產函數(1) $Q = 120K^{0.7}L^{0.8}$，(2) $Q = 250K^{0.2}L^{0.7}$。

(1)之規模報酬遞增，因爲 $0.7 + 0.8 = 1.5 > 1$，而(2)之規模報酬遞減，因爲 $0.2 + 0.7 = 0.9 < 1$。

例題8.13

已知：$Q = 1000K^{0.4}L^{0.5}$，其中 $K = 80$ 且 $L = 220$。試利用 logs 求 Q：

$$Q = 1000(80)^{0.4}(220)^{0.5}$$
$$\log Q = \log 1000 + 0.4 \log 80 + 0.5 \log 220$$
$$= 3 + 0.4(1.9031) + 0.5(2.3424) = 4.9324$$
$$Q = \text{antilog } 4.9324 = 85{,}580$$

習題與解答

複　利

8.1 已知本金 \$1000，利率 6 % 當複利計算之方式分別爲 (*a*) 每年，(*b*)半年一次，(*c*) 每季一次，時試以 logs 求三年後之未來值（*S*）。記住，因爲四位數之對數表只有四位數精確，故所有答案必須以四位數寫出。

圖 (*a*)
$$S = P(1+i)^t = 1000(1+0.06)^3$$
$$\log S = \log 1000 + 3\log 1.06 = 3 + 3(0.0253) = 3.0759$$
$$S = \text{antilog } 3.0759 \cong 1191$$

(*b*)
$$S = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt} = 1000\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{2(3)} = 1000(1.03)^6$$
$$\log S = \log 1000 + 6\log 1.03 = 3 + 6(0.0128) = 3.0768$$
$$S = \text{antilog } 3.0768 \cong 1194$$

(*c*)
$$S = 1000\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^{4(3)} = 1000(1.015)^{12}$$
$$\log S = \log 1000 + 12\log 1.015 = 3 + 12(0.0065) = 3.0780$$
$$S = \text{antilog } 3.0780 \cong 1197$$

8.2 已知本金 \$100，利率 8 % 期間 5 年，重新作問題 8.1。

圖 (*a*)
$$S = 100(1.08)^5$$
$$\log S = \log 100 + 5\log 1.08 = 2 + 5(0.0334) = 2.1670$$
$$S = \text{antilog } 2.1670 \cong 146.9$$

(*b*)
$$S = 100\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{2(5)} = 100(1.04)^{10}$$
$$\log S = \log 100 + 10\log 1.04 = 2 + 10(0.0170) = 2.1700$$
$$S = \text{antilog } 2.1700 \cong 147.9$$

(*c*)
$$S = 100\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{4(5)} = 100(1.02)^{20}$$
$$\log S = \log 100 + 20\log 1.02 = 2 + 20(0.0086) = 2.1720$$
$$S = \text{antilog } 2.1720 \cong 148.6$$

8.3 已知本金 \$1250，利率 12 %，期間 4 年，重新作問題 8.1。

圖 (*a*)
$$S = 1250(1.12)^4$$
$$\log S = 3.0969 + 4(0.0492) = 3.2937$$
$$S = \text{antilog } 3.2937 \cong 1966$$

(*b*)
$$S = 1250(1.06)^8$$
$$\log S = 3.0969 + 8(0.0253) = 3.2993$$
$$S = \text{antilog } 3.2993 \cong 1992$$

(*c*)
$$S = 1250(1.03)^{16}$$
$$\log S = 3.0969 + 16(0.0128) = 3.3017$$
$$S = \text{antilog } 3.3017 \cong 2003$$

8.4 本金 \$100，利率 5 %，期間 6 年，當複利計算方式分別爲 (*a*) 每年，(*b*)連續

地，試以 logs 求其未來值。

圖 (a) $S = 100(1.05)^6$

$\log S = 2 + 6(0.0212) = 2.1272$

$S = \text{antilog } 2.1272 \cong 134$

(b) $S = Pe^{rt} = 100e^{0.05(6)} = 100e^{0.3}$

由附錄 III 知， $S = 100(1.3499) = 134.99$

8.5 已知本金 \$150，利率 7 %，期間 4 年，試重新作問題 8.4。

圖 (a) $S = 150(1.07)^4$

$\log S = 2.1761 + 4(0.0294) = 2.2937$

$S = \text{antilog } 2.2937 \cong 196.6$

(b) $S = 150e^{0.07(4)} = 150e^{0.28}$

$S = 150(1.3231) = 198.47$

8.6 由問題 8.5，試利用自然對數求 (a) $S = 150\,e^{0.28}$ 與 (b) $S = 100\,e^{0.3}$。

圖 (a) $\ln S = \ln 150 + 0.28 = 5.01064 + 0.28 = 5.29064$

$S = \text{antilog}_e\, 5.29064 \cong 198.47$

(b) $\ln S = \ln 100 + 0.3 = 4.60517 + 0.3 = 4.905$

$S = \text{antilog}_e\, 4.90517 \cong 134.99$

8.7 本金 \$100，利率 6 %而複利方式爲 (a) 半年一次，(b)連續複利時求其實際年利率。

圖 (a) 由 8.2 節知，

$$i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 = (1.03)^2 - 1$$

其中 $\log (1.03)^2 = 2 \log 1.03 = 2(0.0128) = 0.0256$; $(1.03)^2 = \text{antilog } 0.0256 = 1.061$.

因此，

$$i_e = 1.061 - 1 = 0.061 = 6.1\%$$

(b) 由 8.2 節知，

$$i_e = e^r - 1 = e^{0.06} - 1$$

再從附錄 III 知， $i_e = 1.0618 - 1 = 0.0618 = 6.18\%$.

8.8 本金 \$1000，利率 12 %，而複利方式分別爲 (a) 每季一次，(b)連續複利時，求其實際年利率。

圖 (a)

$$i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 = (1.03)^4 - 1$$

其中 $\log (1.03)^4 = 4 \log 1.03 = 4(0.0128) = 0.0512$; $(1.03)^4 = \text{antilog } 0.0512 = 1.125$.

因此，

$$i_e = 1.125 - 1 = 0.125 = 12.5\%$$

(b)

$$i_e = e^r - 1 = e^{0.12} - 1$$

$$= 1.1275 - 1 = 0.1275 = 12.75\%$$

時間因素

8.9 以每年複利一次的計算方式，十年後本利和爲目前金額之一倍則其利率應爲多少？

圖

$$S = P(1 + i)^t$$

如果金額加倍，即 $S = 2P$。故， $2P = P(1 + i)^{10}$。

兩邊除以 P，並取 10 次方根，

$2 = (1+i)^{10}$ $\quad (1+i) = \sqrt[10]{2}$

用自然對數並取 5 位數，則

$$\ln(1+i) = \tfrac{1}{10}\ln 2 = \tfrac{1}{10}(0.69315) = 0.06932$$

故，

$$1+i = \text{antilog}_e\, 0.06932 = 1.0718$$
$$i = 1.0718 - 1 = 0.0718 = 7.18\%$$

3.10 以半年複利一次，6 年後本利和爲目前金額之兩倍，則其利率應爲若干？

圖

$$S = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}$$
$$2P = P\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2(6)}$$
$$2 = (1+0.5i)^{12}$$
$$1+0.5i = \sqrt[12]{2}$$
$$\ln(1+0.5i) = \tfrac{1}{12}(\ln 2) = \tfrac{1}{12}(0.69315) = 0.05776$$
$$1+0.5i = \text{antilog}_e\, 0.05776 = 1.0595$$
$$0.5i = 0.0595 \qquad i = 0.119 = 11.9\%$$

8.11 以每季複利一次計算方式，十年後本利和爲目前金額之三倍，則其利率應爲多少？

圖

$$S = P\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4(10)}$$

如果金額增加三倍，

$$3P = P\left(1+\frac{i}{4}\right)^{40}$$
$$3 = (1+0.25i)^{40}$$
$$(1+0.25i) = \sqrt[40]{3}$$
$$\ln(1+0.25i) = \tfrac{1}{40}\ln 3 = \tfrac{1}{40}(1.09861) = 0.02747$$
$$1+0.25i = \text{antilog}_e\, 0.02747 = 1.0279$$
$$0.25i = 0.0279 \qquad i = 0.1116 = 11.16\%$$

8.12 以連續複利計算方式，8 年後本利和爲目前金額的三倍，則其利率應爲多少？

圖

$$S = Pe^{rt}$$
$$3P = Pe^{r(8)}$$
$$\ln 3 = \ln e^{8r}$$
$$1.09861 = 8r \qquad r = 0.1373 = 13.73\%$$

8.13 以連續複利計算方式，25 年後本利和爲目前金額之五倍，則其利率應爲多少？

圖

$$S = Pe^{rt}$$
$$5 = e^{25r}$$
$$\ln 5 = 25r$$
$$1.60944 = 25r \qquad r = 0.0644 = 6.44\%$$

8.14 以每年複利計算方式，利率爲 12 %，則經過幾年後其本利和爲目前金額之兩倍？答案取到小數點兩位。

圖
$$S = P(1+i)^t \qquad 2 = (1+0.12)^t$$
$$\ln 2 = t \ln 1.12 \qquad 0.69315 = 0.11333t$$
$$t \cong 6.12 \text{ 年}$$

8.15 以半年複利一次計算方式，利率爲 8 %，則經過多少年後本利和爲現值之 $2\frac{1}{2}$ 倍？

圖
$$S = P\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{2t} \qquad 2.5 = (1.04)^{2t}$$
$$\ln 2.5 = 2t \ln 1.04 \qquad 0.91629 = 2(0.03922)t$$
$$t \cong 11.68 \text{ 年}$$

8.16 以每季複利一次計算方式，利率爲 5 %，則經過多少年後本利和爲現值之兩倍?

圖
$$S = P\left(1+\frac{0.05}{4}\right)^{4t} \qquad 2 = (1.0125)^{4t}$$
$$\ln 2 = 4t \ln 1.0125 \qquad 0.69315 = 4(0.01242)t$$
$$t \cong 13.95 \text{ 年}$$

8.17 以連續複利計算方式，則在利率爲 (*a*) 12 %，(*b*) 9 % 時須經過多少年後其本利和分別爲現值之 4 倍及 3 倍？

圖 (*a*) $S = Pe^{rt}$ $\quad 4 = e^{0.09t}$ $\quad$ (*b*) $S = Pe^{rt}$ $\quad 3 = e^{0.12t}$

$\ln 4 = 0.09t$ $\quad 1.38629 = 0.09t$ $\quad \ln 3 = 0.12t$ $\quad 1.09861 = 0.12t$

$t \cong 15.4$ 年 $\quad t = 9.16$ 年

折 現

8.18 當現行利率爲 10 %，如果利息計算方式爲 (*a*) 每年複利一次，(*b*) 半年複利一次時試求 4 年後本利和爲 \$750 之現值若干？

圖 (*a*) $P = S(1+i)^{-t} = 750(1.10)^{-4}$

$\log P = 2.8751 - 4(0.0414) = 2.7095$

$P = \text{antilog } 2.7095 = 512.3$

(*b*) $P = S\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mt} = 750(1.05)^{-8}$

$\log P = 2.8751 - 8(0.0212) = 2.7055$

$P = \text{antilog } 2.7055 = 507.6$

8.19 現行利率 4 %，7 年後本利和爲 \$600，試重新作問題 8.18。

圖 (*a*) $P = 600(1.04)^{-7}$

$\log P = 2.7782 - 7(0.0170) = 2.6592$

$P = \text{antilog } 2.6592 = 456.2$

(*b*) $P = 600(1.02)^{-14}$

$\log P = 2.7782 - 14(0.0086) = 2.6578$

$P = \text{antilog } 2.6578 = 454.8$

8.20 利率爲 8 %，當利息計算方式爲 (*a*) 每年複利一次，(*b*) 連續複利時，試求 3 年後本利和爲 \$500 之現值？

圖 (a) $P = 500(1.08)^{-3}$

$\log P = 2.6990 - 3(0.0334) = 2.5988$

$P = \text{antilog } 2.5988 = 397.0$

(b) $P = Se^{-rt} = 500e^{-0.08(3)} = 500e^{-0.24}$

$P = 500(0.786628) = 393.31$

8.21 利率爲 9 %，5 年後本利和 \$ 120，試重新作問題 8.20。

圖 (a) $P = 120(1.09)^{-5}$

$\log P = 2.0792 - 5(0.0374) = 1.8922$

$P = \text{antilog } 1.8922 = 78.02$

(b) $P = 120e^{-0.09(5)} = 120e^{-0.45}$

$= 120(0.637628) = 76.52$

8.22 試利用自然對數求解問題 8.21(*b*)。

圖

$$P = 120e^{-0.45}$$

$$\ln P = \ln 120 + (-0.45) = 4.78749 - 0.45 = 4.33749$$

$$P = \text{antilog}_e\, 4.33749 = 76.52$$

未來川流之折現

8.23 每年收入 \$ 1000，折現率爲 4 % 且以每年複利一次之方式計算，試求 4 年之現值爲若干？

圖

$$P = S\left(\frac{1}{i}\right)\left[1 - \frac{1}{(1+i)^t}\right] = 1000\left(\frac{1}{0.04}\right)\left[1 - \frac{1}{(1.04)^4}\right]$$

其中 $\log [1/(1.04)^4] = \log 1 - 4 \log 1.04 = 0 - 4(0.0170) = -0.0680 = 0.9320 - 1.$

因此，$\dfrac{1}{(1.04)^4} = \text{antilog } (0.9320 - 1) = 0.855$

代入上式 $P = 1000\left(\dfrac{1}{0.04}\right)(1 - 0.855) = 25{,}000(0.145) = 3625$

8.24 購買一部機器每年可獲淨儲金 \$ 600 共 8 年，則當此機器無殘值，且折現率爲 12 % 時廠商願意支付多少來購買此部機器？

圖

$$P = 600\left(\frac{1}{0.12}\right)\left[1 - \frac{1}{(1.12)^8}\right]$$

其中 $\log \dfrac{1}{(1.12)^8} = \log 1 - 8 \log 1.12$

$= 0 - 8(0.0492) = -0.3936 = 0.6064 - 1$

而 $\dfrac{1}{(1.12)^8} = \text{antilog } (0.6064 - 1) = 0.404$

代入上式，$P = 600\left(\dfrac{1}{0.12}\right)(1 - 0.404) = 2980$

8.25 某廠商以 \$ 6500 購買一部機器，並預期在該部機器之 11 年的使用期限裡，每年回收 10 % 之報酬，試計算每年從此部機器獲得之淨儲金爲若干？

圖
$$6500 = S\left(\frac{1}{0.10}\right)\left[1 - \frac{1}{(1.10)^{11}}\right]$$

其中
$$\log \frac{1}{(1.10)^{11}} = 1 - 11(0.0414) = -0.4554 = 0.5446 - 1$$

而
$$\frac{1}{(1.10)^{11}} = \text{antilog}\,(0.5446 - 1) = 0.35$$

代入上式可得，
$$6500 = S\left(\frac{1}{0.10}\right)(1 - 0.35) \qquad S = \$1000$$

指數形式之成長函數

8.26 某廠商年銷售額爲 150,000 並預期每年以 8 %成長，試求 6 年後之預期銷售額爲若干？

圖
$$S = 150{,}000(1.08)^6$$
$$\log S = \log 150{,}000 + 6\log 1.08 = 5.1761 + 6(0.0334) = 5.3765$$
$$S = \text{antilog}\,5.3765 = 237{,}900$$

8.27 假設十年內計畫利潤每年成長 9 %，而目前利潤爲 240,000，則十年後其利潤水準爲若干？

圖
$$\pi = 240{,}000(1.09)^{10}$$
$$\log \pi = \log 240{,}000 + 10\log 1.09 = 5.3802 + 10(0.0374) = 5.7542$$
$$\pi = \text{antilog}\,5.7542 = 567{,}900$$

8.28 食品之費用每年以 3.6 %增加，則目前每月之食品支出爲 $200 之家庭，預計 5 年後每月對食品之支出爲多少？

圖
$$F = 200(1.036)^5$$
$$\log F = 2.3010 + 5(0.0153) = 2.3775$$
$$F = 238.5$$

8.29 以 1973 年爲基期（指數爲 100）如果生活費用每年以 12.5 %增加，則在 1980 年時其生活費用指數爲若干？

圖
$$C = 100(1.125)^7$$
$$\log C = 2 + 7(0.0512) = 2.3584$$
$$C = 228.3$$

8.30 某打折出售之布行每天以 10 %減價，一直到財貨售盡，則 $175 一套西裝在 5 天後售價爲多少？

圖
$$P = 175(1 - 0.10)^5 = 175(0.9)^5$$
$$\log P = 2.2430 + 5(0.9542 - 1) = 2.2430 + 4.7710 - 5 = 2.0140$$
$$P = \text{antilog}\,2.0140 = \$103.30$$

8.31 一部新車在第一年時每個月以 3 %爲其折舊，則價值爲 $ 6000之車子在年底時其帳面價值爲若干？

圖
$$B = 6000(0.97)^{12}$$
$$\log B = 3.7782 + 11.8416 - 12 = 3.6198$$
$$B = \text{antilog } 3.6198 \approx \$4167$$

8.32 如果貨幣之價值每年減低 2.6 %，則目前 1 塊錢到 25 年後其價值爲若干？

圖
$$D = 1.00(0.974)^{25}$$
$$\log D = 0 + 25(0.9886 - 1) = -0.2850 = 0.7150 - 1$$
$$D = \text{antilog } 0.7150 - 1 = 0.519 \quad \text{或} \quad 51.9¢$$

8.33 平均每一家醫院在 1969 年底成本爲 $ 500 ，而在 1979 年時其平均成本爲 $ 1500 ，試問其年增加率爲若干？

圖
$$1500 = 500(1 + i)^{10}$$
$$3 = (1 + i)^{10}$$
$$1 + i = \sqrt[10]{3}$$
$$\log (1 + i) = \tfrac{1}{10}(0.4771) = 0.0477$$
$$1 + i = 1.116 \qquad i = 11.6\%$$

8.34 一個 5 年發展計畫擬擴大投資由 260 萬增至 420 萬，試問平均每年投資增加率爲若干？

圖
$$4.2 = 2.6(1 + i)^5$$
$$1.615 = (1 + i)^5$$
$$1 + i = \sqrt[5]{1.615}$$
$$\log (1 + i) = \tfrac{1}{5}(0.2082) = 0.0416$$
$$1 + i = \text{antilog } 0.0416 = 1.10 \qquad i = 0.10 = 10\%$$

8.35 一發展中國家計畫將目前儲蓄 560 萬增加至 1200 萬，如果每年以 15 %之增加率累積的話，總共需幾年才能達到此水準？

圖
$$12 = 5.6(1.15)^t$$
$$\log 12 = \log 5.6 + t \log 1.15$$
$$1.0792 = 0.7482 + 0.607t$$
$$t = 5.45 \text{ 年}$$

8.36 在第三世界中許多國家之人口成長率爲 3.2 %，試計算目前 1,000,000之人口的國家，20 年後共有多少人口。

圖 因爲人口之成長是連續的，故我們須採用自然指數函數

$$P = 1{,}000{,}000e^{0.032(20)} = 1{,}000{,}000e^{0.64}$$
$$= 1{,}000{,}000(1.8965) = 1{,}896{,}500$$

8.37 於問題 8.36 所述之國家，如果將人口成長壓低爲 2.4 %，則 20 年後其人口數

爲多少？

圖
$$P = 1{,}000{,}000e^{0.024(20)} = 1{,}000{,}000e^{0.48}$$
$$= 1{,}000{,}000(1.6161) = 1{,}616{,}100$$

8.38 如果全世界的人口增加率爲每年 2.6 %，則幾年後人口加倍？

圖
$$2 = e^{0.026t}$$
$$\ln 2 = 0.026t$$
$$0.69315 = 0.026t \qquad t = 26.66 \text{ 年}$$

8.39 如果撒哈拉沙漠之可耕地因爲氣候條件之故每年以 3.5 % 之比率被侵蝕，則目前可耕地之面積（A）經過 12 年後剩下多少？

圖
$$P = Ae^{-0.035(12)} = Ae^{-0.42}$$
$$= 0.657047A \quad \text{或} \quad 66\%$$

指數函數之轉換

8.40 本金 $2000，半年複利一次，利率 12 %，試求三年後之未來值 (a) 用指數函數，(b) 用對等之自然指數函數。

圖 (a)
$$S = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt} = 2000\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{2(3)} = 2000(1.06)^6$$
$$\log S = 3.3010 + 6(0.0253) = 3.4528$$
$$S = 2837$$

圖 (b)
$$S = Pe^{rt}$$
其中 $r = m\ln(1 + i/m) = 2\ln 1.06 = 2(0.05827) = 0.11654.$
因此，
$$S = 2000e^{0.11654(3)} = 2000e^{0.34962}$$
$$= 2000(1.4185) = 2837$$

8.41 本金 $600，利率 9 %，每年複利一次，期間 5 年，試重新作問題 8.40。

圖 (a)
$$S = 600(1.09)^5$$
$$\log S = 2.7782 + 5(0.0374) = 2.9652$$
$$S = 923$$

(b) $S = Pe^{rt}$. 當 $r = \ln 1.09 = 0.08618$. 故，
$$S = 600e^{0.08618(5)} = 600e^{0.4309}$$
$$= 600(1.5386) = 923$$

8.42 本金 $1800，利率 8 %，每季複利一次，期間 $2\frac{1}{2}$ 年，試重新作問題 8.40。

圖 (a) $S = 1800(1.02)^{10}$
$$\log S = 3.2553 + 10(0.0086) = 3.3413$$
$$S = 2194$$

(b) $r = 4\ln 1.02 = 4(0.01980) = 0.07920$
$$S = 1800e^{0.07920(2.5)} = 1800e^{0.19800}$$
$$= 1800(1.21896) = 2194.1$$

8.43 試將 $S = Pe^{0.07696t}$ 轉換爲每年複利一次之間斷的對等形式。

圖
$$r = m \ln\left(1 + \frac{i}{m}\right)$$

因爲複利是每年一次，故 $m = 1$

$$0.07696 = \ln(1 + i)$$
$$1 + i = \text{antilog}_e\, 0.07696 = 1.08$$
$$i = 0.08$$

因此，
$$S = P(1.08)^t$$

8.44 試將 $Pe^{0.09758t}$ 轉換爲半年複利一次之間斷的對等形式。

圖
$$r = 2 \ln(1 + 0.5i)$$
$$0.09758 = 2 \ln(1 + 0.5i)$$
$$1 + 0.5i = \text{antilog}_e\, 0.04879 = 1.05$$
$$0.5i = 0.05 \qquad i = 0.10$$

因此，
$$S = P(1.05)^{2t}$$

8.45 試將 $S = Pe^{0.15688t}$ 轉換爲每季複利一次之間斷的對等形式。

圖
$$r = 4 \ln(1 + 0.25i)$$
$$\tfrac{1}{4}(0.15688) = \ln(1 + 0.25i)$$
$$1 + 0.25i = \text{antilog}_e\, 0.03922 = 1.04$$
$$i = 0.16$$
$$S = P(1.04)^{4t}$$

由資料建立指數函數

8.46 設一廠商之銷售額由第 1 年之 $1000 成長至第 6 年之 $1500，試寫出銷售額爲時間之指數函數，並求其名目成長率。

圖　將已知資料代入一般公式，$S = P(1 + i)^t$，

$$1000 = P(1 + i)^1 \qquad (8.7)$$
$$1500 = P(1 + i)^6 \qquad (8.8)$$

取對數，
$$3 = \log P + \log(1 + i) \qquad (8.9)$$
$$3.1761 = \log P + 6 \log(1 + i) \qquad (8.10)$$

(8.9) 式減 (8.10) 式，
$$-0.1761 = -5 \log(1 + i)$$
$$\log(1 + i) = 0.0352$$
$$1 + i = 1.085 \qquad i = 8.5\%$$

代入 (8.7) 式，
$$1000 = P(1.085) \qquad P = 921.66$$

故本題之指數函數爲 $s = 921.66(1.085)^t$，而名目成長率爲 8.5 %。

8.47 某一新的競技場之平均觀衆由第二年全年之 22,000 人增加到第 6 年全年之 40,000 人，試寫出觀衆 (A) 之指數函數並求出成長率。

又

$$\log 32{,}320 = \log P(1+i)^4 \tag{8.12}$$

$$4.5092 = \log P + 4\log(1+i)$$

取 logs ，

$$4.3424 = \log P + 2\log(1+i)$$

$$4.5092 = \log P + 6\log(1+i)$$

相減以消去 $\log P$ ，

$$0.2593 = 4\log(1+i)$$

$$\log(1+i) = 0.0649$$

$$i = 0.161$$

代入（8.11）式，

$$32{,}320 = P(1.161)^4 \qquad P = 16{,}321$$

故，$A = 16{,}321(1.161)^t$ 且 $i = 0.161$ ，

齊次性與規模報酬

8.48 試對下列各生產函數，求其齊次性及規模報酬之類型。

圖 (a) $Q = x^2 + 6xy + 7y^2$

Q 爲二次齊次且規模報酬遞增，因爲

$$f(kx,ky) = (kx)^2 + 6(kx)(ky) + 7(ky)^2 = k^2(x^2 + 6xy + 7y^2)$$

(b) $Q = x^3 - xy^2 + 3y^3 + x^2y$

Q 爲三次齊次且規模報酬遞增，因爲

$$f(kx,ky) = (kx)^3 - (kx)(ky)^2 + 3(ky)^3 + (kx)^2(ky) = k^3(x^3 - xy^2 + 3y^3 + x^2y)$$

(c) $Q = \dfrac{3x^2}{5y^2}$

Q 爲零次齊次且規模報酬遞減，因爲

$$f(kx,ky) = \frac{3(kx)^2}{5(ky)^2} = \frac{3x^2}{5y^2} \qquad \text{且} \qquad k^0 = 1$$

第九章

指數、對數與冪函數之微分法

9-1 冪函數法則

冪函數 $y=x^a$ 之導數爲

$$\frac{dy}{dx}=ax^{a-1}$$

例題9.1

對冪函數取導數例示如下。

(1) 已知 $y=x^{1/4}$ ，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}x^{(1/4)-1}=\frac{1}{4}x^{-3/4}$$

(2) 已知 $y=x^{-3}$ ，

$$\frac{dy}{dx}=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}$$

9-2 自然指數函數法則

自然指數函數 $y=e^u$ ，其中 u 爲 x 之函數，其導數爲

$$\frac{dy}{dx}=e^u\frac{du}{dx} \tag{9.1}$$

簡言之，一自然指數函數之導數等於原先之自然指數乘以其指數之導數。

例題9.2

自然指數函數之微分，例示如下：

(1) 求 $y=e^{x^2}$ 之導數，首先令 u 等於其指數，本例中 $u=x^2$ ；因此， $du/dx=2x$ ，代入（9.1）式

$$\frac{dy}{dx}=e^{x^2}(2x)=2xe^{x^2}$$

(2) 已知 $y=e^x$ ，其中 $u=x$ ，則 $du/dx=1$ ，其導數爲

$$\frac{dy}{dx} = e^x(1) = e^x$$

例題 9.3

一函數上已知點之斜率爲此函數在該已知點上之導數，例如，計算 $y = 1.25e^{4x}$ 在 $x = 0.5$ 之斜率，首先取其導數：

$$\frac{dy}{dx} = 1.25e^{4x}(4) = 5e^{4x}$$

則，當 $x = 0.5$ 時，

$$\frac{dy}{dx} = 5e^{4(0.5)} = 5e^2$$

由附錄 III 可得，

$$\frac{dy}{dx} = 5(7.389) = 36.95$$

9.3 指數函數法則(基底爲 a)

指數函數 $y = a^u$，其中 u 爲 x 之函數，其導數爲

$$\frac{dy}{dx} = a^u \frac{du}{dx}(\ln a) \tag{9.2}$$

亦即等於原先之函數乘以指數之導數再乘以基底之自然對數。

例題 9.4

指數函數取其導數之法則三個範例說明如下：

(1) 已知 $y = a^{1-2x}$，因爲 $u = 1 - 2x$，則 $du/dx = -2$，代入 (9.2) 式，則其導數爲

$$\frac{dy}{dx} = a^{1-2x}(-2)\ln a = -2a^{1-2x}\ln a$$

(2) 已知 $y = a^x$，令 $u = x$，$du/dx = 1$，因而

$$\frac{dy}{dx} = a^x(1)\ln a = a^x \ln a$$

a 亦可假設爲一數值，參見問題 9.7(a) 與 (d)。

(3) 已知 $y = x^2a^{3x}$。因爲此函數爲 x^2 與 a^{3x} 之乘積，故我們必須使用乘積律。

$$y' = x^2[a^{3x}(3)\ln a] + a^{3x}(2x)$$
$$= xa^{3x}(3x\ln a + 2)$$

9.4 自然對數函數法則

自然對數函數 $y = \ln u$，其中 u 爲 x 之函數，其導數爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}\frac{du}{dx} \tag{9.3}$$

例題9.5

求取自然對數函數之導數，例示如下：

(1) 已知 $y=\ln 6x^2$ 。令 $u=6x^2$ ，則 $du/dx=12x$ ，代入（9.3）式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{6x^2}(12x)=\frac{2}{x}$$

(2) 已知 $y=\ln x$ 。令 $u=x$ ，$du/dx=1$ ，因而

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}(1)=\frac{1}{x}$$

(3) 已知 $y=\ln(x^2+6x+2)$ 。其導數爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2+6x+2}(2x+6)=\frac{2x+6}{x^2+6x+2}$$

計算此函數在 $x=4$ 之斜率

$$\frac{dy}{dx}=\frac{14}{42}=\frac{1}{3}$$

9.5 對數函數法則

對數函數 $y=\log_a u$ ，其中 u 爲 x 之函數，其導數爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\log_a e \qquad 或 \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\frac{1}{\ln a}$$

因爲 $\log_a e=1/\ln a$ 。

例題9.6

對數函數之導數的求法例示如下：

(1) 已知 $y=\log_a(2x^2+1)$ 。令 $u=2x^2+1$ ，$du/dx=4x$ 。其導數爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x^2+1}(4x)\log_a e=\frac{4x}{2x^2+1}\log_a e$$

或

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x}{(2x^2+1)\ln a}$$

(2) 已知 $y=\log_a x$ 。令 $u=x$ ，$du/dx=1$ ，因而

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}(1)\log_a e=\frac{\log_a e}{x}$$

或

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\ln a}$$

9.6 高階導數

高階導數即對前一個導數再取導數。

例題9.7

試求下列各函數之一階與二階導數：

(1) 已知 $y=e^{5x}$。其一階與二階導數爲

$$\frac{dy}{dx}=e^{5x}(5)=5e^{5x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=5e^{5x}(5)=25e^{5x}$$

(2) 已知 $y=a^x$。其一階導數爲

$$\frac{dy}{dx}=a^x(1)\ln a=a^x\ln a$$

式中 $\ln a$ 爲常數，故，二階導數爲

$$\frac{d^2y}{dx^2}=a^x(\ln a)(1)(\ln a)=a^x(\ln a)^2=a^x\ln^2 a$$

(3) 已知 $y=\ln 2x$。其一階導數爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x}(2)=\frac{1}{x}\quad 或\quad x^{-1}$$

經由簡單之冪函數法則可得，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-x^{-2}\quad 或\quad -\frac{1}{x^2}$$

(4) 已知 $y=\log_a 3x$。其一階導數爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3x}(3)\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$$

經由商數法則可知，又式中 $\ln a$ 爲常數，故二階導數爲

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x\ln a(0)-1\ln a}{(x\ln a)^2}=\frac{-\ln a}{x^2\ln^2 a}=-\frac{1}{x^2\ln a}$$

9.7 偏導數

偏導數是指對函數中某一變數微分，而其它獨立變數則固定不變。

例題9.8

試求下列各函數之一階與二階偏導數如下：

(1) 已知 $z = e^{(3x+2y)}$ 。其一階與二階偏導數爲

$$z_x = e^{(3x+2y)}(3) = 3e^{(3x+2y)} \qquad z_y = e^{(3x+2y)}(2) = 2e^{(3x+2y)}$$
$$z_{xx} = 3e^{(3x+2y)}(3) = 9e^{(3x+2y)} \qquad z_{yy} = 2e^{(3x+2y)}(2) = 4e^{(3x+2y)}$$
$$z_{xy} = 6e^{(3x+2y)} = z_{yx}$$

(2) 已知 $z = x^{0.6}y^{0.8}$ 。其偏導數爲

$$z_x = 0.6x^{-0.4}y^{0.8} \qquad z_y = 0.8x^{0.6}y^{-0.2}$$
$$z_{xx} = -0.24x^{-1.4}y^{0.8} \qquad z_{yy} = -0.16x^{0.6}y^{-1.2}$$
$$z_{xy} = 0.48x^{-0.4}y^{-0.2} = z_{yx}$$

9.8 指數與對數函數之最適化

有關指數與對數函數求其最適化問題之一般法則與 4.2 與 5.7 節相同。

例題9.9

指數與對數函數求其臨界值之方法，並判別其是否爲極大或極小值，例示如下：

(1) 已知 $y = 2xe^{4x}$ ，使用乘法律，並令導數爲 0 ，

$$\frac{dy}{dx} = 2x(4e^{4x}) + 2(e^{4x}) = 0$$
$$= 2e^{4x}(4x+1) = 0$$

當導數等於 0 時， $2e^{4x} = 0$ 或 $4x + 1 = 0$ 。因爲 $2e^{4x} \neq 0$ 對於 x 任意值，

$$4x + 1 = 0 \qquad \bar{x} = -\tfrac{1}{4}$$

檢查其二階條件

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^{4x}(4) + (4x+1)(2e^{4x})(4) = 8e^{4x}(4x+2)$$

計算臨界值之函數值，即 $\bar{x} = -\frac{1}{4}$ ， $d^2y/dx^2 = 8e^{-1}(-1+2) = 8/e > 0$ 。因爲二階導數爲正，故此函數有極小值。

(2) 已知 $y = \ln(x^2 - 6x + 10)$ ，經由自然對數法則知，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-6}{x^2-6x+10} = 0$$

兩邊乘以分子， $x^2 - 6x + 10$ ，

$$2x-6=0, \qquad \bar{x}=3$$

使用簡單之商數法則求其二階導數，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x^2-6x+10)(2)-(2x-6)(2x-6)}{(x^2-6x+10)^2}$$

計算 $\bar{x}=3$ 之二階導數值，$d^2y/dx^2=2>0$。故此函數有極小值。

(3) 已知 $z=e^{(x^2-2x+y^2-6y)}$。

$$z_x=(2x-2)e^{(x^2-2x+y^2-6y)}=0 \qquad z_y=(2y-6)e^{(x^2-2x+y^2-6y)}=0$$

因爲 $e^{(x^2-2x+y^2-6y)}\neq 0$ 對於每一 x 或 y 而言，

$$2x-2=0 \qquad 2y-6=0$$
$$\bar{x}=1 \qquad \bar{y}=3$$

使用乘積律檢查其二階條件，

$$z_{xx}=(2x-2)(2x-2)e^{(x^2-2x+y^2-6y)}+e^{(x^2-2x+y^2-6y)}(2)$$
$$z_{yy}=(2y-6)(2y-6)e^{(x^2-2x+y^2-6y)}+e^{(x^2-2x+y^2-6y)}(2)$$

以 $\bar{x}=1$，$\bar{y}=3$ 計算其值，

$$z_{xx}=0+2e^{-10}>0 \qquad z_{yy}=0+2e^{-10}>0$$

因爲 e 之任何次方爲正，然後檢查其交叉偏導數，

$$z_{xy}=(2x-2)(2y-6)e^{(x^2-2x+y^2-6y)}=z_{yx}$$

計算 $\bar{x}=1$，$\bar{y}=3$ 之值，$z_{xy}=0=z_{yx}$。因爲 z_{xx} 與 $z_{yy}>0$ 且 $z_{xx}z_{yy}>(z_{xy})^2$ 故此函數在 $\bar{x}=1$ 與 $\bar{y}=3$ 爲極小值。

9·9 另一種測量成長之方法

一函數 $y=f(t)$ 之成長（G）定義如下：

$$G=\frac{dy/dt}{y}=\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{y}{y}$$

由 9.4節可知，此定義剛好即爲 $\ln G$ 之導數，因此一函數之成長可由下列方法測得，(1)該函數之導數除以函數本身，(2)對此函數取自然導數然後再予以化簡，當函數形式更複雜時後者將更爲有用。

例題9.10

試求 $V = Pe^{rt}$ 之成長率其中 P 爲常數，我們使用上述兩種方法分別例示如下：

(1) 使用第一種方法，

$$G = \frac{V'}{V}$$

其中 $V' = Pe^{rt}(r) = rPe^{rt}$，則

$$G = \frac{rPe^{rt}}{Pe^{rt}} = r$$

(2) 第二種方法，首先取其自然對數如下：

$$\ln V = \ln P + rt$$

然後取此自然對數函數之導數

$$G = \frac{d}{dt}(\ln V) = 0 + r = r$$

9.10 最適期間

指數函數通常可用來表示一財貨在隨著時間之經過其價值是上升或減少，這些財貨包括酒、乳酪、與土地，因爲未來一元之價值小於目前一元之價值，因此它們之未來值必須予以折爲現值，因爲**投資者**（investors）與**投機者**（speculators）所追求的是資產現值之極大。

例題9.11

乳酪之價值的增加如方程式 $V = 1400(1.25)^{\sqrt{t}}$ 所示，如果資本之費用是以每年9%利率連續複利計算，並且乳酪之儲藏不必花費代價，則此廠商將儲藏乳酪多少年？

此廠商所追求的是乳酪現值極大：$P = Ve^{-rt}$，將已知之 V 與 r 代入可知 $P = 1400(1.25)^{\sqrt{t}}e^{-0.09t}$，取其自然對數，

$$\ln P = \ln 1400 + t^{1/2}\ln 1.25 - 0.09t$$

然後取其導數並令之等於0以求 P 之極大值

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = 0 + \tfrac{1}{2}\ln(1.25)t^{-1/2} - 0.09 = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = P[\tfrac{1}{2}\ln(1.25)t^{-1/2} - 0.09] = 0$$

因爲 $P \neq 0$，

$$\tfrac{1}{2}\ln(1.25)t^{-1/2} - 0.09 = 0$$

$$t^{-1/2} = \frac{0.18}{\ln 1.25}$$

$$t = \left[\frac{\ln 1.25}{0.18}\right]^2 = \left[\frac{0.22314}{0.18}\right]^2 = 1.54 \text{ 年}$$

因爲$P = f(t)$，利用乘積律，檢查二階條件。

$$\frac{d^2P}{dt^2} = P[-\tfrac{1}{4}\ln 1.25t^{-3/2}] + [\tfrac{1}{2}\ln(1.25)t^{-1/2} - 0.09]\frac{dP}{dt}$$

因爲在臨界點上，$dP/dt = 0$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = P[-\tfrac{1}{4}\ln(1.25)t^{-3/2}] = -P(0.05579t^{-3/2})$$

由於P，$t > 0$，$d^2P/dt^2 < 0$故此函數有極大值。

9.11 一般化C-D函數受限制之極值

已知一生產函數$q = K^{0.4}L^{0.5}$，受制於預算限制\$108，且$P_K = 3$，$P_L = 4$，則求最適值之拉格朗齊函數爲

$$Q = K^{0.4}L^{0.5} + \lambda(3K + 4L - 108)$$

極大化之一階條件爲

$$Q_K = 0.4K^{-0.6}L^{0.5} + 3\lambda = 0 \tag{9.4}$$

$$Q_L = 0.5K^{0.4}L^{-0.5} + 4\lambda = 0 \tag{9.5}$$

$$Q_\lambda = 3K + 4L - 108 = 0 \tag{9.6}$$

聯立解之，

由(9.4)式，
$$-\lambda = 0.133K^{-0.6}L^{0.5} \tag{9.7}$$

由(9.5)式，
$$-\lambda = 0.125K^{0.4}L^{-0.5} \tag{9.8}$$

因爲(9.7)式等於(9.8)式，故

$$0.133K^{-0.6}L^{0.5} = 0.125K^{0.4}L^{-0.5} \tag{9.9}$$

兩邊各乘以$K^{0.6}L^{0.5}$，由7.1節知上式相乘只要將其指數相加即可，

$$0.133L = 0.125K \qquad L = 0.9398K$$

代入(9.6)式，

$$3K + 4(0.9398)K = 108 \qquad \bar{K} = 16$$

以$\bar{K} = 16$代入(9.6)式可得，$\bar{L} = 15$。

有限制條件之極值的一階條件將於12.4節討論，其中有關本題之二階條件，請參見12章之例6，[一般而言，欲以L項解(9.9)式，我們必須將兩邊各乘以K的某一次方以使得左邊之K等於K^0或1，並乘以L之某一次方(乘冪)而使得左邊之L等於L^1或L，如此處理，將使得此方程式之另一邊變成K^1與L^0之形式。]

有關固定替代彈性(constant elasticity of substitution, CES)生產函數之

討論，請參見問題 9.51 至 9.62 。

習題與解答

冪函數之微分

9.1 試用冪函數法則對下列各函數微分：

(*a*) $y = 6x^{3} - 7x^{-2} + 4x^{1}$ $\qquad y' = 18x^{-4} + 14x^{-3} - 4x^{-2}$

(*b*) $y = 3x^{1/4} - 5x^{1/2} + 4x^{3/2}$ $\qquad y' = \frac{3}{4}x^{-3/4} - 2.5x^{-1/2} + 6x^{1/2}$

9.2 已知 $y = \dfrac{12}{x^{1/3}} - \dfrac{9}{x^{2/3}} + \dfrac{15}{x^{4/3}}$，試重新作問題 9.1 。

圖 取其導數前，先將之轉換爲負指數，$y = 12x^{-1/3} - 9x^{-2/3} + 15x^{-4/3}$ 。故，

$$y' = -4x^{-4/3} + 6x^{-5/3} - 20x^{-7/3} = \frac{4}{x^{4/3}} + \frac{6}{x^{5/3}} - \frac{20}{x^{7/3}}$$

9.3 已知 $y = \dfrac{3x + 1}{x^{3}}$ ，試重新作問題 9.1 。

圖 將商數化爲乘積再使用乘積律

$$y = (3x + 1)x^{-3}$$
$$y' = (3x + 1)(-3x^{-4}) + x^{-3}(3) = -9x^{-3} - 3x^{-4} + 3x^{-3} = -3x^{-4} - 6x^{-3}$$

因此，使用負指數，則一商數同樣可以乘積律求其導數。

9.4 已知 $y = (6x)^{3}$ ，試重新作問題 9.1 。

圖 因爲括弧乃指 $6x$ 之立方，不只是 x 之立方，故需使用連鎖律。

$$y' = 3(6x)^{2}(6) = 18(6x)^{2} = 648x^{2}$$

9.5 利用冪函數法則，求下列各式之微分：

圖 (*a*) $y = \sqrt{14x}$

$$y = (14x)^{1/2} \qquad y' = \tfrac{1}{2}(14x)^{-1/2}(14) = 7(14x)^{-1/2} = \frac{7}{\sqrt{14x}}$$

(*b*) $y = \sqrt{2x^{3}}$

$$y = (2x^{3})^{1/2} \neq 2x^{3/2} \qquad y' = \tfrac{1}{2}(2x^{3})^{-1/2}(6x^{2}) = \frac{3x^{2}}{\sqrt{2x^{3}}} = \frac{3x^{2}}{x\sqrt{2x}} = \frac{3x}{\sqrt{2x}}$$

(*c*) $y = \sqrt[3]{6x^{2}}$

$$y = (6x^{2})^{1/3} \qquad y' = \tfrac{1}{3}(6x^{2})^{-2/3}(12x) = \frac{4x}{(6x^{2})^{2/3}} = \frac{4x}{\sqrt[3]{36x^{4}}} = \frac{4}{\sqrt[3]{36x}}$$

(*d*) $y = \dfrac{1}{\sqrt{7x}}$

$$y = (7x)^{-1/2} \qquad y' = -\tfrac{1}{2}(7x)^{-3/2}(7) = \frac{-7}{2\sqrt{(7x)^3}} = \frac{-7}{2(7x)\sqrt{7x}} = \frac{-1}{2x\sqrt{7x}}$$

自然指數函數之導數

9.6 根據 $d/dx(e^u) = e^u\, du/dx$ 之法則，對下列各自然指數函數微分：

圖 (*a*) $y = e^{2x}$

令 $u = 2x$，則 $du/dx = 2$

且 $y' = e^{2x}(2) = 2e^{2x}$

(*b*) $y = e^{(-1/3)x}$

$u = -\frac{1}{3}x$, $du/dx = -\frac{1}{3}$, 且

$y' = e^{-(1/3)x}(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}e^{(-1/3)x}$

(*c*) $y = e^{x^3}$

$y' = e^{x^3}(3x^2) = 3x^2e^{x^3}$

(*d*) $y = 3e^{x^2}$

$y' = 3e^{x^2}(2x) = 6xe^{x^2}$

(*e*) $y = e^{2x+1}$

$y' = e^{2x+1}(2) = 2e^{2x+1}$

(*f*) $y = e^{1-4x}$

$y' = -4e^{1-4x}$

(*g*) $y = 5e^{1-x^2}$

$y' = -10xe^{1-x^2}$

(*h*) $y = 2xe^x$

經由乘積法則，可知

$y' = 2x(e^x) + e^x(2) = 2e^x(x+1)$

(*i*) $y = 3xe^{2x}$

$y' = 3x(2e^{2x}) + e^{2x}(3) = 3e^{2x}(2x+1)$

(*j*) $y = x^2e^{5x}$

$y' = x^2(5e^{5x}) + e^{5x}(2x) = xe^{5x}(5x+2)$

(*k*) $y = \dfrac{e^{5x}-1}{e^{5x}+1}$

經由商數法則，可知

$$y' = \frac{(e^{5x}+1)(5e^{5x}) - (e^{5x}-1)(5e^{5x})}{(e^{5x}+1)^2} = \frac{10e^{5x}}{(e^{5x}+1)^2}$$

(*l*) $y = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

$$y' = \frac{(e^{2x}-1)(2e^{2x}) - (e^{2x}+1)(2e^{2x})}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$$

不以 *e* 爲基底之指數函數的微分

9.7 根據 $d/dx(a^u) = a^u\,(du/dx)(\ln a)$ 之法則對下列各指數函數微分。

圖 (*a*) $y = a^{2x}$

令 $x = 2x$，則 $du/dx = 2$，而

$$y' = a^{2x}(2)\ln a = 2a^{2x}\ln a$$

(*b*) $y = a^{5x^2}$

$$y' = a^{5x^2}(10x)\ln a = 10xa^{5x^2}\ln a$$

(*c*) $y = 4^{2x+7}$

$$y' = 4^{2x+7}(2)\ln 4 = 2(4)^{2x+7}\ln 4$$

由附錄 II，知　　$y' = 2(1.38629)(4)^{2x+7} = 2.77258(4)^{2x+7}$

(*d*)　$y = 2^x$

$$y' = 2^x(1)\ln 2 = 2^x \ln 2 = 0.69315(2)^x$$

(*e*)　$y = 7^{x^2}$

$$y' = 7^{x^2}(2x)\ln 7 = 2x(7)^{x^2}\ln 7 = 2x(7)^{x^2}(1.94591) = 3.89182x(7)^{x^2}$$

(*f*)　$y = x^3 2^x$

依乘積律，並應記住 x^3 爲冪函數，而 2^x 爲指數函數。

$$y' = x^3[2^x(1)\ln 2] + 2^x(3x^2) = x^2 2^x(x\ln 2 + 3)$$

(*g*)　$y = x^2 2^{5x}$

$$y' = x^2[2^{5x}(5)\ln 2] + 2^{5x}(2x) = x2^{5x}(5x\ln 2 + 2)$$

自然對數函數之導數

9.8　根據 $d/dx(\ln u) = (1/u)du/dx$ 之法則對下列諸自然對數函數微分。

解　(*a*)　$y = \ln 2x^3$

令 $u = 2x^3$，則 $du/dx = 6x^2$，而

$$y' = \frac{1}{2x^3}(6x^2) = \frac{3}{x}$$

(*b*)　$y = \ln 7x^2$

$$y' = \frac{1}{7x^2}(14x) = \frac{2}{x}$$

(*c*)　$y = \ln(1+x)$

$$y' = \frac{1}{1+x}$$

(*d*)　$y = \ln(4x+7)$

$$y' = \frac{1}{4x+7}(4) = \frac{4}{4x+7}$$

(*e*)　$y = \ln 6x$

$$y' = \frac{1}{6x}(6) = \frac{1}{x}$$

(*f*)　$y = 6\ln x$

$$y' = 6\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x}$$

注意，包含在 log 內之倍數常數，如 (*e*) 者，在微分時，此常數將消失，然而在 log 外之倍數常數，如 (*f*) 者，在微分時，則此常數仍然存在。

9.9　就下列諸函數，重新作問題 9.8：

解　(*a*)　$y = \ln^2 x = (\ln x)^2$

經由連鎖律，可得

$$y' = 2\ln x \frac{d}{dx}(\ln x) = 2\ln x\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2\ln x}{x}$$

(*b*)　$y = \ln^2 8x = (\ln 8x)^2$

$$y' = 2\ln 8x\left(\frac{1}{8x}\right)(8) = \frac{2\ln 8x}{x}$$

(*c*)　$y = \ln^2(3x+1) = [\ln(3x+1)]^2$

$$y' = 2\ln(3x+1)\left(\frac{1}{3x+1}\right)(3) = \frac{6\ln(3x+1)}{3x+1}$$

(*d*)　$y = \ln^2(5x+6)$

$$y' = 2\ln(5x+6)\left(\frac{1}{5x+6}\right)(5) = \frac{10\ln(5x+6)}{5x+6}$$

(*e*) $y = \ln^3(4x + 13)$

$$y' = 3[\ln(4x + 13)]^2\left(\frac{1}{4x + 13}\right)(4) = 3\ln^2(4x + 13)\left(\frac{4}{4x + 13}\right) = \frac{12}{4x + 13}\ln^2(4x + 13)$$

(*f*) $y = \ln(x + 5)^2 \neq [\ln(x + 5)]^2$

令 $u = (x + 5)^2$，則 $du/dx = 2(x + 5)$，因而

$$y' = \frac{1}{(x + 5)^2}[2(x + 5)] = \frac{2}{x + 5}$$

(*g*) $y = \ln(x - 8)^2$

$$y' = \frac{1}{(x - 8)^2}[2(x - 8)] = \frac{2}{x - 8}$$

(*h*) $y = 3\ln(1 + x)^2$

$$y' = 3\left[\frac{1}{(1 + x)^2}\right][2(1 + x)] = \frac{6}{1 + x}$$

9.10 使用 7.8 節之對數法則化簡下列各自然對數函數之微分式：

圖 (*a*) $y = \ln(x + 5)^2$

根據對數法則，可知 $\ln(x + 5)^2 = 2\ln(x + 5)$。因此，如問題 9.9(*f*) 所示者，

$$y' = 2\left(\frac{1}{x + 5}\right)(1) = \frac{2}{x + 5}$$

(*b*) $y = \ln(2x + 7)^2$

$$y = 2\ln(2x + 7)$$

$$y' = 2\left(\frac{1}{2x + 7}\right)(2) = \frac{4}{2x + 7}$$

(*c*) $y = \ln[(3x + 7)(4x + 2)]$

$$y = \ln(3x + 7) + \ln(4x + 2)$$

$$y' = \frac{3}{3x + 7} + \frac{4}{4x + 2}$$

(*d*) $y = \ln[5x^2(3x^3 - 7)]$

$$y = \ln 5x^2 + \ln(3x^3 - 7)$$

$$y' = \frac{10x}{5x^2} + \frac{9x^2}{3x^3 - 7}$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{9x^2}{3x^3 - 7}$$

(*e*) $y = \ln\left(\frac{3x^2}{x^2 - 1}\right)$

$$y = \ln 3x^2 - \ln(x^2 - 1)$$

$$y' = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2 - 1}$$

(*f*) $y = \ln\left[\frac{x^3}{(2x + 5)^2}\right]$

$$y = \ln x^3 - \ln(2x + 5)^2$$

$$y' = \frac{1}{x^3}(3x^2) - 2\left(\frac{1}{2x + 5}\right)(2)$$

$$= \frac{3}{x} - \frac{4}{2x + 5}$$

(*g*) $y = \ln\sqrt{\frac{2x^2 + 3}{x^2 + 9}}$

$$y = \tfrac{1}{2}[\ln(2x^2 + 3) - \ln(x^2 + 9)]$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{4x}{2x^2 + 3} - \frac{2x}{x^2 + 9}\right)$$

$$= \frac{2x}{2x^2 + 3} - \frac{x}{x^2 + 9}$$

9.11 使用各種必要之法則，對下列各函數微分：

圖 (*a*) $y = x^2 \ln x^6$

由乘積律可得，

$$y' = x^2\left(\frac{1}{x^3}\right)(3x^2) + \ln x^3(2x) = 3x + 2x \ln x^3 = 3x + 6x \ln x = 3x(1 + 2 \ln x)$$

(*b*) $y = x^3 \ln x^2$

$$y' = x^3\left(\frac{1}{x^2}\right)(2x) + \ln x^2(3x^2) = 2x^2 + 6x^2 \ln x = 2x^2(1 + 3 \ln x)$$

(*c*) $y = e^x \ln x$

由乘積律可得，

$$y' = e^x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(e^x) = e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$$

(*d*) $y = e^{-2x} \ln 2x$

$$y' = e^{-2x}\left(\frac{1}{2x}\right)(2) + \ln 2x(-2e^{-2x}) = e^{-2x}\left(\frac{1}{x} - 2 \ln 2x\right)$$

(*e*) $y = \ln e^{3x+2}$

$$y' = \frac{1}{e^{3x+2}}(3e^{3x+2}) = 3$$

因爲 $\ln e^{3x+2} = 3x + 2$, $d/dx(\ln e^{3x+2}) = d/dx(3x + 2) = 3$.

(*f*) $y = e^{\ln x}$

$$y' = e^{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

因爲 $e^{\ln x} = x$.

(*g*) $y = e^{\ln(2x+1)}$

$$y' = e^{\ln(2x+1)}\left(\frac{1}{2x+1}\right)(2) = 2$$

因爲 $e^{\ln(2x+1)} = 2x + 1$

(*h*) $y = e^{x \ln x}$

$$y' = e^{x \ln x}\frac{d}{dx}(x \ln x)$$

然後對 $d/dx(x \ln x)$ 使用乘積律，

$$y' = e^{x \ln x}\left[x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)\right] = e^{x \ln x}(1 + \ln x)$$

(*i*) $y = e^{x^2 \ln 3x}$

$$y' = e^{x^2 \ln 3x}\left[x^2\left(\frac{1}{3x}\right)(3) + \ln 3x(2x)\right]$$
$$= e^{x^2 \ln 3x}(x + 2x \ln 3x) = xe^{x^2 \ln 3x}(1 + 2 \ln 3x)$$

基底非 *e* 之對數函數的導數

9.12 根據 $\dfrac{d}{dx}\log_a v = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}\left(\dfrac{1}{\ln a}\right) = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}(\log_a e)$ 之法則，對下列各對數函數微分：

(*a*) $y = \log_a(4x^2 - 3)$

$$y' = \frac{1}{4x^2 - 3}(8x)\left(\frac{1}{\ln a}\right)$$

(*b*) $y = \log_4 9x^3$

$$y' = \frac{1}{9x^3}(27x^2)\left(\frac{1}{\ln 4}\right)$$

$$= \frac{8x}{(4x^2-3)\ln a} \qquad = \frac{3}{x \ln 4}$$

(c) $y = \log_2(8-x)$

$$y' = \frac{1}{(8-x)}(-1)\left(\frac{1}{\ln 2}\right)$$

$$= -\frac{1}{(8-x)\ln 2}$$

(d) $y = x^3 \log_6 x$

經由乘積律知，

$$y' = x^3\left[\frac{1}{x}(1)\left(\frac{1}{\ln 6}\right)\right] + \log_6 x(3x^2)$$

$$= \frac{x^2}{\ln 6} + 3x^2 \log_6 x$$

(e) $y = \log_a \sqrt{x^2-7}$

從對數法則可知，$y = \frac{1}{2}\log_a(x^2-7)$，因此，

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-7}(2x)\left(\frac{1}{\ln a}\right)\right] = \frac{x}{(x^2-7)\ln a}$$

指數與對數函數之斜率

9.13 試計算下列各函數在各所示點之斜率。

圖 (a) $y = 3e^{0.2x}$，當 $x = 5$.

$$y' = 0.6e^{0.2x}$$

當 $x = 5$，$y' = 0.6e^{0.2(5)} = 0.6(2.71828) = 1.63097$.

(b) $y = 2e^{-1.5x}$，當 $x = 4$.

$$y' = -3e^{-1.5x}$$

當 $x = 4$，$y' = -3e^{-1.5(4)} = -3e^{-6}$ 由附錄 III 知，$y' = -3(0.0025) = -0.0075$.

(c) $y = \ln(x^2+8x+4)$，當 $x = 2$

$$y' = \frac{2x+8}{x^2+8x+4}$$

當 $x = 2$，$y' = \frac{12}{24} = 0.5$.

(d) $y = \ln^2(x+4)$，當 $x = 6$.

$$y' = [2\ln(x+4)]\left(\frac{1}{x+4}\right)(1) = \frac{2\ln(x+4)}{x+4}$$

當 $x = 6$，$y' = \frac{2\ln 10}{10} = \frac{2(2.30259)}{10} = 0.46052$

二階導數

9.14 試求下列諸函數之一階與二階導數。

圖 (a) $y = 6x^{1/2} + 2x^{1/3} + 8x^{3/2}$

$$y' = 3x^{-1/2} + \tfrac{2}{3}x^{-2/3} + 12x^{1/2}$$

$$y'' = -\tfrac{3}{2}x^{-3/2} - \tfrac{4}{9}x^{-5/3} + 6x^{-1/2}$$

(b) $y = 24x^{-1/4} - 18x^{-2/3} + 12x^{-5/4}$

$$y' = -6x^{-5/4} + 12x^{-5/3} - 15x^{-9/4}$$

$$y'' = 7.5x^{-9/4} - 20x^{-8/3} + 33.75x^{-13/4}$$

(c) $y = e^{3x}$

$$y' = 3e^{3x}$$

$$y'' = 9e^{3x}$$

(d) $y = e^{-(1/2)x}$

$$y' = -\tfrac{1}{2}e^{-(1/2)x}$$

$$y'' = \tfrac{1}{4}e^{-(1/2)x}$$

(e) $y = 3e^{5x+1}$

$$y' = 15e^{5x+1}$$
$$y'' = 75e^{5x+1}$$

(f) $y = 2xe^x$

由乘積律知，

$$y' = 2x(e^x) + e^x(2) = 2e^x(x+1)$$
$$y'' = 2e^x(1) + (x+1)(2e^x) = 2e^x(x+2)$$

(g) $y = \ln 2x^5$

$$y' = \frac{1}{2x^5}(10x^4) = \frac{5}{x} = 5x^{-1}$$
$$y'' = -5x^{-2} = \frac{-5}{x^2}$$

(h) $y = 4 \ln x$

$$y' = 4\left(\frac{1}{x}\right)(1) = \frac{4}{x} = 4x^{-1}$$
$$y'' = -4x^{-2}$$

9.15 對下列各函數取一階與二階導數：

圖 (a) $y = a^{3x}$

$$y' = a^{3x}(3)\ln a = 3a^{3x}\ln a$$

式中 $\ln a$ = 常數。因此，

$$y'' = (3a^{3x}\ln a)(3)\ln a = 9a^{3x}(\ln a)^2$$

(b) $y = a^{5x+1}$

$$y' = a^{5x+1}(5)\ln a = 5a^{5x+1}\ln a$$
$$y'' = (5a^{5x+1}\ln a)(5)\ln a = 25a^{5x+1}(\ln a)^2$$

(c) $y = \log_a 5x$

$$y' = \frac{1}{5x}(5)\frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x\ln a} = (x\ln a)^{-1}$$

使用連鎖律，

$$y'' = -1(x\ln a)^{-2}\ln a = \frac{-\ln a}{x^2\ln^2 a} = -\frac{1}{x^2\ln a}$$

(d) $y = \log_3 6x$

$$y' = \frac{1}{6x}(6)\left(\frac{1}{\ln 3}\right) = \frac{1}{x\ln 3} = (x\ln 3)^{-1}$$
$$y'' = -1(x\ln 3)^{-2}(\ln 3) = \frac{-\ln 3}{x^2\ln^2 3} = -\frac{1}{x^2\ln 3}$$

(e) $y = 3xe^x$

經由乘積律，

$$y' = 3x(e^x) + e^x(3) = 3e^x(x+1)$$
$$y'' = 3e^x(1) + (x+1)(3e^x) = 3e^x(x+2)$$

(f) $y = \dfrac{4x}{3\ln x}$

經由商數法則，

$$y' = \frac{(3\ln x)(4) - 4x(3)(1/x)}{9\ln^2 x} = \frac{12\ln x - 12}{9\ln^2 x} = \frac{12(\ln x - 1)}{9\ln^2 x}$$

$$y'' = \frac{(9\ln^2 x)\{12(1/x)\} - 12(\ln x - 1)\{[9(2)\ln x](1/x)\}}{81\ln^4 x} = \frac{(108/x)(\ln^2 x) - (216/x)(\ln x - 1)(\ln x)}{81\ln^4 x}$$

$$= \frac{4\ln x - 8(\ln x - 1)}{3x\ln^3 x} = \frac{-4\ln x + 8}{3x\ln^3 x} = \frac{4(2 - \ln x)}{3x\ln^3 x}$$

偏導數

9.16 試求下列各函數之一階與二階導數：

圖 (a) $u = x^{0.6}y^{0.3}$

$$u_x = 0.6x^{-0.4}y^{0.3} \qquad u_y = 0.3x^{0.6}y^{-0.7}$$
$$u_{xx} = -0.24x^{-1.4}y^{0.3} \qquad u_{yy} = -0.21x^{0.6}y^{-1.7}$$
$$u_{xy} = 0.18x^{-0.4}y^{-0.7} = u_{yx}$$

(b) $q = x^{0.9}y^{0.1}$

$$q_x = 0.9x^{-0.1}y^{0.1} \qquad q_y = 0.1x^{0.9}y^{-0.9}$$
$$q_{xx} = -0.09x^{-1.1}y^{0.1} \qquad q_{yy} = -0.09x^{0.9}y^{-1.9}$$
$$q_{xy} = 0.09x^{-0.1}y^{-0.9} = q_{yx}$$

(c) $z = e^{x^2+y^2}$

$$z_x = 2xe^{x^2+y^2} \qquad z_y = 2ye^{x^2+y^2}$$

經由乘積律，

$$z_{xx} = 2x(2xe^{x^2+y^2}) + e^{x^2+y^2}(2) \qquad z_{yy} = 2y(2ye^{x^2+y^2}) + e^{x^2+y^2}(2)$$
$$= 2e^{x^2+y^2}(2x^2+1) \qquad = 2e^{x^2+y^2}(2y^2+1)$$
$$z_{xy} = 4xye^{x^2+y^2} = z_{yx}$$

(d) $z = e^{2x^2+3y}$

$$z_x = 4xe^{2x^2+3y} \qquad z_y = 3e^{2x^2+3y}$$
$$z_{xx} = 4x(4xe^{2x^2+3y}) + e^{2x^2+3y}(4) \qquad z_{yy} = 9e^{2x^2+3y}$$
$$= 4e^{2x^2+3y}(4x^2+1)$$
$$z_{xy} = 12xe^{2x^2+3y} = z_{yx}$$

(e) $z = a^{2x+3y}$

$$z_x = a^{2x+3y}(2)\ln a \qquad z_y = a^{2x+3y}(3)\ln a$$
$$= 2a^{2x+3y}\ln a \qquad = 3a^{2x+3y}\ln a$$
$$z_{xx} = 2a^{2x+3y}\ln a\,(2)(\ln a) \qquad z_{yy} = 3a^{2x+3y}\ln a\,(3)(\ln a)$$
$$= 4a^{2x+3y}\ln^2 a \qquad = 9a^{2x+3y}\ln^2 a$$
$$z_{xy} = 6a^{2x+3y}\ln^2 a = z_{yx}$$

(f) $z = 4^{3x+5y}$

$$z_x = 4^{3x+5y}(3)\ln 4 \qquad z_y = 4^{3x+5y}(5)\ln 4$$
$$= 3(4)^{3x+5y}\ln 4 \qquad = 5(4)^{3x+5y}\ln 4$$
$$z_{xx} = 3(4)^{3x+5y}\ln 4\,(3)(\ln 4) \qquad z_{yy} = 5(4)^{3x+5y}\ln 4\,(5)(\ln 4)$$
$$= 9(4)^{3x+5y}\ln^2 4 \qquad = 25(4)^{3x+5y}\ln^2 4$$
$$z_{xy} = 15(4)^{3x+5y}\ln^2 4 = z_{yx}$$

(g) $z = \ln(7x+2y)$

$$z_x = \frac{7}{7x+2y} \qquad z_y = \frac{2}{7x+2y}$$

經由商數法則可得，

$$z_{xx} = \frac{(7x+2y)(0)-7(7)}{(7x+2y)^2} = \frac{-49}{(7x+2y)^2} \qquad z_{yy} = \frac{(7x+2y)(0)-2(2)}{(7x+2y)^2} = \frac{-4}{(7x+2y)^2}$$

$$z_{xy} = \frac{-14}{(7x+2y)^2} = z_{yx}$$

(*h*) $z = \ln(x^2 + 4y^2)$

$$z_x = \frac{2x}{x^2+4y^2} \qquad z_y = \frac{8y}{x^2+4y^2}$$

$$z_{xx} = \frac{(x^2+4y^2)(2) - 2x(2x)}{(x^2+4y^2)^2} = \frac{8y^2 - 2x^2}{(x^2+4y^2)^2} \qquad z_{yy} = \frac{(x^2+4y^2)(8) - 8y(8y)}{(x^2+4y^2)^2} = \frac{8x^2 - 32y^2}{(x^2+4y^2)^2}$$

$$z_{xy} = \frac{-16xy}{(x^2+4y^2)^2} = z_{yx}$$

(*i*) $z = \log_a(x - 2y)$

$$z_x = \frac{1}{(x-2y)\ln a} \qquad z_y = \frac{-2}{(x-2y)\ln a}$$

$$z_{xx} = \frac{-1\ln a}{(x-2y)^2 \ln^2 a} = \frac{-1}{(x-2y)^2 \ln a} \qquad z_{yy} = \frac{-4\ln a}{(x-2y)^2 \ln^2 a} = \frac{-4}{(x-2y)^2 \ln a}$$

$$z_{xy} = \frac{2}{(x-2y)^2 \ln a} = z_{yx}$$

(*j*) $z = \log_a(3x^2 + y^2)$

$$z_x = \frac{6x}{(3x^2+y^2)\ln a} \qquad z_y = \frac{2y}{(3x^2+y^2)\ln a}$$

$$z_{xx} = \frac{(3x^2+y^2)\ln a\,(6) - 6x(6x\ln a)}{(3x^2+y^2)^2 \ln^2 a} \qquad z_{yy} = \frac{(3x^2+y^2)\ln a\,(2) - 2y(2y\ln a)}{(3x^2+y^2)^2 \ln^2 a}$$

$$= \frac{6y^2 - 18x^2}{(3x^2+y^2)^2 \ln a} \qquad = \frac{6x^2 - 2y^2}{(3x^2+y^2)^2 \ln a}$$

$$z_{xy} = \frac{-12xy}{(3x^2+y^2)^2 \ln a} = z_{yx}$$

指數與對數函數之最適化

9.17 已知 $y = 4xe^{3x}$，(*a*) 求其臨界值，(*b*) 並判別各函數爲極大或極小。

解 (*a*) 經由乘積律，

$$y' = 4x(3e^{3x}) + e^{3x}(4) = 0$$
$$4e^{3x}(3x+1) = 0$$

因爲沒有任何 x 之值可以使得 $4e^{3x} = 0$，或 $e^x = 0$，故

$$3x + 1 = 0 \qquad \bar{x} = -\tfrac{1}{3}$$

(*b*)
$$y'' = 4e^{3x}(3) + (3x+1)(12e^{3x}) = 12e^{3x}(3x+2)$$

當 $\bar{x} = -\frac{1}{3}$，$y'' = 12e^{-1}(1)$。由附錄 III 可知，$y'' = 12(0.36787) > 0$。故此函數有極小值。

9.18 已知 $y = 5xe^{-0.2x}$，重新作問題 9.17。

解 (*a*)
$$y' = 5x(-0.2e^{-0.2x}) + e^{-0.2x}(5) = 0$$
$$5e^{-0.2x}(1 - 0.2x) = 0$$

因爲 $5e^{-0.2x} \neq 0$，$(1 - 0.2x) = 0 \qquad \bar{x} = 5$

(*b*)
$$y'' = 5e^{-0.2x}(-0.2) + (1-0.2x)(-1e^{-0.2x}) = e^{-0.2x}(0.2x - 2)$$

當 $\bar{x}=5$，$y''=e^{-1}(1-2)$。由附錄 III 知，$y''=(0.36787)(-1)<0$。故此函數有極大值。

9.19 已知 $y=\ln(x^2-8x+20)$，試重新作問題 9.17。

圖 (*a*)
$$y'=\frac{2x-8}{x^2-8x+20}=0$$

兩邊各乘以 $(x^2-8x+20)$，故 $2x-8=0$ 因而 $\bar{x}=4$。

(*b*)
$$y''=\frac{(x^2-8x+20)(2)-(2x-8)(2x-8)}{(x^2-8x+20)^2}$$

當 $\bar{x}=4$，$y''=\frac{8}{16}>0$。故此函數有極小值。

9.20 已知 $y=\ln(2x^2-20x+5)$，試重新作問題 9.17。

圖 (*a*)
$$y'=\frac{4x-20}{2x^2-20x+5}=0$$
$$4x-20=0 \qquad \bar{x}=5$$

(*b*)
$$y''=\frac{(2x^2-20x+5)(4)-(4x-20)(4x-20)}{(2x^2-20x+5)^2}$$

當 $\bar{x}=5$，$y''=-180/2025<0$。故此函數有極大值。

9.21 已知函數 $z=\ln(2x^2-12x+y^2-10y)$，(*a*)試求其臨界值，(*b*)並指出該函數有極大或極小值。

圖 (*a*)
$$z_x=\frac{4x-12}{2x^2-12x+y^2-10y}=0 \qquad z_y=\frac{2y-10}{2x^2-12x+y^2-10y}=0$$
$$4x-12=0 \qquad \bar{x}=3 \qquad\qquad 2y-10=0 \qquad \bar{y}=5$$

(*b*)
$$z_{xx}=\frac{(2x^2-12x+y^2-10y)(4)-(4x-12)(4x-12)}{(2x^2-12x+y^2-10y)^2}$$
$$z_{yy}=\frac{(2x^2-12x+y^2-10y)(2)-(2y-10)(2y-10)}{(2x^2-12x+y^2-10y)^2}$$

計算 $\bar{x}=3$，$\bar{y}=5$ 時之二階導數值，

$$z_{xx}=\frac{(-43)(4)-0}{(-43)^2}=\frac{-172}{1849}<0 \qquad z_{yy}=\frac{(-43)(2)-0}{(-43)^2}=\frac{-86}{1849}<0$$
$$z_{xy}=\frac{-(4x-12)(2y-10)}{(2x^2-12x+y^2-10y)^2}=z_{yx}$$

當 $\bar{x}=3$，$\bar{y}=5$，$z_{xy}=0=z_{yx}$。由於 z_{xx}，$z_{yy}<0$ 且 $z_{xx}z_{yy}>(z_{xy})^2$，故此函數有極大值。

9.22 已知 $z=\ln(x^2-4x+3y^2-6y)$，試重新作問題 9.21。

圖 (*a*)
$$z_x=\frac{2x-4}{x^2-4x+3y^2-6y}=0 \qquad z_y=\frac{6y-6}{x^2-4x+3y^2-6y}=0$$
$$2x-4=0 \qquad \bar{x}=2 \qquad\qquad 6y-6=0 \qquad \bar{y}=1$$

(*b*)
$$z_{xx}=\frac{(x^2-4x+3y^2-6y)(2)-(2x-4)(2x-4)}{(x^2-4x+3y^2-6y)^2}$$
$$z_{yy}=\frac{(x^2-4x+3y^2-6y)(6)-(6y-6)(6y-6)}{(x^2-4x+3y^2-6y)^2}$$

當 $\bar{x}=2$, $\bar{y}=1$,

$$z_{xx}=\frac{(-7)(2)-0}{(-7)^2}=-\frac{14}{49}<0 \qquad z_{yy}=\frac{(-7)(6)-0}{(-7)^2}=-\frac{42}{49}<0$$
$$z_{xy}=\frac{-(2x-4)(6y-6)}{(x^2-4x+3y^2-6y)^2}=z_{yx}$$

當 $\bar{x}=2$，$\bar{y}=1$，$z_{xy}=0=z_{yx}$。由於 z_{xx}，$z_{yy}<0$ 且 $z_{xx}z_{yy}>(z_{xy})^2$，故此函數有極大值。

9.23 已知 $z=e^{(3x^2-6x+y^2-8y)}$，試重新作問題 9.21。

圖 (*a*)
$$z_x=(6x-6)e^{(3x^2-6x+y^2-8y)}=0 \qquad z_y=(2y-8)e^{(x^2-6x+y^2-8y)}=0$$
$$6x-6=0 \qquad \bar{x}=1 \qquad 2y-8=0 \qquad \bar{y}=4$$

(*b*) 使用乘積律，

$$z_{xx}=(6x-6)(6x-6)e^{(3x^2-6x+y^2-8y)}+e^{(3x^2-6x+y^2-8y)}(6)$$
$$z_{yy}=(2y-8)(2y-8)e^{(3x^2-6x+y^2-8y)}+e^{(3x^2-6x+y^2-8y)}(2)$$

計算 $\bar{x}=1$，$\bar{y}=4$ 之二階導數值

$$z_{xx}=0+6e^{-19}>0 \qquad z_{yy}=0+2e^{-19}>0$$

然後檢查其交叉偏導數，

$$z_{xy}=(6x-6)(2y-8)e^{(3x^2-6x+y^2-8y)}=z_{yx}$$

當 $\bar{x}=1$，$\bar{y}=4$，$z_{xy}=0=z_{yx}$。此函數有一極小值，因爲 z_{xx}，$z_{yy}>0$ 且 $z_{xx}z_{yy}>(z_{xy})^2$。

9.24 已知 $z=e^{(2x^2-12x-2xy+y^2-4y)}$，試重新作問題 9.21。

圖 (*a*)
$$z_x=(4x-12-2y)e^{(2x^2-12x-2xy+y^2-4y)}=0$$
$$4x-2y-12=0 \tag{9.10}$$
$$z_y=(-2x+2y-4)e^{(2x^2-12x-2xy+y^2-4y)}=0$$
$$-2x+2y-4=0 \tag{9.11}$$

解 (9.10) 與 (9.11) 之聯立式，可得 $\bar{x}=8$，$\bar{y}=10$。

(*b*)
$$z_{xx}=(4x-12-2y)(4x-12-2y)e^{(2x^2-12x-2xy+y^2-4y)}+e^{(2x^2-12x-2xy+y^2-4y)}(4)$$
$$z_{yy}=(-2x+2y-4)(-2x+2y-4)e^{(2x^2-12x-2xy+y^2-4y)}+e^{(2x^2-12x-2xy+y^2-4y)}(2)$$

計算 $\bar{x}=8$，$\bar{y}=10$ 之二階導數值，可知

$$z_{xx}=0+4e^{-68}>0 \qquad z_{yy}=0+2e^{-68}>0$$

再以乘積律檢查其交叉偏導數，

$$z_{xy}=(4x-12-2y)(-2x+2y-4)e^{(2x^2-12x-2xy+y^2-4y)}+e^{(2x^2-12x-2xy+y^2-4y)}(-2)=z_{yx}$$

計算 z_{xy} 在 $\bar{x}=8$，$\bar{y}=10$ 之值，即 $z_{xy}=0-2e^{-0.8}=z_{yx}$。因為 z_{xx}，$z_{yy}<0$ 且 $z_{xx}z_{yy}>(z_{xy})^2$，故此函數有極大值。

9.25 已知需求函數

$$P=8.25e^{-0.02Q} \tag{9.12}$$

(*a*)試求總收益最大時之數量與價格，(*b*) 檢查其二階條件。

解 (*a*) $$\mathrm{TR}=PQ=(8.25e^{-0.02Q})Q$$

經由乘積律，

$$\frac{d\mathrm{TR}}{dQ}=(8.25e^{-0.02Q})(1)+Q(-0.02)(8.25e^{-0.02Q})=0$$

$$(8.25e^{-0.02Q})(1-0.02Q)=0$$

因為 $(8.25e^{-0.02Q})\neq 0$ 對於每一個 Q 值，故 $1-0.02Q=0$；$\bar{Q}=50$。

以 $\bar{Q}=50$ 代入 (9.12) 式，可得 $P=8.25e^{-0.02(50)}=8.25e^{-1}$。

再由附錄 III 可知，$P=8.25(0.36787)=3.03$。

(*b*)經由乘積律，

$$\frac{d^2\mathrm{TR}}{dQ^2}=(8.25e^{-0.02Q})(-0.02)+(1-0.02Q)(-0.02)(8.25e^{-0.02Q})=(-0.02)(8.25e^{-0.02Q})(2-0.02Q)$$

以 $\bar{Q}=50$ 計算之，$d^2\mathrm{TR}/dQ^2=(-0.02)(8.25e^{-1})(1)=-0.155(0.36787)<0$。故 TR 有一極大值。

9.26 (*a*) 已知需求函數 $P=12.50e^{-0.005Q}$，試求總收益極大之價格與數量，(*b*) 並檢查其二階條件。

解 (*a*) $$\mathrm{TR}=(12.50e^{-0.005Q})Q$$

$$\frac{d\mathrm{TR}}{dQ}=(12.50e^{-0.005Q})(1)+Q(-0.005)(12.50e^{-0.005Q})$$

$$=(12.50e^{-0.005Q})(1-0.005Q)=0$$

$$1-0.005Q=0 \qquad \bar{Q}=200$$

因此，$$P=12.50e^{-0.005(200)}=12.50e^{-1}=12.50(0.36787)=4.60$$

(*b*) $$\frac{d^2\mathrm{TR}}{dQ^2}=(12.50e^{-0.005Q})(-0.005)+(1-0.005Q)(-0.005)(12.50e^{-0.005Q})$$

$$=(-0.005)(12.50e^{-0.005Q})(2-0.005Q)$$

以 $\bar{Q}=200$ 計算之，$d^2\mathrm{TR}/dQ^2=(-0.005)(12.50e^{-1})(1)=-0.0625(0.36787)<0$。故此函數有極大值。

偏導數與偏微分

9.27 已知 $Q=10K^{0.4}L^{0.6}$，(*a*)試求資本與勞動之邊際生產量，(*b*) 當資本與勞動增加一單位時，試計算其產出分別增加多少？(假設原先之 $K=8$，$L=20$)。

圖 (a) $MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = 0.4(10)K^{-0.6}L^{0.6} = 4K^{-0.6}L^{0.6}$ $\quad MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 0.6(10)K^{0.4}L^{-0.4} = 6K^{0.4}L^{-0.4}$

(b) $\Delta Q \cong (\partial Q/\partial K)\Delta K$。在$K = 8$，$L = 20$，$K$變動一單位時，$\Delta Q \cong 4K^{-0.6}L^{0.6} = 4(8)^{-0.6}(20)^{0.6}$，取其對數，

$$\log \Delta Q \cong \log 4 - 0.6 \log 8 + 0.6 \log 20 = 0.6021 - 0.6(0.9031) + 0.6(1.3010) = 0.8408$$
$$\Delta Q \cong \text{antilog } 0.8408 = 6.93$$

當L變動一單位時，$\Delta Q \cong 6K^{0.4}L^{-0.4}$

$$\log \Delta Q \cong \log 6 + 0.4 \log 8 - 0.4 \log 20 = 0.7782 + 0.4(0.9031) - 0.4(1.3010) = 0.6190$$
$$\Delta Q \cong \text{antilog } 0.6190 = 4.16$$

9.28 已知$Q = 12K^{0.3}L^{0.7}$且$K = 10$，$L = 15$，試重新作問題 9.27。

圖 (a) $MP_K = 3.6K^{-0.7}L^{0.7}$ $\quad MP_L = 6K^{0.3}L^{-0.3}$

(b) 當$K = 10$，$L = 15$時，K變動一單位則，$\Delta Q \cong 3.6K^{-0.7}L^{0.7}$。

$$\log \Delta Q \cong 0.5563 - 0.7(1) + 0.5(1.1761) = 0.4444$$
$$\Delta Q \cong \text{antilog } 0.4444 = 2.78$$

L變動一單位時，$\Delta Q \cong 6K^{0.3}L^{-0.3}$

$$\log \Delta Q \cong 0.7782 + 0.3(1) - 0.5(1.1761) = 0.4901$$
$$\Delta Q \cong \text{antilog } 0.4901 = 3.09$$

9.29 已知$Q = 4\sqrt{KL}$，試求 (a) MP_K與MP_L，(b) 當$K = 50$，$L = 600$時，L與K變動一單位，對產出之影響分別爲何？

圖 (a) $Q = 4\sqrt{KL} = 4(KL)^{1/2}$，由連鎖律可得，

$$MP_K = Q_K = 2(KL)^{-1/2}(L) = \frac{2L}{\sqrt{KL}} \qquad MP_L = Q_L = 2(KL)^{-1/2}(K) = \frac{2K}{\sqrt{KL}}$$

(b) 在$K = 50$，$L = 600$時，K每變動一單位，則$\Delta Q \cong 2[50(600)]^{-1/2}(600)$

$$\log \Delta Q \cong \log 2 - \tfrac{1}{2}(\log 50 + \log 600) + \log 600$$
$$\cong 0.3010 - \tfrac{1}{2}(1.6990 + 2.7782) + 2.7782 = 0.8406$$
$$\Delta Q \cong \text{antilog } 0.8406 = 6.93$$

L每變動一單位，則 $\Delta Q \cong 2[50(600)]^{-1/2}(50)$.

$$\log \Delta Q \cong \log 2 - \tfrac{1}{2}(\log 50 + \log 600) + \log 50$$
$$\cong 0.3010 - \tfrac{1}{2}(1.6990 + 2.7782) + 1.6990 = -0.2386$$
$$\Delta Q = \text{antilog } (-0.2386) = \text{antilog } (0.7614 - 1) = 0.58$$

9.30 已知$Q = 2\sqrt{KL}$，其中$K = 100$且$L = 1000$，試重新作問題 9.29。

圖 (a) $Q = 2(KL)^{1/2}$

$$MP_K = (KL)^{-1/2}(L) = \frac{L}{\sqrt{KL}} \qquad MP_K = (KL)^{-1/2}(K) = \frac{K}{\sqrt{KL}}$$

(*b*) 當 $K = 100$，$L = 1000$ 時，K 每變動一單位，則

$$\log \Delta Q = -\tfrac{1}{2}(2+3) + 3 = 0.5$$
$$\Delta Q = \text{antilog } 0.5 = 3.16$$

L 每變動一單位，$\Delta Q = (100)(1000)^{-1/2}(-1)$.

$$\log \Delta Q = -\tfrac{1}{2}(2+3) + 2 = -0.5$$
$$\Delta Q = \text{antilog}(-0.5) = \text{antilog}(0.5 - 1) = 0.316$$

9.31 已知某公司之銷售量（S）決定於價格（P），廣告（A）此公司代表廣告之支出（r）等因素，

$$s = (12{,}000 - 900P)A^{1/2}r^{1/3}$$

試求(*a*)當增加一家代表商品，(*b*)增加1元之廣告支出，(*c*)價格下降$0.10時，各問分別對產出之變動有何影響，（假設 $P = \$6$，$r = 49$ 且 $A = \$8100$）。

(*a*) $$\Delta s \approx \frac{\partial s}{\partial r}\Delta r = \tfrac{1}{3}(12{,}000 - 900P)A^{1/2}r^{-2/3}\Delta r$$
$$= \tfrac{1}{3}[12{,}000 - 900(6)](8100)^{1/2}(49)^{-2/3}(1) = \tfrac{1}{3}(6600)(90)(\tfrac{1}{49}) = 42.429$$

(*b*) $$\Delta s \approx \frac{\partial s}{\partial A}\Delta A = \tfrac{1}{2}(12{,}000 - 900P)A^{-1/2}r^{1/3}\Delta A = \tfrac{1}{2}(6600)(\tfrac{1}{90})(7)(1) = 256.67$$

(*c*) $$\Delta s \approx \frac{\partial s}{\partial P}\Delta P = -900A^{1/2}r^{1/3}\Delta P = -900(90)(7)(-0.10) = 56{,}700$$

9.32 已知一廠商之銷售函數類似於問題9.31者：$s = (15{,}000 - 1000P)A^{2/3}r^{1/4}$，試問當 $P = 4$，$A = \$6000$ 且 $r = 24$ 並有下列之變動時其銷售量將變動多少？(*a*)增加一代表廠商，(*b*)增加$1之廣告支出，(*c*)價格下跌$0.01。

解 (*a*) $$\Delta s \approx \tfrac{1}{4}(15{,}000 - 1000P)A^{2/3}r^{-3/4}\Delta r$$
$$= \tfrac{1}{4}(11{,}000)(6000)^{2/3}(24)^{-3/4}(1)$$
$$\log \Delta s = \log \tfrac{1}{4} + \log(11{,}000) + \tfrac{2}{3}\log 6000 - \tfrac{3}{4}\log 24$$
$$= 0.3979 - 1 + 4.0414 + \tfrac{2}{3}(3.7782) - \tfrac{3}{4}(1.3802) = 4.9230$$
$$\Delta s = \text{antilog } 4.9230 = 83{,}760$$

(*b*) $$\Delta s \approx \tfrac{2}{3}(15{,}000 - 1000P)A^{-1/3}r^{1/4}\Delta A$$
$$= \tfrac{2}{3}(11{,}000)(6000)^{-1/3}(24)^{1/4}(1)$$
$$\log \Delta s = 0.8239 - 1 + 4.0414 - \tfrac{1}{3}(3.7782) + \tfrac{1}{4}(1.3802) = 2.9510$$
$$\Delta s = \text{antilog } 2.9510 = 893$$

(*c*) $$\Delta s \approx -1000A^{2/3}r^{1/4}\Delta P$$
$$= -1000(6000)^{2/3}(24)^{1/4}(-0.01) = 10(6000)^{2/3}(2.4)^{1/4}$$
$$\log \Delta s = 1 + \tfrac{2}{3}(3.7782) + \tfrac{1}{4}(0.3802) = 3.5639$$
$$\Delta s = \text{antilog } 3.5639 = 3310$$

最適期間

9.33 一雕花玻璃目前價值為$100，其隨著時間之經過而增值之公式為

$$\therefore V = 100e^{\sqrt{t}} = 100e^{t^{1/2}}$$

在 (a) $r = 0.08$ ，(b) $r = 0.12$ 時以連續複利方式計息 ，爲求得其現值之極大，試問此雕花玻璃將保存多久？

圖 (a) 其現值（P）爲 $P = Ve^{-rt}$ ，代入 V 與 r ，則

$$P = 100e^{\sqrt{t}}e^{-0.08t} = 100e^{\sqrt{t}-0.08t}$$

轉換爲自然對數，$\ln P = \ln 100 + \ln e^{\sqrt{t}-0.08t} = \ln 100 + t^{1/2} - 0.08t$ 。取其導數並令之等於 0 ，注意 ，$\ln 100$ 爲一常數，故

$$\frac{d}{dt}(\ln P) = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \tfrac{1}{2}t^{-1/2} - 0.08$$

$$\frac{dP}{dt} = P(\tfrac{1}{2}t^{-1/2} - 0.08) = 0 \qquad (9.13)$$

因爲 $P \neq 0$ ，

$$\tfrac{1}{2}t^{-1/2} = 0.08$$

$$t^{-1/2} = 0.16$$

$$t = (0.16)^{-2} = \frac{1}{0.0256} = 39.06$$

檢查其二階條件，又因爲 $P = f(t)$ 故使用乘積率，

$$\frac{d^2P}{dt^2} = P(-\tfrac{1}{4}t^{-3/2}) + (\tfrac{1}{2}t^{-1/2} - 0.08)\frac{dP}{dt}$$

因爲在臨界點上，$dP/dt = 0$ ，故

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{-P}{4\sqrt{t^3}}$$

因爲 P 與 t 必爲正數，故 $-P/4\sqrt{t^3} < 0$ ，因此 ，$t = 39.06$ 可使此函數爲極大。

(b) 如果 $r = 0.12$ ，以 0.12 取代 (9.13) 式中之 0.08 ，

$$\frac{dP}{dt} = P(\tfrac{1}{2}t^{-1/2} - 0.12) = 0$$

$$\tfrac{1}{2}t^{-1/2} = 0.12$$

$$t = (0.24)^{-2} = \frac{1}{0.0576} = 17.36$$

其二階條件並未改變。由上面之討論可知，折現率 r 愈大，此玻璃保存之期間愈短 。

9.34 對買賣土地之投機而言，假設土地之價值是根據下式而增加，

$$V = 1000e^{\sqrt[3]{t}}$$

在連續複利法下之折現率爲 0.09 ，則爲求取保有土地之現值爲極大，試問將保有土地多久？

圖 $P = 1000e^{\sqrt[3]{t}}e^{-0.09t} = 1000e^{\sqrt[3]{t}-0.09t}$

轉換爲自然對數，$\ln P = \ln 1000 + t^{1/3} - 0.09t$

取其導數，$\frac{d}{dt}(\ln P) = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{1}{3}t^{-2/3} - 0.09 = 0$

$$\frac{dP}{dt} = P(\tfrac{1}{3}t^{-2/3} - 0.09) = 0$$

$$\tfrac{1}{3}t^{-2/3} = 0.09 \qquad t = 0.27^{-3/2}$$

用自然對數求解 t，

$$\ln t = -\tfrac{3}{2}\ln 0.27 = \tfrac{3}{2}(-1.30933) = 1.96400$$

$$t = \text{antilog}_e\, 1.96400 = 7.13 \text{ 年}$$

其二階條件如下：（記住，在臨界點上 $dP/dt = 0$）。

$$\frac{d^2P}{dt^2} = P(-\tfrac{2}{9}t^{-5/3}) + (\tfrac{1}{3}t^{-2/3} - 0.09)\frac{dP}{dt} = -\frac{2P}{9\sqrt[3]{t^5}} < 0$$

9.35 收集已故畫家之藝術品，估計其價值爲

$$V = 200{,}000(1.25)^{\sqrt[3]{t}}$$

在連續複利計息方式，折現率爲 6 % 時，此藝術品遺產之所有人將保存多久？

圖 將 V 之值代入 $P = Ve^{-rt}$，

$$P = 200{,}000(1.25)^{t^{2/3}}e^{-0.06t}$$

$$\ln P = \ln 200{,}000 + t^{2/3}\ln 1.25 - 0.06t$$

$$\frac{d}{dt}(\ln P) = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{2}{3}\ln(1.25)t^{-1/3} - 0.06 = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = P[\tfrac{2}{3}\ln(1.25)t^{-1/3} - 0.06] = 0$$

$$t^{-1/3} = \frac{3(0.06)}{2\ln 1.25} \qquad t = \left[\frac{0.18}{2(0.22314)}\right]^{-3} = (0.403)^{-3}$$

使用自然對數求解 t，

$$\ln t = -3\ln 0.403 = -3(-0.90882) = 2.72646$$

$$t = \text{antilog}_e\, 2.72646 = 15.3 \text{ 年}$$

9.36 爲投資目的而購買鑽石，設鑽石之增值情形爲

$$V = 250{,}000(1.75)^{\sqrt[4]{t}}$$

如果連續複利計息方式且折現率爲 7 %，則此投資者將保存鑽石多久？

圖

$$P = 250{,}000(1.75)^{t^{1/4}}e^{-0.07t}$$

$$\ln P = \ln 250{,}000 + t^{1/4}\ln(1.75) - 0.07t$$

$$\frac{d}{dt}(\ln P) = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \tfrac{1}{4}\ln(1.75)t^{-3/4} - 0.07 = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = P[\tfrac{1}{4}\ln(1.75)t^{-3/4} - 0.07] = 0$$

$$\tfrac{1}{4}\ln(1.75)t^{-3/4} - 0.07 = 0 \qquad t = \left[\frac{0.28}{\ln 1.75}\right]^{-4} = (0.50)^{-4/3}$$

使用自然對數，　$\ln t = -\frac{4}{3}\ln 0.50 = -\frac{4}{3}(-0.69315) = 0.92420$

$t = \text{antilog}_e\, 0.92420 = 2.52$ 年

受限制之極值

9.37 已知一生產函數 $q = K^{0.3}L^{0.5}$ 受制於限制式 $6K + 2L - 384$，試求產出之極大水準。

圖

$$Q = K^{0.3}L^{0.5} + \lambda(6K + 2L - 384)$$

$$Q_K = 0.3K^{-0.7}L^{0.5} + 6\lambda = 0 \qquad \lambda = -0.05K^{-0.7}L^{0.5}$$

$$Q_L = 0.5K^{0.3}L^{-0.5} + 2\lambda = 0 \qquad \lambda = -0.25K^{0.3}L^{-0.5}$$

$$Q_\lambda = 6K + 2L - 384 = 0$$

由 Q_K 與 Q_L 知，　$-0.05K^{-0.7}L^{0.5} = -0.25K^{0.3}L^{-0.5}$

兩邊各乘以 $K^{0.7}L^{0.5}$，

$$0.05L = 0.25K \qquad L = 5K$$

代入其限制式可得，$\overline{K} = 24$ 與 $\overline{L} = 120$。

二階條件之檢查將於問題 12.32(*b*) 中討論。

9.38 已知生產函數 $q = 10K^{0.7}L^{0.1}$ 其中 $P_K = 28$ 且 $P_L = 10$，當投入之支出爲 \$4000 時，試求最大可能產出爲多少？

圖

$$Q = 10K^{0.7}L^{0.1} + \lambda(28K + 10L - 4000)$$

$$Q_K = 7K^{-0.3}L^{0.1} + 28\lambda = 0 \qquad \lambda = -0.25K^{-0.3}L^{0.1}$$

$$Q_L = 1K^{0.7}L^{-0.9} + 10\lambda = 0 \qquad \lambda = -0.1K^{0.7}L^{-0.9}$$

$$Q_\lambda = 28K + 10L - 4000 = 0$$

由 Q_K 與 Q_L 知，　$-0.25K^{-0.3}L^{0.1} = -0.1K^{0.7}L^{-0.9}$

$$0.25L = 0.1K \qquad K = 2.5L$$

代入限制式可得 $\overline{L} = 50$ 與 $\overline{K} = 125$。

有關其二階條件，請參見問題 12.32(*c*)。

9.39 受制於預算限制式 $8x + 5y = 680$，極大化效用 $u = x^{0.6}y^{0.25}$。

圖

$$U = x^{0.6}y^{0.25} + \lambda(8x + 5y - 680)$$

$$U_x = 0.6x^{-0.4}y^{0.25} + 8\lambda = 0 \qquad \lambda = -0.075x^{-0.4}y^{0.25}$$

$$U_y = 0.75x^{0.6}y^{-0.75} + 5\lambda = 0 \qquad \lambda = -0.05x^{0.6}y^{-0.75}$$

$$U_\lambda = 8x + 5y - 680 = 0$$

由 U_x 與 U_y 知，　$-0.075x^{-0.4}y^{0.25} = 0.05x^{0.6}y^{-0.75}$

$$0.075y = 0.05x \qquad y = \tfrac{2}{3}x$$

代入限制式可求得，$\overline{x} = 60$ 與 $\overline{y} = 40$。

9.40 受制於 $5x + 3y = 75$，試求 $u = x^{0.8}y^{0.2}$ 之極大值。

圖

$$U = x^{0.8}y^{0.2} + \lambda(5x + 3y - 75)$$

$$U_\lambda = 0.8x^{-0.2}y^{0.2} + 5\lambda = 0 \qquad \lambda = -0.16x^{-0.2}y^{0.2}$$

$$U_x = 0.2x^{0.8}y^{-0.8} + 3\lambda = 0 \qquad \lambda = -0.067x^{0.8}y^{-0.8}$$
$$U_\lambda = 5x + 3y - 75 = 0$$

由U_x與U_y知，
$$-0.16x^{-0.2}y^{0.2} = -0.067x^{0.8}y^{-0.8}$$
$$0.16y = 0.067x \qquad y = 0.41875x$$

代入預算限制式，可求得$\bar{x} = 12$與$\bar{y} = 5$。

成　長

9.41 農產品之價格每年增加4%，而數量每年成長2%，則農業部門之收益（R）的年成長率爲若干？

圖　將收益之公式$R = PQ$，轉換爲自然對數，

$$\ln R = \ln P + \ln Q$$

此自然對數函數之導數等於成長函數（G）之瞬間變動率（參見9.9節）。因此

$$G = \frac{d}{dt}(\ln R) = \frac{d}{dt}(\ln P) + \frac{d}{dt}(\ln Q)$$

但　$\frac{d}{dt}(\ln P) = P$之成長 $= 4\%$　　$\frac{d}{dt}(\ln Q) = Q$之成長 $= 2\%$

故
$$G = \frac{d}{dt}(\ln R) = 0.04 + 0.02 = 0.06$$

可知包含乘積項之函數其成長率即爲其各項成長率之相交。

9.42 某廠商在投入要素成本增加3%時，其僱用要素量則增加10%，試問其要素總成本之增加率爲多少？

$$C = PQ$$
$$\ln C = \ln P + \ln Q$$
$$G = \frac{d}{dt}(\ln C) = \frac{d}{dt}(\ln P) + \frac{d}{dt}(\ln Q) = 0.03 + 0.10 = 0.13$$

9.43 就業機會（E）每年增加4%，人口（P）則增加2.5%，試問每人就業成長率（PCE）爲多少？

$$\text{PCE} = \frac{E}{P}$$
$$\ln \text{PCE} = \ln E - \ln P$$

取其導數以求其成長率，

$$G = \frac{d}{dt}(\ln \text{PCE}) = \frac{d}{dt}(\ln E) - \frac{d}{dt}(\ln P) = 0.04 - 0.025 = 0.015 = 1.5\%$$

由此可知，包含商數之函數，其成長率爲分子之成長率減分母之成長率。

9.44 國民所得（Y）每年增加1.5%；而人口（P）每年增加2.5%，則每人所得（PCY）之成長率爲多少？

$$\text{PCY} = \frac{Y}{P}$$

$$\ln \text{PCY} = \ln Y - \ln P$$

$$G = \frac{d}{dt}(\ln \text{PCY}) = \frac{d}{dt}(\ln Y) - \frac{d}{dt}(\ln P) = 0.015 - 0.025 = -0.01 = -1\%$$

亦即，每人所得每年減少 1 %。

9.45 某國家出口兩種財貨，銅（c）與香蕉（b），其賺取之收入以百萬元計分別爲

$$c = c(t_0) = 4 \qquad b = b(t_0) = 1$$

如果 c 成長 10 % 而 b 成長 20 %，則此國家出口之收入（E）成長率爲多少？

$$E = c + b$$

$$\ln E = \ln (c + b)$$

$$G = \frac{d}{dt}(\ln E) = \frac{d}{dt} \ln (c + b)$$

由 9.4 節之導數法則可知，

$$G_E = \frac{1}{c + b}[c'(t) + b'(t)] \tag{9.14}$$

又由 9.9 節所討論者，可知

$$G_c = \frac{c'(t)}{c(t)} \qquad G_b = \frac{b'(t)}{b(t)}$$

因此 $$c'(t) = G_c\, c(t) \qquad b'(t) = G_b\, b(t)$$

代入（9.14）式，$$G_E = \frac{1}{c + b}[G_c\, c(t) + G_b\, b(t)]$$

重新整理各項，$$G_E = \frac{c(t)}{c + b} G_c + \frac{b(t)}{c + b} G_b$$

然後將已知值代入，

$$G_E = \frac{4}{4 + 1}(0.10) + \frac{1}{4 + 1}(0.20) = \tfrac{4}{5}(0.10) + \tfrac{1}{5}(0.20) = 0.12 \quad \text{或} \quad 12\%$$

由此可知，一函數若包含兩函數之和（sum），則其成長率爲各函數成長率之**加權平均**（weighted average）。

9.46 某公司之總收益中來自浴衣之銷售者佔 70 %；來自浴帽者 20 %；來自浴鞋者佔 10 %，如果銷售浴衣之收益增加 15 %，浴帽 5 %，而浴鞋 4 %，則此公司總收益之成長率爲多少？

答

$$G_R = 0.70(0.15) + 0.20(0.05) + 0.10(0.04) = 0.105 + 0.01 + 0.004 = 0.119 \quad \text{或} \quad 11.9\%$$

證明題

9.47 已知一效用函數 $u = Ax^a y^b$，受制於 $P_x x + P_y y = B$，試證在受限制情況下效用之極大點上，價格之比例（P_x/P_y）必等於邊際效用之比例（MU_y/MU_x）。

$$U = Ax^a y^b + \lambda(P_x x + P_y y - B)$$

$$U_x = aAx^{a-1}y^b + \lambda P_x = 0 \tag{9.15}$$

$$U_y = bAx^a y^{b-1} + \lambda P_y = 0 \tag{9.16}$$

$$U_\lambda = P_x x + P_y y - B = 0$$

(9.15)式中，$aAx^{a-1}y^b = u_x = MU_x$，而(9.16)式中 $bAx^a y^{b-1} = u_y = MU_y$。解 $\bar{\lambda}$，

由(9.15)式解之，$$\bar{\lambda} = \frac{-aAx^{a-1}y^b}{P_x} = -\frac{MU_x}{P_x}$$

由(9.16)式解之，$$\bar{\lambda} = \frac{-bAx^a y^{b-1}}{P_y} = -\frac{MU_y}{P_y}$$

故 $$-\frac{MU_x}{P_x} = -\frac{MU_y}{P_y} \qquad \frac{P_y}{P_x} = \frac{MU_y}{MU_x}$$ 證畢。

9.48 已知一般化之C-D生產函數 $q = AK^\alpha L^\beta$，受制於預算限制式 $P_K K + P_L L = B$，試證在此受限制情況下最適化之最小成本之投入組合爲

$$\frac{\bar{L}}{\bar{K}} = \frac{\beta P_K}{\alpha P_L}$$

圖 其拉格朗齊函數爲

$$Q = AK^\alpha L^\beta + \lambda(P_K K + P_L L - B)$$

一階條件爲

$$Q_K = \alpha AK^{\alpha-1}L^\beta + \lambda P_K = 0 \tag{9.17}$$

$$Q_L = \beta AK^\alpha L^{\beta-1} + \lambda P_L = 0 \tag{9.18}$$

$$Q_\lambda = P_K K + P_L L - B = 0 \tag{9.19}$$

由(9.17)與(9.18)式可知，

$$\frac{-\alpha AK^{\alpha-1}L^\beta}{P_K} = \lambda = -\frac{\beta AK^\alpha L^{\beta-1}}{P_L}$$

消去兩邊之負號並重新整理各項，

$$\frac{\alpha AK^{\alpha-1}L^\beta}{\beta AK^\alpha L^{\beta-1}} = \frac{P_K}{P_L}$$

其中 $K^{\alpha-1} = K^\alpha/K$ 且 $1/L^{\beta-1} = L/L^\beta$.

因此，$$\frac{\alpha L}{\beta K} = \frac{P_K}{P_L}$$

$$\frac{\bar{L}}{\bar{K}} = \frac{\beta P_K}{\alpha P_L}$$ 證畢。 (9.20)

9.49 方程式(9.20)爲一般化C-D生產函數之最小成本的要素組合，而替代彈性

（elasticity of substitution）σ 之定義爲：要素價格比例（P_K/P_L）之相對變動所引起其最小成本之要素組合（$\bar{L}/\bar{K}$）之相對變動量，即

$$\sigma = \frac{\dfrac{d(\bar{L}/\bar{K})}{\bar{L}/\bar{K}}}{\dfrac{d(P_K/P_L)}{P_K/P_L}} = \frac{\dfrac{d(\bar{L}/\bar{K})}{d(P_K/P_L)}}{\dfrac{\bar{L}/\bar{K}}{P_K/P_L}} \tag{9.21}$$

其中 $0 \leq \sigma \leq \infty$，如果 $\sigma = 0$，表示兩種要素互爲**互補品**（complements）因而它們之間毫無替代性，生產時必須以固定之比例投入。反之，如果 $\sigma = \infty$，則此兩要素具**完全之替代性**（perfect substitutes）。

試證任意一般化之C-D生產函數其替代彈性等於 1，即 $\sigma = 1$。

證 因爲（9.20）式中 α 與 β 爲常數，而且 P_K 與 P_L 爲自變數，故（$\bar{L}/\bar{K}$）可視爲（P_K/P_L）之函數，因而 σ = 邊際函數除以平均函數——如（9.21）式第二個比例（ratio）式所示，故我們首先求（9.20）式之邊際函數如下，

$$\frac{d(\bar{L}/\bar{K})}{d(P_K/P_L)} = \frac{\beta}{\alpha}$$

又將（9.20）式兩邊同時除以 P_K/P_L 可得其平均函數

$$\frac{\bar{L}/\bar{K}}{P_K/P_L} = \frac{\beta}{\alpha}$$

因此

$$\sigma = \frac{\dfrac{d(L/K)}{d(P_K/P_L)}}{\dfrac{\bar{L}/\bar{K}}{P_K/P_L}} = \frac{\beta/\alpha}{\beta/\alpha} = 1 \qquad \text{證畢。}$$

9.50 利用（9.20）式之C-D生產函數之最小成本的要素組合式，檢查 9.11 節諸問題的答案，其中 $q = K^{0.4}L^{0.5}$，$P_K = 3$ 與 $P_L = 4$。

證 因爲 $\alpha = 0.4$，$\beta = 0.5$，由（9.20）式知，

$$\frac{\bar{L}}{\bar{K}} = \frac{0.5(3)}{0.4(4)} = \frac{1.5}{1.6}$$

勞動與資本之投入比例必須爲 15/16，參見 9.11 節。

9.51 一**固定替代彈性**（constant elasticity of substitution CES）之生產函數即爲替代彈性 σ 爲固定之常數但不必爲 1 之生產函數，其數學式爲，

$$Q = A[\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha)L^{-\beta}]^{-1/\beta} \tag{9.22}$$

其中 $A > 0$，$0 < \alpha < 1$ 與 $\beta > -1$，必須記得的是在最適情況時，其價格之比例必等於邊際產量之比例（參見問題 9.47），(*a*) 試證其替代彈性爲常數，(*b*) 指出 σ 之可能範圍。

圖 (a)一階條件要求

$$\frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K}=\frac{P_L}{P_K} \tag{9.23}$$

使用連鎖律以求(9.22)式之一階偏導數，

$$\frac{\partial Q}{\partial L}=-\frac{1}{\beta}A[\alpha K^{-\beta}+(1-\alpha)L^{-\beta}]^{-(1/\beta)-1}(-\beta)(1-\alpha)L^{-\beta-1}$$

消去$-\beta$，重新整理$(1-\alpha)$項，並加上指數$-(1/\beta)-1$，

$$\frac{\partial Q}{\partial L}=(1-\alpha)A[\alpha K^{-\beta}+(1-\alpha)L^{-\beta}]^{-(1+\beta)/\beta}L^{-(1+\beta)}$$

以$A^{1+\beta}/A^{\beta}=A$代入，

$$\frac{\partial Q}{\partial L}=(1-\alpha)\frac{A^{1+\beta}}{A^{\beta}}[\alpha K^{-\beta}+(1-\alpha)L^{-\beta}]^{-(1+\beta)/\beta}L^{-(1+\beta)}$$

由(9.22)式可知，$A^{1+\beta}[\alpha K^{-\beta}+(1-\alpha)L^{-\beta}]^{-(1+\beta)/\beta}=Q^{1+\beta}$與$L^{-(1+\beta)}=1/L^{1+\beta}$。因此，

$$\frac{\partial Q}{\partial L}=\frac{1-\alpha}{A^{\beta}}\left(\frac{Q}{L}\right)^{1+\beta} \tag{9.24}$$

同樣地，

$$\frac{\partial Q}{\partial K}=\frac{\alpha}{A^{\beta}}\left(\frac{Q}{K}\right)^{1+\beta} \tag{9.25}$$

將(9.24)與(9.25)式代入(9.23)式，可消去A^{β}與Q，

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\beta}=\frac{P_L}{P_K}$$

$$\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\beta}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{P_L}{P_K}\right)$$

$$\frac{\bar{K}}{\bar{L}}=\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1/(1+\beta)}\left(\frac{P_L}{P_K}\right)^{1/(1+\beta)} \tag{9.26}$$

因爲α與β爲常數，並且$(\bar{K}/\bar{L})$爲(P_L/P_K)之函數(參見問題9.49)，故我們可求得其替代彈性爲邊際與平均函數之比例。首先令h等於$\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1/(1+\beta)}$以簡化上面之代數式，故

$$\frac{\bar{K}}{\bar{L}}=h\left(\frac{P_L}{P_K}\right)^{1/(1+\beta)} \tag{9.27}$$

邊際函數爲

$$\frac{d(\bar{K}/\bar{L})}{d(P_L/P_K)}=\frac{h}{1+\beta}\left(\frac{P_L}{P_K}\right)^{1/(1+\beta)-1} \tag{9.28}$$

而平均函數爲

$$\frac{\bar{K}/\bar{L}}{P_L/P_K}=\frac{h(P_L/P_K)^{1/(1+\beta)}}{P_L/P_K}=h\left(\frac{P_L}{P_K}\right)^{1/(1+\beta)-1} \tag{9.29}$$

(9.28)式之邊際函數除以(9.29)式之平均函數可知其替代彈性 $\sigma = 1/(1+\beta)$，因爲 β 爲一已知參數，故 σ 爲常數。

(b) 若 $-1 < \beta < 0$，$\sigma > 1$，若 $\beta = 0$，$\sigma = 1$，若 $0 < \beta < \infty$，$\sigma < 1$。

9.52 試證CES生產函數爲一次齊次函數，

證 由(9.22)式知，$Q = A[\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha)L^{-\beta}]^{-1/\beta}$

按8.7節所討論者，K 與 L 各乘以 k

$$\begin{aligned} f(kK,kL) &= A[\alpha(kK)^{-\beta} + (1-\alpha)(kL)^{-\beta}]^{-1/\beta} \\ &= A\{k^{-\beta}[\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha)L^{-\beta}]\}^{-1/\beta} \\ &= A(k^{-\beta})^{-1/\beta}[\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha)L^{-\beta}]^{-1/\beta} \\ &= kA[\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha)L^{-\beta}]^{-1/\beta} = kQ \end{aligned}$$ 證畢。

9.53 當CES生產函數爲 $Q = 75(0.3K^{-0.4} + 0.7L^{-0.4})^{-2.5}$ 時，試求其替代彈性。

$$\sigma = \frac{1}{+\beta}$$

其中 $\beta = 0.4$。因此，$\sigma = 1/(1+0.4) = 0.71$。

9.54 最適化CES生產函數，$q = 75(0.3K^{-0.4} + 0.7L^{-0.4})^{-2.5}$ 受制於限制式 $4K+3L=120$

$$Q = 75(0.3K^{-0.4} + 0.7L^{-0.4})^{-2.5} + \lambda(4K + 3L - 120)$$

解 由連鎖律可得，

$$\begin{aligned} Q_K &= -187.5(0.3K^{-0.4} + 0.7L^{-0.4})^{-3.5}(-0.12K^{-1.4}) + 4\lambda \\ &= 22.5K^{-1.4}(0.3K^{-0.4} + 0.7L^{-0.4})^{-3.5} + 4\lambda = 0 \qquad (9.30) \\ Q_L &= -187.5(0.3K^{-0.4} + 0.7L^{-0.4})^{-3.5}(-0.28L^{-1.4}) + 3\lambda \\ &= 52.5L^{-1.4}(0.3K^{-0.4} + 0.7L^{-0.4})^{-3.5} + 3\lambda = 0 \qquad (9.31) \\ Q_\lambda &= 4K + 3L - 120 = 0 \qquad (9.32) \end{aligned}$$

解(9.30)與(9.31)式之 λ，並令之相等則，

$$\begin{aligned} -5.625K^{-1.4} &= -17.5L^{-1.4} \\ K^{-1.4} &= 3.11L^{-1.4} \\ K = (3.11)^{-1/1.4}L &= (3.11)^{-0.71}L \\ K &= 0.45L \end{aligned}$$

代入(9.32)式

$$4(0.45L) + 3L = 120 \qquad \bar{L} = 25$$

因此，$K = 11.25$。

9.55 使用(9.26)式中理想的 $\bar{K}/\bar{L}$ 比例檢查問題9.54之答案。

解 由(9.26)式知，$\dfrac{\bar{K}}{\bar{L}} = \left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\dfrac{P_L}{P_K}\right)^{1/(1+\beta)}$

以 $\alpha = 0.3$，$1-\alpha = 0.7$ 與 $\beta = 0.4$ 代入上式，

$$\frac{\bar{K}}{\bar{L}}=\left(\frac{0.3}{0.7}\frac{3}{4}\right)^{1/1.4}=\left(\frac{0.9}{2.8}\right)^{0.71}=(0.32)^{0.71}\cong 0.45$$

由於$\bar{K}=11.25$與$\bar{L}=25$，故$\bar{K}/\bar{L}=11.25/25=0.45$。

9.56 最適化CES生產函數$q=80(0.4K^{-0.25}+0.6L^{-0.25})^{-4}$受制於限制式$5K+2L=150$。

圖

$$Q=80(0.4K^{-0.25}+0.6L^{-0.25})^{-4}+\lambda(5K+2L-150)$$

$$Q_K=-320(0.4K^{-0.25}+0.6L^{-0.25})^{-5}(-0.1K^{-1.25})+5\lambda$$

$$=32K^{-1.25}(0.4K^{-0.25}+0.6L^{-0.25})^{-5}+5\lambda=0 \qquad (9.33)$$

$$Q_L=-320(0.4K^{-0.25}+0.6L^{-0.25})^{-5}(-0.15L^{-1.25})+2\lambda$$

$$=48L^{-1.25}(0.4K^{-0.25}+0.6L^{-0.25})^{-5}+2\lambda=0 \qquad (9.34)$$

$$Q_\lambda=5K+2L-150=0 \qquad (9.35)$$

解(9.33)與(9.34)式之λ，並令其相等，則可得，

$$-6.4K^{-1.25}=-24L^{-1.25}$$

$$K^{-1.25}=3.75L^{-1.25}$$

$$K=(3.75)^{-1/1.25}L=(3.75)^{-0.8}L \qquad K=0.35L$$

代入(9.35)式，

$$5(0.35L)+2L=150 \qquad \bar{L}=40$$

因此，$\bar{K}=14$。

9.57 使用(9.26)式檢查問題9.56之答案。

圖 以$\alpha=0.4$，$1-\alpha=0.6$與$\beta=0.25$代入(9.26)式

$$\frac{\bar{K}}{\bar{L}}=\left(\frac{0.4}{0.6}\frac{2}{5}\right)^{1/1.25}=\left(\frac{0.8}{3}\right)^{0.8}\cong 0.35$$

以$\bar{K}=14$，$\bar{L}=40$代入，$\frac{14}{40}=0.35$。

9.58 試求問題9.56之替代彈性

圖

$$\sigma=\frac{1}{1+\beta}=\frac{1}{1+0.25}=0.8$$

9.59 已知CES生產函數$q=100(0.2K^{0.5}+0.8L^{0.5})^{2}$，受制於限制式$10K+4L=4100$，試求(*a*)其臨界值，(*b*)替代彈性，(*c*)檢查(*a*)之答案。

圖 (*a*)

$$Q=100(0.2K^{0.5}+0.8L^{0.5})^2+\lambda(10K+4L-4100)$$

$$Q_K=200(0.2K^{0.5}+0.8L^{0.5})(0.1K^{-0.5})+10\lambda$$

$$=20K^{-0.5}(0.2K^{0.5}+0.8L^{0.5})+10\lambda=0 \qquad (9.36)$$

$$Q_L=200(0.2K^{0.5}+0.8L^{0.5})(0.4L^{-0.5})+4\lambda$$

$$=80L^{-0.5}(0.2K^{0.5}+0.8L^{0.5})+4\lambda=0 \qquad (9.37)$$

$$Q_\lambda=10K+4L-4100=0 \qquad (9.38)$$

解(9.36)與(9.37)式之λ，並令其相等則可得，

$$-2K^{-0.5} = -20L^{-0.5} \qquad K^{-0.5} = 10L^{-0.5}$$

$$K = (10)^{-1/0.5}L = (10)^{-2}L = 0.01L$$

代入(9.38)式，$10(0.01L) + 4L = 4100$，$\bar{L} = 1000$，與$\bar{K} = 10$。

(*b*)
$$\sigma = \frac{1}{1+\beta} = \frac{1}{1-0.5} = 2$$

(*c*)由於$\alpha = 0.2$，$1 - \alpha = 0.8$與$\beta = -0.5$，

$$\frac{\bar{K}}{\bar{L}} = \left(\frac{0.2}{0.8}\frac{4}{10}\right)^{1/(1-0.5)} = \left(\frac{0.8}{8}\right)^2 = (0.1)^2 = 0.01$$

以$\bar{K} = 10$與$\bar{L} = 1000$代入，$\frac{10}{1000} = 0.01$。

9.60 (*a*)於問題9.56中，如果P_L增加25%，試利用問題9.58所求之替代彈性估計最小成本之($\bar{K}/\bar{L}$)比例之變動情形，(*b*)以新的P_L代入(9.26)式檢查你的答案。

圖 (*a*)替代彈性乃測量，價格比例(P_L/P_K)相對變動所引起($\bar{K}/\bar{L}$)比例之相對變動量，因而，如果P_L增加25%，即$P_L = 1.25(2) = 2.5$，則$P_L/P_K = 2.5/5 = 0.5$相對於問題9.56之$\frac{2}{5} = 0.4$。

因此，價格比例增加之百分比爲$(0.5 - 0.4)/0.4 = 0.25$，由問題9.58知，其替代彈性$= 0.8$，故($\bar{K}/\bar{L}$)之預期變動爲

$$\frac{\Delta(\bar{K}/\bar{L})}{\bar{K}/\bar{L}} \cong 0.8(0.25) = 0.2 \quad \text{或} \quad 20\%$$

由於$(\bar{K}/\bar{L})_1 = 0.35$，故$(\bar{K}/\bar{L})_2 \cong 1.2(0.35) \cong 0.42$。

(*b*)以$P_L = 2.5$代入(9.26)式

$$\frac{\bar{K}}{\bar{L}} = \left(\frac{0.4}{0.6}\frac{2.5}{5}\right)^{0.8} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0.8} \cong 0.42$$

9.61 (*a*)於問題9.56中，如果資本之價格減少20%，試利用替代彈性估計新的($\bar{K}/\bar{L}$)比例，(*b*)以(9.26)式檢查你的答案。

圖 (*a*)如果P_K下跌20%，即$P_K = (0.8)5 = 4$因此$P_L/P_K = \frac{2}{4} = 0.5$，亦即$P_L/P_K$之比例增加25%，因此，

$$\frac{\Delta(\bar{K}/\bar{L})}{\bar{K}/\bar{L}} = 0.8(0.25) = 0.2 \quad \text{或} \quad 20\%$$

而$(\bar{K}/\bar{L})_2 \cong 1.2(0.35) = 0.42$。

(*b*)以$P_K = 4$代入(9.26)式，

$$\frac{\bar{K}}{\bar{L}} = \left(\frac{0.4}{0.6}\frac{2}{4}\right)^{0.8} = \left(\frac{0.8}{2.4}\right)^{0.8} = 0.42$$

9.62 於問題 9.59 中，如果勞動之價格下跌 10 %，試利用替代彈性估計其對最小成本之 $(\bar{K}/\bar{L})$ 比例之影響，(*b*) 以 (9.26) 式檢查你的答案。

圖 (*a*) 如果 P_L 下跌 10 %，即 $P_L = 0.9(4) = 3.6$，故 (P_L/P_K) 之比例亦下降 10 %，由於 (P_L/P_K) 減少 10 %，且替代彈性爲 2，故

$$\frac{\Delta(\bar{K}/\bar{L})}{\bar{K}/\bar{L}} \cong 2(-0.10) = -0.20 \quad \text{或} \quad -20\%$$

舊的 $\bar{K}/\bar{L} = 0.01$，$(\bar{K}/\bar{L})_2 \cong (1-0.2)(0.01) = 0.8(0.01) = 0.008$。

(*b*) 以 $P_L = 3.6$ 代入 (9.26) 式，

$$\frac{\bar{K}}{\bar{L}} = \left(\frac{0.2}{0.8}\frac{3.6}{10}\right)^2 = \left(\frac{0.72}{8}\right)^2 = (0.09)^2 = 0.0081$$

第十章
矩陣或線性代數之基本原理

10·1 矩陣代數之功用

矩陣代數之功用有(1)將複雜之方程組以簡易之方式表達出來，(2)在求解前，可以一簡易的方法先判斷此方程組是否有解，(3)提供求解方程組之方法。然而矩陣代數(matrix algebra)只能應用於線性方程組，而經濟學上之各種關係式往往可以近似之線性方程式表示，或者將之轉化爲線性關係式，並且，一般而言它們不致產生嚴重的問題。

例題10.1

某公司在其不同之銷售網中出售各種不同之產品，我們可用矩陣的方式簡明的列出該公司各種產品之存貨清單如下：

銷路	Skis	Poles	Bindings	Outfits
1	120	110	90	150
2	200	180	210	110
3	175	190	160	80
4	140	170	180	140

上列矩陣之橫列讀作，各個銷路中其各種不同產品之存貨水準，而縱行則讀作各種產品中在各個不同銷路之存貨水準。

例題10.2

一非線性函數，如一般化之C-D生產函數$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$，經由對數之寫法而轉換成線性函數$\log Q = \log A + \alpha \log K + \beta \log L$，以同樣的方式，指數函數與其它冪函數亦可予以轉換爲線性函數，因而可應用矩陣代數來處理。

10·2 定義與術語

矩陣爲數字，參數或變數之矩形排列，在矩陣中其排列之順序有一特別之規定(不能任意顛倒或對調)，每一數字(參數或變數)稱爲矩陣之元素(elements)，其中水平排列者稱爲列(row)；而縱行排列者稱爲行(columns)，列(m)與行(n)之數目即決定該矩陣之維度(dimensions)，一($m \times n$)矩陣之維度讀m乘n，列

數之下標一定位於行數下標之前，當列數等於行之數目（即，$m = n$）時稱爲**方陣**（square matrix），又如果矩陣由單一行構成時，即其維度爲$m \times 1$，則稱爲**行向量**（vector），反之，如果一矩陣只包含單一列，即維度爲 $1 \times n$，則稱爲**列向量**，另外把矩陣之列與行互相對調則稱之爲A之**轉置**（transpose），記作A'（或A^T）。

例題10.3

已知

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{(3\times 3)} \qquad B=\begin{bmatrix} 3 & 9 & 8 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}_{(2\times 3)} \qquad C=\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}_{(3\times 1)} \qquad D=[3 \quad 0 \quad 1]_{(1\times 3)}$$

A爲一般性矩陣，其元素共有 $3 \times 3 = 9$ 個，即共有 3 列與 3 行，故爲一方陣，注意在矩陣內，各元素不必以標點分開，每一元素均有兩個**下標**（subscripts）；第一個下標表列之位置，第二個下標則指行之位置，因而各元素在矩陣之位置得以精確認定，例如，a_{21} 指第二列第三行之元素；a_{32} 指第三列第二行之元素，因爲列之記號必定位於行之記號的前面，故我們爲便於記憶，可將下標視爲RC（R指列，C指行）。

B爲 2×3 矩陣，其 b_{11} 元素爲 9，b_{21} 元素爲 4。C爲行向量，其維度（3×1）。D爲列向量，維度（1×3）。

A之轉置爲

$$A'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

而C之轉置爲

$$C'=[7 \quad 4 \quad 5]$$

10-3 矩陣之加法與減法

兩矩陣相加與相減（即$A + B$或$A - B$）之條件是此二矩陣之維度必須相等，其方法是一矩陣之每一元素與另一矩陣相對應之元素相加或相減，亦即，A中 a_{11} 將與B之 b_{11} 相加或相減；a_{12} 與 b_{12} 相加或相減等等。

例題10.4

已知矩陣A與B，則$A + B$之和例示如下：

$$A=\begin{bmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}_{(3\times 3)} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}_{(3\times 3)}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 8+1 & 9+3 & 7+6 \\ 3+5 & 6+2 & 2+4 \\ 4+7 & 5+9 & 10+2 \end{bmatrix}_{(3\times 3)}=\begin{bmatrix} 9 & 12 & 13 \\ 8 & 8 & 6 \\ 11 & 14 & 12 \end{bmatrix}_{(3\times 3)}$$

已知矩陣C與D，則C - D之差例示如下：

$$C=\begin{bmatrix}4 & 9\\ 2 & 6\end{bmatrix}_{(2\times 2)} \qquad D=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 5 & 4\end{bmatrix}_{(2\times 2)} \qquad C-D=\begin{bmatrix}4-1 & 9-7\\ 2-5 & 6-4\end{bmatrix}_{(2\times 2)}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -3 & 2\end{bmatrix}_{(2\times 2)}$$

例題10.5

假設例 1 之廠商在各銷路上增加其送貨如D所示，則新的存貨水準爲何？

$$D=\begin{bmatrix}40 & 20 & 50 & 10\\ 25 & 30 & 10 & 60\\ 15 & 0 & 40 & 70\\ 60 & 40 & 10 & 50\end{bmatrix}$$

爲求其新的存貨水準，原來之矩陣與D矩陣相加，即$S+D$，其方法是將兩矩陣相對應之元素相交而構成的矩陣，

$$S+D=\begin{bmatrix}120+40 & 110+20 & 90+50 & 150+10\\ 200+25 & 180+30 & 210+10 & 110+60\\ 175+15 & 190+0 & 160+40 & 80+70\\ 140+60 & 170+40 & 180+10 & 140+50\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}160 & 130 & 140 & 160\\ 225 & 210 & 220 & 170\\ 190 & 190 & 200 & 150\\ 200 & 210 & 190 & 190\end{bmatrix}$$

10.4 純量乘法

於矩陣代數中，一簡單數字，如 12，−2，0.07，稱爲**純量**（scalar），一矩陣乘以某一純量即此矩陣中每一元素均與此純量相乘，此方法稱爲**純量乘法**（scalar multiplication），因爲此純量將使矩陣作倍數之擴大或縮小。

例題10.6

已知$k=8$與

$$A=\begin{bmatrix}6 & 9\\ 2 & 7\\ 8 & 4\end{bmatrix}_{(3\times 2)}$$

則其純量乘積之結果爲

$$kA=\begin{bmatrix}8(6) & 8(9)\\ 8(2) & 8(7)\\ 8(8) & 8(4)\end{bmatrix}_{(3\times 2)}=\begin{bmatrix}48 & 72\\ 16 & 56\\ 64 & 32\end{bmatrix}_{(3\times 2)}$$

10.5 向量之乘法

列向量（A）乘以行向量（B），其先決條件是每一向量所含元素之個數相同，而其乘積之結果即爲列向量之每一個元素乘以對應之行向量之元素，然後予以加總，即：

$$AB = (a_{11} \times b_{11}) + (a_{12} \times b_{21}) + (a_{13} \times b_{31}) \quad \text{等等}$$

另外，兩個行向量之乘積將爲一數或純量，列 - 行向量之乘法是非常重要的概念，因爲它們爲矩陣乘法之基礎。

例題10.7

列向量A與行向量B之乘積爲，

$$A = [4 \quad 7 \quad 2 \quad 9]_{(1\times 4)} \qquad B = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}_{(4\times 1)}$$

計算如下：

$$AB = 4(12) + 7(1) + 2(5) + 9(6) = 48 + 7 + 10 + 54 = 119$$

下列兩向量之乘積爲：

$$C = [3 \quad 6 \quad 8]_{(1\times 3)} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}_{(3\times 1)}$$

$CD = (3\times 2) + (6\times 4) + (8\times 5) = 6 + 24 + 40 = 70$。

注意，因爲上式各組向量所含元素之個數相同，故可相乘。

同時，上述乘積之順序如果顛倒，亦即“行 - 列”向量相乘（BA或DC）則將得到不同之答案，參見問題 10.36 。

10.6 矩陣之乘法

兩矩陣，維度分別爲 $(m\times n)_1$ 與 $(m\times n)_2$，能夠相乘之先決條件是兩矩陣之**形式相關**（conformable），亦即，$n_1 = m_2$，或第一個矩陣之行數等於第二個矩陣之列數，其乘積是前一個矩陣之每一列向量，乘以後一個矩陣之每一個行向量（根據列與行向量乘法之原則——10.5 節所討論者）。此列 - 行之乘積則爲新的相乘矩陣之其中一個元素，例如，一乘積矩陣C之每一元素C_{ij}乃爲前一個矩陣之第i列與後一個矩陣之第j行相乘之一純量，此列 - 行乘積稱爲內積（inner products）。

例題10.8

已知

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 12 & 9 & 11 \end{bmatrix}_{(2\times 3)} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 5 & 10 \\ 13 & 2 \end{bmatrix}_{(3\times 2)} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{(2\times 3)}$$

矩陣是否能夠相乘，其簡易的檢查方法是，將兩個相乘矩陣之維度列出，然後把第一個矩陣之後一個序號與第二個矩陣之前一個序號圈起來，如果它們相等的話，則此二矩陣即爲適合相乘之矩陣，另外，在圈外之數字則爲此二矩陣相乘之結果矩陣之維度，因此，如果此二矩陣分別爲 A 與 B，則 AB

$$(2\times\underline{3}) = (\underline{3}\times 2)$$
$$\searrow \quad \swarrow$$
$$(2\times 2)$$

故此二矩陣適合相乘，而乘積矩陣 AB 之維度爲（2×2），當二矩陣，如 A 與 B 適合相乘則稱 AB 爲定義範圍內。

對於 BC，

$$(3\times\underline{2}) = (\underline{2}\times 3)$$
$$\searrow \quad \swarrow$$
$$(3\times 3)$$

此二矩陣適合相乘，而其乘積矩陣 BC 之維度爲（3×3）。對於 AC，

$$(2\times\underline{3}) \neq (\underline{2}\times 3)$$

A 與 C 不適合乘法，故 AC 不存在。

例題 10.9

於例 8 我們討論 AB 之可相乘性之判別，如兩矩陣可相乘，則可求得其乘積，其步驟是，首先將前一個矩陣之首列乘以後一個矩陣之首行其結果即爲乘積矩陣 D 之第一個元素 d_{11}，然後將前面矩陣之首列乘以後面矩陣之第二行而得到 d_{12}，至此，因爲後面矩陣已無其它行可被前面矩陣之首列乘，故我們移到前面矩陣之第二列，即以前面矩陣之第二列乘以後面矩陣之首行而得 d_{21}，最後則以前面矩陣之第二列乘以後面矩陣之第二行而得 d_{22}，故

$$AB = D = \begin{bmatrix} 3(6)+6(5)+7(13) & 3(12)+6(10)+7(2) \\ 12(6)+9(5)+11(13) & 12(12)+9(10)+11(2) \end{bmatrix}_{(2\times 2)} = \begin{bmatrix} 139 & 110 \\ 260 & 256 \end{bmatrix}_{(2\times 2)}$$

BC 之積亦可以上述同樣方法計算如下：

$$BC = E = \begin{bmatrix} 6(1)+12(2) & 6(7)+12(4) & 6(8)+12(3) \\ 5(1)+10(2) & 5(7)+10(4) & 5(8)+10(3) \\ 13(1)+2(2) & 13(7)+2(4) & 13(8)+2(3) \end{bmatrix}_{(3\times 3)} = \begin{bmatrix} 30 & 90 & 84 \\ 25 & 75 & 70 \\ 17 & 99 & 110 \end{bmatrix}_{(3\times 3)}$$

例題10.10

關於例1中，假設 skis 之價格爲 $200，poles $50，bindings $100，而 outfits $150，試求各個不同銷路中存貨之價值（$V$），爲此，我們以價格爲一行向量（$P$），並以 S 乘以 P：

$$V = SP = \begin{bmatrix} 120 & 110 & 90 & 150 \\ 200 & 180 & 210 & 110 \\ 175 & 190 & 160 & 80 \\ 140 & 170 & 180 & 140 \end{bmatrix}_{(4\times4)} \begin{bmatrix} 200 \\ 50 \\ 100 \\ 150 \end{bmatrix}_{(4\times1)}$$

此二個矩陣適合相乘，且其積之維度爲 4 × 1，因爲

$$(4\times4) \quad = \quad (4\times1)$$
$$\searrow \quad \swarrow$$
$$(4\times1)$$

因此，

$$V = \begin{bmatrix} 120(200)+110(50)+90(100)+150(150) \\ 200(200)+180(50)+210(100)+110(150) \\ 175(200)+190(50)+160(100)+80(150) \\ 140(200)+170(50)+180(100)+140(150) \end{bmatrix}_{(4\times1)} = \begin{bmatrix} 61{,}000 \\ 86{,}500 \\ 72{,}500 \\ 75{,}500 \end{bmatrix}_{(4\times1)}$$

10.7 矩陣代數之交換律、結合律與分配律

矩陣的加法是可交換的（即 $A + B = B + A$），這是因爲矩陣的加法只將兩矩陣對應的元素相加起來，而每一對應的元素其相加順序並不重要，同樣的方法，矩陣的加法亦滿足結合律，即 $(A + B) + C = A + (B + C)$，又因爲減法運算 $A - B$ 可視爲加法運算 $A + (-B)$，故矩陣之減法可交換也可結合。

矩陣的乘法，除了極少數例外，一般而言，不可交換（即 $AB \neq BA$）。然而純量的乘法是可以交換的（即 $kA = Ak$），如果三個或多個矩陣適合相乘，即 $X_{(a\times b)}$，$Y_{(c\times d)}$，$Z_{(e\times f)}$，其中 $b = c$ 且 $d = e$，則只要相鄰的矩陣皆滿足階次(order)相配的條件，則符合結合律，亦即 $(XY)Z = X(YZ)$，在相同的情況下矩陣之乘法也合於分配律：$A(B + C) = AB + AC$。

例題10.11

已知

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 17 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

試證矩陣之加法與減法可交換，亦即，證明(1) $A + B = B + A$，與(2) $A - B = -B +$

其計算如下：

(1) $$A+B=\begin{bmatrix}4+3 & 11+7\\ 17+6 & 6+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 18\\ 23 & 8\end{bmatrix}=B+A=\begin{bmatrix}3+4 & 7+11\\ 6+17 & 2+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 18\\ 23 & 8\end{bmatrix}$$

(2) $$A-B=\begin{bmatrix}4-3 & 11-7\\ 17-6 & 6-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 11 & 4\end{bmatrix}=-B+A=\begin{bmatrix}-3+4 & -7+11\\ -6+17 & -2+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 11 & 4\end{bmatrix}$$

例題10.12

已知

$$A=\begin{bmatrix}3 & 6 & 7\\ 12 & 9 & 11\end{bmatrix}_{(2\times3)} \qquad B=\begin{bmatrix}6 & 12\\ 5 & 10\\ 13 & 2\end{bmatrix}_{(3\times2)}$$

我們可證明矩陣之乘法不具交換性，亦即證明 $AB\neq BA$，如下：

AB適合相乘，因爲 $(2\times3)\cdot(3\times2)$，$AB$之維度爲 2×2

$$AB=\begin{bmatrix}3(6)+6(5)+7(13) & 3(12)+6(10)+7(2)\\ 12(6)+9(5)+11(13) & 12(12)+9(10)+11(2)\end{bmatrix}_{(2\times2)}=\begin{bmatrix}139 & 110\\ 260 & 256\end{bmatrix}_{(2\times2)}$$

BA適合相乘，因爲 $(3\times2)\cdot(2\times3)$ BA之維度爲 3×3

$$BA=\begin{bmatrix}6(3)+12(12) & 6(6)+12(9) & 6(7)+12(11)\\ 5(3)+10(12) & 5(6)+10(9) & 5(7)+10(11)\\ 13(3)+2(12) & 13(6)+2(9) & 13(7)+2(11)\end{bmatrix}_{(3\times3)}=\begin{bmatrix}162 & 144 & 174\\ 135 & 120 & 145\\ 63 & 96 & 113\end{bmatrix}_{(3\times3)}$$

由於 $AB\neq BA$，有時候兩矩陣之順序顚倒時甚至無法相乘。

例題10.13

已知

$$A=\begin{bmatrix}7 & 5\\ 1 & 3\\ 8 & 6\end{bmatrix}_{(3\times2)} \qquad B=\begin{bmatrix}4 & 9 & 10\\ 2 & 6 & 5\end{bmatrix}_{(2\times3)} \qquad C=\begin{bmatrix}2\\ 6\\ 7\end{bmatrix}_{(3\times1)}$$

試證矩陣之乘法適合結合律，亦即，$(AB)C=A(BC)$，計算如下：

$$AB=\begin{bmatrix}7(4)+5(2) & 7(9)+5(6) & 7(10)+5(5)\\ 1(4)+3(2) & 1(9)+3(6) & 1(10)+3(5)\\ 8(4)+6(2) & 8(9)+6(6) & 8(10)+6(5)\end{bmatrix}_{(3\times3)}=\begin{bmatrix}38 & 93 & 95\\ 10 & 27 & 25\\ 44 & 108 & 110\end{bmatrix}_{(3\times3)}$$

$$(AB)C=\begin{bmatrix}38 & 93 & 95\\ 10 & 27 & 25\\ 44 & 108 & 110\end{bmatrix}_{(3\times3)}\begin{bmatrix}2\\ 6\\ 7\end{bmatrix}_{(3\times1)}=\begin{bmatrix}38(2)+93(6)+95(7)\\ 10(2)+27(6)+25(7)\\ 44(2)+108(6)+110(7)\end{bmatrix}_{(3\times1)}=\begin{bmatrix}1299\\ 357\\ 1506\end{bmatrix}_{(3\times1)}$$

$$BC=\begin{bmatrix}4(2)+9(6)+10(7)\\2(2)+6(6)+5(7)\end{bmatrix}_{(2\times1)}=\begin{bmatrix}132\\75\end{bmatrix}_{(2\times1)}$$

$$A(BC)=\begin{bmatrix}7&5\\1&3\\8&6\end{bmatrix}_{(3\times2)}\begin{bmatrix}132\\75\end{bmatrix}_{(2\times1)}=\begin{bmatrix}7(132)+5(75)\\1(132)+3(75)\\8(132)+6(75)\end{bmatrix}_{(3\times1)}=\begin{bmatrix}1299\\357\\1506\end{bmatrix}_{(3\times1)}$$ 證畢。

10.8 單位矩陣與零矩陣

單位矩陣（identity matrix）I 爲一個方陣，其主對角線上之元素均爲 1，其它都是零，參見例 14，通常以 I_n 表之，其中 n 表其行或列之數目，單位矩陣與數字代數中的 1 有相似的性質，因爲任一矩陣與單位矩陣相乘其結果等於原來之矩陣（亦即，$AI=IA=A$），而單位矩陣本身相乘其結果仍爲此一單位矩陣：$I\times I=(I)^2=I$。另外，任一矩陣，若 $A=A'$ 則稱 A 爲**對稱矩陣**（symmetric matrix），又一對稱矩陣，如果 $A\times A=A$ 則稱爲**等冪矩陣**（idempotent matrix），由單位矩陣之特性可知，單位矩陣爲對稱矩陣且爲等冪矩陣。

零矩陣（null matrix）就是矩陣各元素全爲 0 的矩陣，不像 I 一般，零矩陣不限制一定是方陣，任一矩陣與零矩陣相加或相減仍爲原矩陣；而任一矩陣乘以零矩陣等於零矩陣。

例題 10.14

已知

$$A=\begin{bmatrix}7&10&14\\9&2&6\\1&3&7\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}5&12\\20&4\end{bmatrix}\qquad N=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\qquad I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

由本例可證得(1)一矩陣與單位矩陣相乘等於該矩陣本身，即 $AI=A$，(2)一矩陣乘以零矩陣等於零矩陣，即 $BN=N$，(3)一矩陣與零矩陣相加或相減等於該矩陣，即 $B+N=B$，其計算如下：

(1) $$AI=\begin{bmatrix}7&10&14\\9&2&6\\1&3&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7(1)+10(0)+14(0)&7(0)+10(1)+14(0)&7(0)+10(0)+14(1)\\9(1)+2(0)+6(0)&9(0)+2(1)+6(0)&9(0)+2(0)+6(1)\\1(1)+3(0)+7(0)&1(0)+3(1)+7(0)&1(0)+3(0)+7(1)\end{bmatrix}$$

$$AI=\begin{bmatrix}7&10&14\\9&2&6\\1&3&7\end{bmatrix}$$ 證畢。

(2) $$BN=\begin{bmatrix}5(0)+12(0)&5(0)+12(0)\\20(0)+4(0)&20(0)+4(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$ 證畢。

(3) $$B+N=\begin{bmatrix}5+0&12+0\\20+0&4+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&12\\20&4\end{bmatrix}$$ 證畢。

10.9 線性方程組之矩陣表示式

矩陣代數可以很精簡的寫出線性方程組，下列即爲一簡單例示：

$$7x_1 + 3x_2 = 45$$
$$4x_1 + 5x_2 = 29$$

可以矩陣形式表示爲

$$AX = B$$

其中 $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 與 $B = \begin{bmatrix} 45 \\ 29 \end{bmatrix}$

A稱爲**係數矩陣**（coefficent matrix），X爲**解向量**（solution vector）而B稱爲常數項向量，其中X與B必爲行向量。

例題10.15

試證$AX = B$可以正確的表達10.9節之方程組，並求出AX之積，AX是適合相乘的，且其乘積矩陣爲 2×1 。

$$(2\times 2) \quad = \quad (2\times 1)$$
$$(2\times 1)$$

因此 $$AX = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}_{(2\times 1)}$$

且 $$AX = B = \begin{bmatrix} 7x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 29 \end{bmatrix}$$ 證畢。

在此，AX爲一（2×1）行向量，因爲每一列只含單一的元素，並無法經由加法予以進一步化簡。

例題10.16

已知

$$8w + 12x - 7y + 2z = 139$$
$$3w - 13x + 4y + 9z = 242$$

將此方程組以矩陣形式表示之，注意其乘法上之次階問題：

$$\begin{bmatrix} 8 & 12 & -7 & 2 \\ 3 & -13 & 4 & 9 \end{bmatrix}_{(2\times 4)} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{(4\times 1)} = \begin{bmatrix} 139 \\ 242 \end{bmatrix}_{(2\times 1)}$$

然後，令 A = 係數矩陣，W = 變數行向量，且 B = 常數行向量，故所予之方程式可以矩陣形式表示如下，

$$A_{(2\times 4)}W_{(4\times 1)} = B_{(2\times 1)}$$

10·10 列之運算

列的運算是指將簡單的代數運算運用至矩陣之列的運算，其線性關係未變，則存在下列三種基本的列運算(1)一矩陣之任兩列對調，(2)任意列與常數（不等 0）相乘，(3)任一列之倍數與另一列相加或相減。

例題 10.17

於代數中吾人所熟悉者，應用至列之運算例示如下，已知

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 16 \\ 8x + 4y &= 28 \end{aligned}$$

不改變其線性關係，則

(1) 兩列對調：

$$\begin{aligned} 8x + 4y &= 28 \\ 5x + 2y &= 16 \end{aligned}$$

(2) 任一列乘以一常數，在此以 $8x + 4y = 28$ 乘以 $\frac{1}{4}$，則

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ 5x + 2y &= 16 \end{aligned}$$

(3) 任一列減去另一列之倍數，在此以 $2(2x + y = 7)$ 被 $5x + 2y = 16$ 減，則

$$\begin{array}{r} 5x + 2y = 16 \\ -4x - 2y = -14 \\ \hline x \quad\quad = 2 \end{array}$$

10·11 擴張矩陣

已知一方程組以矩陣表示如 $AX = B$，則**擴張矩陣**（augmented matrix）$A|B$，是指係數矩陣 A 與常數矩陣放在同一個大括弧中，其中間以一線分開之，例如，於 10.9 節之方程組，則

$$A|B = \left[\begin{array}{cc|c} 7 & 3 & 45 \\ 4 & 5 & 29 \end{array}\right]$$

擴張矩陣是經常被用來求解線性方程組的方法之一。

例題10.18

下列方程組之擴張矩陣$A|B$

$$\begin{aligned} 4x_1+5x_2+7x_3&=42\\ 2x_1+3x_2+8x_3&=40\\ 6x_1+4x_2+\ x_3&=18 \end{aligned}$$

爲

$$A|B=\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 7 & 42\\ 2 & 3 & 8 & 40\\ 6 & 4 & 1 & 18 \end{array}\right]$$

10.12 求解線性方程式之高斯方法

利用高斯消去法求解線性方程式是將該方程組以擴張矩陣表列之，並重複運用各種基本之列運算處理此擴張矩陣，一直到其係數矩陣變爲單位矩陣爲止，此時此方程組之解，即爲行向量B之各個元素（參見例9）。將係數矩陣轉換爲單位矩陣之步驟如下，首先求取此係數矩陣中a_{11}之位置爲1；然後使用列運算使得首行之其它元素均爲0；其次，求得a_{22}爲1再運用列運算使得第二行諸元素均爲0，上述過程一直繼續，則最後可得到主對角線均爲1而其它元素均爲0之單位矩陣。

例題10.19

下列方程組以高斯消去法求解x_1與x_2例示如下：

$$\begin{aligned} 2x_1+12x_2&=40\\ 8x_1+\ 4x_2&=28 \end{aligned}$$

首先，列出其擴張矩陣如下：

$$A|B=\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 12 & 40\\ 8 & 4 & 28 \end{array}\right]$$

然後，

1a. 首列乘以$\frac{1}{2}$使得$a_{11}=1$。

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 20\\ 8 & 4 & 28 \end{array}\right]$$

1b. 第二列減8倍之首列使得第1行除a_{11}外爲0，

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 20\\ 0 & -44 & -132 \end{array}\right]$$

2a. 第二列乘以$\left(-\frac{1}{44}\right)$使得$a_{22}=1$，

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 20\\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

2b. 首列減 6 倍之第二列，使得除 a_{11} 外第二行元素爲 0

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

故其解爲 $x_1 = 2$ ， $x_2 = 3$ 因爲

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 0 = 2$$

$$0 + x_2 = 3$$

習題與解答

矩陣陳式

10.1 (*a*) 試指出下列諸矩陣之維度，(*b*) 寫出它們的轉置並說明新矩陣之維度。

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 8 & 3 \\ 9 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 12 \\ 19 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 8 \\ 3 & 0 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \qquad E = [10 \quad 2 \quad 9 \quad 6 \quad 8 \quad 1] \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 9 & 3 \\ 6 & 7 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

圖 (*a*) 必須記得，維度之乘法是列在前行在後或 RC ，$A = (2 \times 3)$ ，$B = (3 \times 4)$ ，$C = (3 \times 1)$ ，$D = (4 \times 2)$ ，$E = (1 \times 6)$ ，與 $F = (4 \times 3)$ 。C 亦稱爲行向量；E 爲列向量。

(*b*) A 之轉置乃將 A 之列轉換爲 A 之行，另外 A 之行轉換爲 A 之列，

$$A' = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}_{(3\times 2)} \qquad B' = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 9 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{(4\times 3)} \qquad C' = [12 \quad 19 \quad 25]_{(1\times 3)}$$

$$D' = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 8 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{(2\times 4)} \qquad E' = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 9 \\ 6 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}_{(6\times 1)} \qquad F' = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{(3\times 4)}$$

10.2 已知 $a_{21} = 4$ ，$a_{22} = 5$ ，$a_{13} = 3$ ，$a_{23} = 6$ ，$a_{12} = 10$ 與 $a_{31} = -5$ ，以你對矩陣元素之位置的瞭解填寫下列之矩陣，

$$A=\begin{bmatrix}6 & — & — \\ — & 7 & — \\ — & — & 9\end{bmatrix}$$

圖 因爲其下標總是代表列 - 行（RC）之次序，故 $a_{21}=4$ 指 4 位於第二列第一行；而 $a_{33}=5$ 指 5 位於第三列第二行，等等。因此

$$A=\begin{bmatrix}6 & 10 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ -5 & 5 & 9\end{bmatrix}$$

10.3 某廠商擁有五家零售店，其存貨分別爲店 1 有 10 部電視（t），15台電唱機（s），9 卷錄音帶（d）與 12 台錄音機（r）；店 2 有 20t，14s，8d與5r；店 3 有 16t，8s，15d與6r；店 4 有 25t，15s，7d與16r；店 5 有 5t，12s，20d與 18r，試以矩陣形式列出此廠商之各零售店之存貨量。

圖

$$\begin{array}{c} \text{零售店} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t & s & d & r \end{array} \\ \begin{bmatrix}10 & 15 & 9 & 12 \\ 20 & 14 & 8 & 5 \\ 16 & 8 & 15 & 6 \\ 25 & 15 & 7 & 16 \\ 5 & 12 & 20 & 18\end{bmatrix} \end{array}$$

矩陣的加法與減法

10.4 求下列諸矩陣之和 $A+B$：

圖 (*a*) $A=\begin{bmatrix}8 & 9 \\ 12 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}13 & 4 \\ 2 & 6\end{bmatrix}$

$$A+B=\begin{bmatrix}8+13 & 9+4 \\ 12+2 & 7+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21 & 13 \\ 14 & 13\end{bmatrix}$$

(*b*) $A=\begin{bmatrix}7 & -10 \\ -8 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-8 & 4 \\ 12 & -6\end{bmatrix}$

$$A+B=\begin{bmatrix}7+(-8) & -10+4 \\ -8+12 & 2+(-6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -6 \\ 4 & -4\end{bmatrix}$$

(*c*) $A=[12 \quad 16 \quad 2 \quad 7 \quad 8]$, $B=[0 \quad 1 \quad 9 \quad 5 \quad 6]$

$$A+B=[12 \quad 17 \quad 11 \quad 12 \quad 14]$$

(*d*) $A=\begin{bmatrix}9 & 4 \\ 2 & 7 \\ 3 & 5 \\ 8 & 6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 3 \\ 6 & 5 \\ 2 & 8 \\ 9 & 2\end{bmatrix}$

$$A+B=\begin{bmatrix}10 & 7\\ 8 & 12\\ 5 & 13\\ 17 & 8\end{bmatrix}$$

10.5 已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -6 & 2\\ -3 & 5 & 8 & 7\\ 2 & 9 & -1 & 6\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}7 & 2 & 12 & 6 & 5\\ 4 & 3 & 8 & 10 & 6\\ 1 & 0 & 5 & 11 & 9\end{bmatrix}$ 重新作問題 10.4 。

圖 A與B不能相加，因爲它們之維度不同，即$A=(3\times4)$，$B=(3\times5)$。

10.6 於問題 10.3 中，假設其母公司送貨 (D) 至各個分店如下，

$$D=\begin{bmatrix}4 & 3 & 5 & 2\\ 0 & 9 & 6 & 1\\ 5 & 7 & 2 & 6\\ 12 & 2 & 4 & 8\\ 9 & 6 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

則各分店新的存貨水準爲何？

圖

$$I_2=I_1+D=\begin{bmatrix}10 & 15 & 9 & 12\\ 20 & 14 & 8 & 5\\ 16 & 8 & 15 & 6\\ 25 & 15 & 7 & 16\\ 5 & 12 & 20 & 18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 3 & 5 & 2\\ 0 & 9 & 6 & 1\\ 5 & 7 & 2 & 6\\ 12 & 2 & 4 & 8\\ 9 & 6 & 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 18 & 14 & 14\\ 20 & 23 & 14 & 6\\ 21 & 15 & 17 & 12\\ 37 & 17 & 11 & 24\\ 14 & 18 & 23 & 23\end{bmatrix}$$

10.7 求下列諸矩陣之差 $A-B$：

圖 (*a*) $A=\begin{bmatrix}3 & 7 & 11\\ 12 & 9 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}6 & 8 & 1\\ 9 & 5 & 8\end{bmatrix}$

$$A-B=\begin{bmatrix}3-6 & 7-8 & 11-1\\ 12-9 & 9-5 & 2-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 10\\ 3 & 4 & -6\end{bmatrix}$$

(*b*) $A=\begin{bmatrix}16\\ 2\\ 15\\ 9\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7\\ 11\\ 3\\ 8\end{bmatrix}$

$$A-B=\begin{bmatrix}16-7\\ 2-11\\ 15-3\\ 9-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ -9\\ 12\\ 1\end{bmatrix}$$

(c) $A=\begin{bmatrix}13 & -5 & 8\\ 4 & 9 & 1\\ 10 & 6 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}14 & 2 & -5\\ 9 & 6 & 8\\ -3 & 13 & 11\end{bmatrix}$

$$A-B=\begin{bmatrix}-1 & -7 & 13\\ -5 & 3 & -7\\ 13 & -7 & -13\end{bmatrix}$$

10.8 於問題 10.6 中此公司銷售之月報表 R 如下：

$$R=\begin{bmatrix}8 & 12 & 6 & 9\\ 10 & 11 & 8 & 3\\ 15 & 6 & 9 & 7\\ 21 & 14 & 5 & 18\\ 6 & 11 & 13 & 9\end{bmatrix}$$

在月底時該公司存貨水準爲何？

圖

$$I_2-R=\begin{bmatrix}14 & 18 & 14 & 14\\ 20 & 23 & 14 & 6\\ 21 & 15 & 17 & 12\\ 37 & 17 & 11 & 24\\ 14 & 18 & 23 & 23\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & 12 & 6 & 9\\ 10 & 11 & 8 & 3\\ 15 & 6 & 9 & 7\\ 21 & 14 & 5 & 18\\ 6 & 11 & 13 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 6 & 8 & 5\\ 10 & 12 & 6 & 3\\ 6 & 9 & 8 & 5\\ 16 & 3 & 6 & 6\\ 8 & 7 & 10 & 14\end{bmatrix}$$

適合性

10.9 已知 $A=\begin{bmatrix}7 & 2 & 6\\ 5 & 4 & 8\\ 3 & 1 & 9\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 5 & 0\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}11\\ 4\\ 13\end{bmatrix}$

$D=\begin{bmatrix}14\\ 4\end{bmatrix}$ $E=[8\quad 1\quad 10]$ $F=[13\quad 3]$

試說明下列各矩陣之乘積是否存在，亦即是否適合乘法運算，如果存在的話，寫出其積矩陣之維度，(*a*) AC，(*b*) BD，(*c*) EC，(*d*) DF，(*e*) CA，(*f*) DE，(*g*) DB，(*h*) CF，(*i*) EF。

圖 (*a*) AC 之維度，在乘法之次序中，爲 (3×3) $=$ (3×1)，因爲虛線圓圈內之數字相等，故 AC 存在，亦即 A 之行數等於 C 之列數，而圈外之數字即爲此乘積矩陣之維度，即（3×1）。

(*b*) BD 之維度爲 (2×2) $=$ (2×1)，BD 存在；其積矩陣將爲（2×1）矩陣。

(*c*) EC 之維度爲 $(1\times\underline{3})\ =\ (\underline{3}\times 1)$，$EC$ 存在；其積矩陣之維度爲（1×1）或一純量。

(*d*) DF 之維度爲 $(2\times\underline{1})\ =\ (\underline{1}\times 2)$，$DF$ 存在；其積矩陣之維度爲（2×2）。

(*e*) CA 之維度爲 $(3\times\underline{1})\ \neq\ (\underline{3}\times 3)$，故 CA 不存在，此二矩陣在階次上不適合相乘，［注意，(*a*) 中 AC 存在，此表示矩陣之乘法不具交換性：$AC\neq CA$。］

(*f*) DE 之維度爲 $(2\times\underline{1})\ =\ (\underline{1}\times 3)$，$DE$ 存在；其積矩陣之維度爲（2×3）。

(*g*) DB 之維度爲 $(2\times\underline{1})\ \neq\ (\underline{2}\times 2)$，此二矩陣不適合乘法，即 DB 不存在。

(*h*) CF 之維度爲 $(3\times\underline{1})\ =\ (\underline{1}\times 2)$，此二矩陣適合乘法；其積矩陣之維度爲（$3\times 2$）。

(*i*) EF 之維度爲 $(1\times\underline{3})\ \neq\ (\underline{1}\times 2)$，此二矩陣不適合乘法，即 EF 不存在。

純量與向量之乘法

10.10 已知 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 9 & 5\\ 6 & 7\end{bmatrix}$　　$k=4$，求 $Ak=?$

解 k 爲一純量，且純量可與任意維度之矩陣相乘，因此其乘積有意義，即

$$Ak=\begin{bmatrix}3(4) & 2(4)\\ 9(4) & 5(4)\\ 6(4) & 7(4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 8\\ 36 & 20\\ 24 & 28\end{bmatrix}$$

10.11 已知 $k=-2$　　$A=\begin{bmatrix}7 & -3 & 2\\ -5 & 6 & 8\\ 2 & -7 & -9\end{bmatrix}$，求 $kA=?$

解

$$kA=\begin{bmatrix}-2(7) & -2(-3) & -2(2)\\ -2(-5) & -2(6) & -2(8)\\ -2(2) & -2(-7) & -2(-9)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-14 & 6 & -4\\ 10 & -12 & -16\\ -4 & 14 & 18\end{bmatrix}$$

10.12 某服飾店於年底時將其所有之褲子、夾克與套裝均以 20 % 折價出售，如果 V_1 爲三家分店中未折價前之存貨價值，求折價後之存貨值（V_2），

$$V_1=\begin{bmatrix}5{,}000 & 4{,}500 & 6{,}000\\ 10{,}000 & 12{,}000 & 7{,}500\\ 8{,}000 & 9{,}000 & 11{,}000\end{bmatrix}$$

圖　20 % 之減價即指以原來價格之 80 % 出售其存貨，因此 $V_2 = 0.8V_1$，則

$$V_2=0.8\begin{bmatrix}5{,}000 & 4{,}500 & 6{,}000\\ 10{,}000 & 12{,}000 & 7{,}500\\ 8{,}000 & 9{,}000 & 11{,}000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4000 & 3600 & 4800\\ 8000 & 9600 & 6000\\ 6400 & 7200 & 8800\end{bmatrix}$$

10.13　已知 $A=[9\quad 11\quad 3]$　　$B=\begin{bmatrix}2\\6\\7\end{bmatrix}$，求 AB。

圖　AB有意義，因爲 $(1\times 3)=(3\times 1)$；其積爲一純量。其方法是列向量之每一元素乘以行向量中對應之每一元素然後予以加總，即

$$AB=9(2)+11(6)+3(7)=18+66+21=105$$

10.14　已知 $A=[12\quad -5\quad 6\quad 11]$　　$B=\begin{bmatrix}3\\2\\-8\\6\end{bmatrix}$，求 $AB=?$

圖　AB存在：因爲 $(1\times 4)=(4\times 1)$。

$$AB=12(3)+(-5)(2)+6(-8)+11(6)=44$$

10.15　已知 $A=[9\quad 6\quad 2\quad 0\quad -5]$　　$B=\begin{bmatrix}2\\13\\5\\8\\1\end{bmatrix}$，求 $AB=?$

圖　AB存在；因爲 $(1\times 5)=(5\times 1)$。

$$AB=9(2)+6(13)+2(5)+0(8)+(-5)(1)=101$$

10.16　已知 $A=[12\quad 9\quad 2\quad 4]$　　$B=\begin{bmatrix}6\\1\\2\end{bmatrix}$，求 $AB=?$

圖　AB不存在；因爲 $(1\times 4)\neq(3\times 1)$，故不適合乘法。

10.17　如果一部電視機之價格爲 $300，收音機之價格爲 $250，一組錄音帶價格爲 $175，而錄音機之價格爲 $125，試利用向量求問題 10.3 中銷路 2 之存貨價值。

圖　存貨價值爲$V=QP$。銷路 2 之存貨量以向量表示爲$Q=[20\quad 14\quad 8\quad 5]$。其價格可寫爲

$$P = \begin{bmatrix} 300 \\ 250 \\ 175 \\ 125 \end{bmatrix}$$

QP存在；因爲 $(1\times 4) = (4\times 1)$。因此

$$V = QP$$
$$= 20(300) + 14(250) + 8(175) + 5(125) = 11{,}525$$

10.18 於問題 3 之銷路 5 重新作問題 10.17 。

圖 $Q = [\,5 \;\; 12 \;\; 20 \;\; 18\,]$，$P$仍然與問題 10.17 者同，$QP$存在，故

$$V = 5(300) + 12(250) + 20(175) + 18(125) = 10{,}250$$

矩陣之乘法

10.19 已知A，B如下所示，試判別AB是否存在？並指出積矩陣之維度與求AB=?

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 20 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

圖 AB存在；因爲 $(2\times 2) = (2\times 2)$；其積矩陣之維度爲（$2\times 2$），矩陣之乘法，只不過是一系列的列 - 行向量之乘法，其中積矩陣之a_{11}元素爲，前一個矩陣之首列乘以後一矩陣之首行的元素；積矩陣中a_{12}元素則爲，前一矩陣之首列各元素乘以後一矩陣之第二行元素；故，一般而言，積矩陣中a_{ij}元素即爲前一矩陣之第i列乘以後一矩陣之第j行。因此，

$$AB = \begin{bmatrix} 12(3) + 14(0) & 12(9) + 14(2) \\ 20(3) + 5(0) & 20(9) + 5(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 136 \\ 60 & 190 \end{bmatrix}$$

10.20 已知 $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ ，重新作問題 10.19

圖 AB存在；因爲 $(2\times 2) = (2\times 3)$；其積矩陣爲（$2\times 3$）。

$$AB = \begin{bmatrix} 4(3) + 7(2) & 4(8) + 7(6) & 4(5) + 7(7) \\ 9(3) + 1(2) & 9(8) + 1(6) & 9(5) + 1(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 74 & 69 \\ 29 & 78 & 52 \end{bmatrix}$$

10.21 已知 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ ，重新作問題 10.19 。

圖 AB不存在；因爲 $(2\times 2) \neq (3\times 2)$，此二矩陣不適合乘法，因爲$A$之行數(2)不等於$B$之列數(3)。

10.22 就問題 10.21 之BA，重新作問題 10.19 。

圖 BA存在；因爲 $(3\times 2) = (2\times 2)$ ；其積矩陣之維度爲(3×2)。

$$BA=\begin{bmatrix}2 & 9\\ 4 & 6\\ 7 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 8 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(3)+9(8) & 2(1)+9(2)\\ 4(3)+6(8) & 4(1)+6(2)\\ 7(3)+5(8) & 7(1)+5(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}78 & 20\\ 60 & 16\\ 61 & 17\end{bmatrix}$$

10.23 就問題 10.21 之AB'，重新作問題 10.19 ，其中B'爲B之轉置：

$$B'=\begin{bmatrix}2 & 4 & 7\\ 9 & 6 & 5\end{bmatrix}$$

圖 AB'存在；因爲 $(2\times 2) = (2\times 3)$ ；其積爲(2×3)矩陣。

$$AB'=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 8 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4 & 7\\ 9 & 6 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3(2)+1(9) & 3(4)+1(6) & 3(7)+1(5)\\ 8(2)+2(9) & 8(4)+2(6) & 8(7)+2(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 18 & 26\\ 34 & 44 & 66\end{bmatrix}$$

(注意，從問題 10.21 - 10.23 可知$AB \neq BA \neq AB'$ 。矩陣之乘法不適合交換性之問題將在問題 10.36 - 10.41 討論。)

10.24 已知 $A=\begin{bmatrix}7 & 11\\ 2 & 9\\ 10 & 6\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}12 & 4 & 5\\ 3 & 6 & 1\end{bmatrix}$ ，重新作問題 10.19 。

圖 AB存在；因爲 $(3\times 2) = (2\times 3)$，其積爲(3×3)矩陣。

$$AB=\begin{bmatrix}7(12)+11(3) & 7(4)+11(6) & 7(5)+11(1)\\ 2(12)+9(3) & 2(4)+9(6) & 2(5)+9(1)\\ 10(12)+6(3) & 10(4)+6(6) & 10(5)+6(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}117 & 94 & 46\\ 51 & 62 & 19\\ 138 & 76 & 56\end{bmatrix}$$

10.25 已知 $A=\begin{bmatrix}6 & 2 & 5\\ 7 & 9 & 4\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}10 & 1\\ 11 & 3\\ 2 & 9\end{bmatrix}$ ，重新作問題 10.19 。

圖 AB存在；因爲 $(2\times 3) = (3\times 2)$，其積爲(2×3)矩陣

$$AB=\begin{bmatrix}6(10)+2(11)+5(2) & 6(1)+2(3)+5(9)\\ 7(10)+9(11)+4(2) & 7(1)+9(3)+4(9)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}92 & 57\\ 177 & 70\end{bmatrix}$$

10.26 已知 $A=[2\quad 3\quad 5]$ $B=\begin{bmatrix}7&1&6\\5&2&4\\9&2&7\end{bmatrix}$，重新作問題 10.19。

圖 AB存在；因爲 $(1\times 3)=(3\times 3)$，其積爲（1×3）向量。

$$AB=[2(7)+3(5)+5(9)\quad 2(1)+3(2)+5(2)\quad 2(6)+3(4)+5(7)]=[74\quad 18\quad 59]$$

10.27 已知 $A=\begin{bmatrix}5\\1\\10\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}3&9&4\\2&1&8\\5&6&1\end{bmatrix}$，重新作問題 10.19。

圖 AB不存在；因爲 $(3\times 1)\neq(3\times 3)$，此二矩陣由於階次不滿足乘法條件，故然。

10.28 求問題 10.27 之 BA。

圖 BA存在；因爲 $(3\times 3)=(3\times 1)$，其積爲（3×1）行向量。

$$BA=\begin{bmatrix}3&9&4\\2&1&8\\5&6&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\1\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3(5)+9(1)+4(10)\\2(5)+1(1)+8(10)\\5(5)+6(1)+1(10)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}64\\91\\41\end{bmatrix}$$

10.29 已知 $A=\begin{bmatrix}2&1&5\\3&2&6\\1&4&3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}10&1&2\\5&3&6\\2&1&2\end{bmatrix}$，重新作問題 10.19。

圖 AB存在；因爲 $(3\times 3)=(3\times 3)$，其積爲（3×3）矩陣。

$$AB=\begin{bmatrix}2(10)+1(5)+5(2)&2(1)+1(3)+5(1)&2(2)+1(6)+5(2)\\3(10)+2(5)+6(2)&3(1)+2(3)+6(1)&3(2)+2(6)+6(2)\\1(10)+4(5)+3(2)&1(1)+4(3)+3(1)&1(2)+4(6)+3(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}35&10&20\\52&15&30\\36&16&32\end{bmatrix}$$

10.30 已知 $A=\begin{bmatrix}3\\1\\4\\5\end{bmatrix}$ $B=[2\quad 6\quad 5\quad 3]$，重新作問題 10.19

圖 AB存在；因爲 $(4\times 1)=(1\times 4)$，其積爲（4×4）矩陣。

$$AB=\begin{bmatrix}3(2) & 3(6) & 3(5) & 3(3)\\ 1(2) & 1(6) & 1(5) & 1(3)\\ 4(2) & 4(6) & 4(5) & 4(3)\\ 5(2) & 5(6) & 5(5) & 5(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 18 & 15 & 9\\ 2 & 6 & 5 & 3\\ 8 & 24 & 20 & 12\\ 10 & 30 & 25 & 15\end{bmatrix}$$

10.31 當 $A=[3\quad 9\quad 8\quad 7]$ $\quad B=\begin{bmatrix}2\\5\\3\end{bmatrix}$，求 $AB=?$

圖 AB不存在；即A，B不適合乘法，因爲 $(1\times 4)\neq(3\times 1)$。

10.32 求問題 10.31 之 BA。

圖 BA存在；因爲 $(3\times 1)=(1\times 4)$，其積爲（3×4）矩陣。

$$BA=\begin{bmatrix}2\\5\\3\end{bmatrix}[3\quad 9\quad 8\quad 7]=\begin{bmatrix}2(3) & 2(9) & 2(8) & 2(7)\\ 5(3) & 5(9) & 5(8) & 5(7)\\ 3(3) & 3(9) & 3(8) & 3(7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 18 & 16 & 14\\ 15 & 45 & 40 & 35\\ 9 & 27 & 24 & 21\end{bmatrix}$$

10.33 利用問題 10.3 中公司之存貨矩陣與問題 10.17 中之價格向量，求該公司所有五個銷路網之存貨價值。

圖 $V=QP$。QP存在；因爲 $(5\times 4)=(4\times 1)$，V爲（5×1）矩陣。

$$V=\begin{bmatrix}10 & 15 & 9 & 12\\ 20 & 14 & 8 & 5\\ 16 & 8 & 15 & 6\\ 25 & 15 & 7 & 16\\ 5 & 12 & 20 & 18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}300\\250\\175\\125\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10(300)+15(250)+9(175)+12(125)\\ 20(300)+14(250)+8(175)+5(125)\\ 16(300)+8(250)+15(175)+6(125)\\ 25(300)+15(250)+7(175)+16(125)\\ 5(300)+12(250)+20(175)+18(125)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9{,}825\\11{,}525\\10{,}175\\14{,}475\\10{,}250\end{bmatrix}$$

矩陣運算之交換律

10.34 已知A，B兩矩陣如下所示，試說明矩陣運算之可交換與不可交換（即$A\pm B=B\pm A$，但一般而言，$AB\neq BA$），亦即求 (a) $A+B$與 (b) $B+A$。

圖

$$A=\begin{bmatrix}7 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 6\\ 2 & 5 & 4\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 5\\ 3 & 4 & 1\\ 7 & 9 & 6\end{bmatrix}$$

$$(a)\ A+B=\begin{bmatrix}7+2 & 3+0 & 2+5\\ 1+3 & 4+4 & 6+1\\ 2+7 & 5+9 & 4+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 3 & 7\\ 4 & 8 & 7\\ 9 & 14 & 10\end{bmatrix}$$

$$(b)\ B+A=\begin{bmatrix}2+7 & 0+3 & 5+2\\ 3+1 & 4+4 & 1+6\\ 7+2 & 9+5 & 6+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 3 & 7\\ 4 & 8 & 7\\ 9 & 14 & 10\end{bmatrix}$$

$A+B=B+A$，此即說明矩陣之加法符合交換律。

問題 10.35 - 10.42 將說明其它矩陣運算之交換律的運用。

10.35 已知 $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 4 & 9\\ 10 & 8\\ 6 & 12\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}3 & 13\\ 7 & 9\\ 2 & 1\\ 8 & 6\end{bmatrix}$，求 $(a)\ A-B$，$(b)\ -B+A$。

圖

$$(a)\ A-B=\begin{bmatrix}5-3 & 3-13\\ 4-7 & 9-9\\ 10-2 & 8-1\\ 6-8 & 12-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -10\\ -3 & 0\\ 8 & 7\\ -2 & 6\end{bmatrix}$$

$$(b)\ -B+A=\begin{bmatrix}-3+5 & -13+3\\ -7+4 & -9+9\\ -2+10 & -1+8\\ -8+6 & -6+12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -10\\ -3 & 0\\ 8 & 7\\ -2 & 6\end{bmatrix}$$

$A-B=-B+A$，此例爲矩陣減法之交換律。

10.36 已知 $A=[4\quad 12\quad 9\quad 6]$ $B=\begin{bmatrix}13\\ 5\\ -2\\ 7\end{bmatrix}$，求 $(a)\ AB$ 與 $(b)\ BA$。

首先檢查其可乘性，然後寫出其積矩陣之維度。

圖 $(a)\ AB$存在；因爲 $(1\times 4)=(4\times 1)$，其積爲（1×1）矩陣或純量。

$$AB=[4(13)+12(5)+9(-2)+6(7)]=136$$

$(b)\ BA$亦存在，因爲 $(4\times 1)=(1\times 4)$，其積爲（4×4）矩陣。

$$BA=\begin{bmatrix}13(4) & 13(12) & 13(9) & 13(6)\\ 5(4) & 5(12) & 5(9) & 5(6)\\ -2(4) & -2(12) & -2(9) & -2(6)\\ 7(4) & 7(12) & 7(9) & 7(6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}52 & 156 & 117 & 78\\ 20 & 60 & 45 & 30\\ -8 & -24 & -18 & -12\\ 28 & 84 & 63 & 42\end{bmatrix}$$

$AB\neq BA$，此例說明矩陣乘法不適合交換律，另外當前後兩矩陣次序對調時，一般而言，其維度與所含元素均不相同。

10.37 已知 $A=\begin{bmatrix}7 & 4\\ 6 & 2\\ 1 & 8\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}-3 & 9 & 1\\ 2 & 12 & 7\end{bmatrix}$，求 (*a*) AB 與 (*b*) BA。

圖 (*a*) AB存在；因爲 $(3\times\underline{2})$ = $(\underline{2}\times 3)$；其積爲（3×3）矩陣。

$$AB=\begin{bmatrix}7(-3)+4(2) & 7(9)+4(12) & 7(1)+4(7)\\ 6(-3)+2(2) & 6(9)+2(12) & 6(1)+2(7)\\ 1(-3)+8(2) & 1(9)+8(12) & 1(1)+8(7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-13 & 111 & 35\\ -14 & 78 & 20\\ 13 & 105 & 57\end{bmatrix}$$

(*b*) BA亦存在；因爲 $(2\times\underline{3})$ = $(\underline{3}\times 2)$；其積爲（2×2）矩陣。

$$BA=\begin{bmatrix}-3(7)+9(6)+1(1) & -3(4)+9(2)+1(8)\\ 2(7)+12(6)+7(1) & 2(4)+12(2)+7(8)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}34 & 14\\ 93 & 88\end{bmatrix}$$

$AB\neq BA$，此例說明矩陣乘法不可交換，在此其積矩陣之維度與所含元素再度顯示其不同。

10.38 已知 $A=\begin{bmatrix}4 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 2\\ 1 & 5 & 3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 5 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$，求 (*a*) AB 與 (*b*) BA。

圖 (*a*) AB存在；因爲 $(3\times\underline{3})$ = $(\underline{3}\times 3)$；其積爲（3×3）矩陣。

$$AB=\begin{bmatrix}4(1)+9(5)+8(0) & 4(2)+9(3)+8(2) & 4(0)+9(1)+8(4)\\ 7(1)+6(5)+2(0) & 7(2)+6(3)+2(2) & 7(0)+6(1)+2(4)\\ 1(1)+5(5)+3(0) & 1(2)+5(3)+3(2) & 1(0)+5(1)+3(4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}49 & 51 & 41\\ 37 & 36 & 14\\ 26 & 23 & 17\end{bmatrix}$$

(*b*) BA亦存在，且將得到一（3×3）矩陣。

$$BA=\begin{bmatrix}1(4)+2(7)+0(1) & 1(9)+2(6)+0(5) & 1(8)+2(2)+0(3)\\ 5(4)+3(7)+1(1) & 5(9)+3(6)+1(5) & 5(8)+3(2)+1(3)\\ 0(4)+2(7)+4(1) & 0(9)+2(6)+4(5) & 0(8)+2(2)+4(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18 & 21 & 12\\ 42 & 68 & 49\\ 18 & 32 & 16\end{bmatrix}$$

$AB\neq BA$。其維度相同但所含元素不同。

10.39 已知 $A=\begin{bmatrix}7 & 5 & 2 & 6\\ 1 & 3 & 9 & 4\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\\ 3\end{bmatrix}$，求 (*a*) AB 與 (*b*) BA。

圖 (*a*) AB存在；因爲 $(2\times\underline{4})$ = $(\underline{4}\times 1)$；其積爲（2×1）行向量。

$$AB=\begin{bmatrix}7(1)+5(0)+2(-1)+6(3)\\1(1)+3(0)+9(-1)+4(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23\\4\end{bmatrix}$$

(*b*) BA不存在；因爲 $(4\times1)\neq(2\times4)$，此二矩陣不適合乘法，此例以另一種方式說明矩陣之乘法不可交換。

10.40 已知 $A=\begin{bmatrix}11&14\\2&6\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}7&6\\4&5\\1&3\end{bmatrix}$，求 (*a*) AB 與 (*b*) BA。

圖 (*a*) AB不存在；因爲 $(2\times2)\neq(3\times2)$，因而不能相乘。

(*b*) BA存在；因爲 $(3\times2)=(2\times2)$，其積爲（3×2）矩陣。

$$BA=\begin{bmatrix}7(11)+6(2)&7(14)+6(6)\\4(11)+5(2)&4(14)+5(6)\\1(11)+3(2)&1(14)+3(6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}89&134\\54&86\\17&32\end{bmatrix}$$

$BA\neq AB$，因爲AB不存在。

10.41 已知 $A=\begin{bmatrix}-2\\4\\7\end{bmatrix}$ $B=[3\quad6\quad-2]$，求 (*a*) AB與 (*b*) BA。

圖 (*a*) AB存在；因爲 $(3\times1)=(1\times3)$；其積爲（3×3）矩陣。

$$AB=\begin{bmatrix}-2(3)&-2(6)&-2(-2)\\4(3)&4(6)&4(-2)\\7(3)&7(6)&7(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&-12&4\\12&24&-8\\21&42&-14\end{bmatrix}$$

(*b*) BA亦存在；因爲 $(1\times3)=(3\times1)$，其積爲（1×1）矩陣或純量。

$$BA=[3(-2)+6(4)+(-2)(7)]=4$$

因爲矩陣之乘法不可交換，此例調換其乘法運算之次序，將獲得完全不同之答案，亦即AB爲（3×3）矩陣，而BA則爲一純量。

10.42 已知 $A=\begin{bmatrix}23&6&14\\18&12&9\\24&2&6\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 求(*a*)AB,(*b*)BA,此例B爲單位矩陣。

圖 (*a*) AB存在；因爲 $(3\times3)=(3\times3)$，其積亦爲（3×3）矩陣。

$$AB=\begin{bmatrix}23(1)+6(0)+14(0) & 23(0)+6(1)+14(0) & 23(0)+6(0)+14(1)\\ 18(1)+12(0)+9(0) & 18(0)+12(1)+9(0) & 18(0)+12(0)+9(1)\\ 24(1)+2(0)+6(0) & 24(0)+2(1)+6(0) & 24(0)+2(0)+6(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23 & 6 & 14\\ 18 & 12 & 9\\ 24 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

(*b*) BA亦存在；因爲 $(3\times3)=(3\times3)$，其積亦爲（3×3）矩陣。

$$BA=\begin{bmatrix}1(23)+0(18)+0(24) & 1(6)+0(12)+0(2) & 1(14)+0(9)+0(6)\\ 0(23)+1(18)+0(24) & 0(6)+1(12)+0(2) & 0(14)+1(9)+0(6)\\ 0(23)+0(18)+1(24) & 0(6)+0(12)+1(2) & 0(14)+0(9)+1(6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23 & 6 & 14\\ 18 & 12 & 9\\ 24 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

在此，$AB=BA$，亦即任一矩陣前乘或後乘單位矩陣，其積等於此矩陣，由此可知，在單位矩陣之情形，矩陣之乘法可交換，另外，一矩陣與其反矩陣之乘法亦然，參見 11.7 節。

結合律與分配律

10.43 說明矩陣諸運算中是否符合結合律與分配律［即，$(A+B)+C=A+(B+C)$，$(AB)C=A(BC)$ 與 $A(B+C)=AB+AC$，受制於 10.7 節之條件限制］，已知A，B，C之矩陣如下所示，求(*a*)$(A+B)+C$與(*b*)$A+(B+C)$。

圖

$$A=\begin{bmatrix}6 & 2 & 7\\ 9 & 5 & 3\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}9 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 6\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}7 & 5 & 1\\ 10 & 3 & 8\end{bmatrix}$$

(*a*)
$$A+B=\begin{bmatrix}6+9 & 2+1 & 7+3\\ 9+4 & 5+2 & 3+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 3 & 10\\ 13 & 7 & 9\end{bmatrix}$$

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}15+7 & 3+5 & 10+1\\ 13+10 & 7+3 & 9+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 8 & 11\\ 23 & 10 & 17\end{bmatrix}$$

(*b*)
$$B+C=\begin{bmatrix}9+7 & 1+5 & 3+1\\ 4+10 & 2+3 & 6+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 6 & 4\\ 14 & 5 & 14\end{bmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}6+16 & 2+6 & 7+4\\ 9+14 & 5+5 & 3+14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 8 & 11\\ 23 & 10 & 17\end{bmatrix}$$

因此，$(A+B)+C=A+(B+C)$。此例說明矩陣之加法適合結合律這些定律之其它層面請參見問題 10.44 - 10.47 。

10.44 已知 $A=\begin{bmatrix}7\\ 6\\ 12\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}3\\ 8\\ 5\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}13\\ 2\\ 6\end{bmatrix}$，求(*a*)$(A-B)+C$與(*b*)$A+(-B+C)$

圖

(*a*) $$A-B=\begin{bmatrix}7-3\\ 6-8\\ 12-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -2\\ 7\end{bmatrix}$$

(*b*) $$-B+C=\begin{bmatrix}-3+13\\ -8+2\\ -5+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ -6\\ 1\end{bmatrix}$$

$$(A-B)+C=\begin{bmatrix}4+13\\-2+2\\7+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17\\0\\13\end{bmatrix}\qquad A+(-B+C)=\begin{bmatrix}7+10\\6+(-6)\\12+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17\\0\\13\end{bmatrix}$$

矩陣之減法亦具結合性。

10.45 已知 $A=[7\quad 1\quad 5]\quad B=\begin{bmatrix}6&5\\2&4\\3&8\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}9&4\\3&10\end{bmatrix}$，求 (*a*)$(AB)C$ 與 (*b*)$A(BC)$。

解 (*a*) AB存在；因爲 $(1\times 3)=(3\times 2)$，其積爲 (1×2) 矩陣。

$$AB=[7(6)+1(2)+5(3)\quad 7(5)+1(4)+5(8)]=[59\quad 79]$$

$(AB)C$ 存在；因爲 $(1\times 2)=(2\times 2)$，其積爲 (1×2) 矩陣。

$$(AB)C=[59(9)+79(3)\quad 59(4)+79(10)]=[768\quad 1026]$$

(*b*) BC存在；因爲 $(3\times 2)=(2\times 2)$，其積爲 3×2 矩陣。

$$BC=\begin{bmatrix}6(9)+5(3)&6(4)+5(10)\\2(9)+4(3)&2(4)+4(10)\\3(9)+8(3)&3(4)+8(10)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}69&74\\30&48\\51&92\end{bmatrix}$$

$A(BC)$ 亦存在；因爲 $(1\times 3)=(3\times 2)$，其積爲 1×2 矩陣。

$$A(BC)=[7(69)+1(30)+5(51)\quad 7(74)+1(48)+5(92)]=[768\quad 1026]$$

如果乘法之次階能滿足配次條件則矩陣之乘法具結合性。

10.46 已知 $A=[4\quad 7\quad 2]\qquad B=\begin{bmatrix}6\\5\\1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}9\\5\\8\end{bmatrix}$，求(*a*)$A(B+C)$與(*b*)$AB+AC$。

解 (*a*)

$$B+C=\begin{bmatrix}6+9\\5+5\\1+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\10\\9\end{bmatrix}$$

$A(B+C)$ 存在；因爲 $(1\times 3)=(3\times 1)$，其積矩陣之維度爲 (1×1)。

$$A(B+C)=[4(15)+7(10)+2(9)]=148$$

(*b*) AB存在；因爲 $(1\times 3)=(3\times 1)$，其積爲 (1×1) 矩陣。

$$AB=[4(6)+7(5)+2(1)]=61$$

AC 存在；因爲 $(1\times3)=(3\times1)$，亦爲（1×1）矩陣。

$$AC=[4(9)+7(5)+2(8)]=87$$

因此，$AB+AC=61+87=148$。此例說明矩陣之乘法的分配律。

10.47 一漢堡連鎖店每週銷售 1000 個漢堡，600 個吉士漢堡與 1200 杯雪克，其中漢堡每個 45¢，吉士漢堡每個 60¢，雪克每杯 50¢，而此店之各種商品之成本分別爲 38¢，42¢，與 32¢，試求此廠商每週之利潤？(*a*)使用總額之概念，(*b*) 使用單位分析法，以證明矩陣之乘法具分配律。

解 (*a*) 商品之出售量（Q）銷售價格（P）與成本（C）可以矩陣形式表示如下

$$Q=\begin{bmatrix}1000\\600\\1200\end{bmatrix}\qquad P=\begin{bmatrix}0.45\\0.60\\0.50\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}0.38\\0.42\\0.32\end{bmatrix}$$

總收益（TR）爲

$$\mathrm{TR}=PQ=\begin{bmatrix}0.45\\0.60\\0.50\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1000\\600\\1200\end{bmatrix}$$

取 P 或 Q 之轉置將使此二向量得以相乘，應注意的是就乘法而言，矩陣之次階（order）非常重要，列向量乘法（$P'Q$ 或 $Q'P$）運算可求得一純量；反之，向量－列之乘法運算（PQ' 或 QP'）將得一（3×3）矩陣，但此一矩陣並不具經濟意義，因此於本例中，取 P 之轉置並前乘 Q，可得

$$\mathrm{TR}=P'Q=[0.45\quad 0.60\quad 0.50]\begin{bmatrix}1000\\600\\1200\end{bmatrix}$$

其中 $P'Q$ 存在；因爲 $(1\times3)=(3\times1)$，其積爲（1×1）矩陣或純量。

$$\mathrm{TR}=[0.45(1000)+0.60(600)+0.50(1200)]=1410$$

同理，總成本（TC）爲 $\mathrm{TC}=C'Q$：

$$\mathrm{TC}=[0.38\quad 0.42\quad 0.32]\begin{bmatrix}1000\\600\\1200\end{bmatrix}=[0.38(1000)+0.42(600)+0.32(1200)]=1016$$

因此，利潤爲

$$\Pi=\mathrm{TR}-\mathrm{TC}=1410-1016=394$$

(*b*) 使用單位分析法，其單位利潤（U）爲

$$U = P - C = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.60 \\ 0.50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.38 \\ 0.42 \\ 0.32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.07 \\ 0.18 \\ 0.18 \end{bmatrix}$$

總利潤（Π）爲單位利潤乘以銷售量

$$\Pi = UQ = \begin{bmatrix} 0.07 \\ 0.18 \\ 0.18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 600 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

由於上式不存在，故我們取U之轉置，

$$\Pi = U'P = [0.07 \quad 0.18 \quad 0.18] \begin{bmatrix} 1000 \\ 600 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

$$= [0.07(1000) + 0.18(600) + 0.18(1200)] = 394 \quad \text{證畢。}$$

10.48 Crazy Teddie 公司每週出售 700 LP's，400 卷錄音帶與 200 台收音機，它們之價格分別爲 \$4，\$6 與 \$150，而此公司生產這些產品之成本分別爲 \$3.25，\$4.75 與 \$125。根據上述資料，求該公司每週之利潤，(*a*) 以總額概念，(*b*) 以單位之概念分別求之。

圖

(*a*)

$$Q = \begin{bmatrix} 700 \\ 400 \\ 200 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 150 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3.25 \\ 4.75 \\ 125.00 \end{bmatrix}$$

$$\text{TR} = P'Q = [4 \quad 6 \quad 150] \begin{bmatrix} 700 \\ 400 \\ 200 \end{bmatrix} = [4(700) + 6(400) + 150(200)] = 35{,}200$$

$$TC = C'Q = [3.25 \quad 4.75 \quad 125] \begin{bmatrix} 700 \\ 400 \\ 200 \end{bmatrix} = [3.25(700) + 4.75(400) + 125(200)] = 29{,}175$$

$$\Pi = \text{TR} - \text{TC} = 35{,}200 - 29{,}175 = 6025$$

(*b*) 單位利潤（U）爲

$$U = P - C = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 150 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.25 \\ 4.75 \\ 125.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 1.25 \\ 25.00 \end{bmatrix}$$

總利潤爲

$$\Pi = U'Q = [0.75 \quad 1.25 \quad 25] \begin{bmatrix} 700 \\ 400 \\ 200 \end{bmatrix} = [0.75(700) + 1.25(400) + 25(200)] = 6025$$

矩陣之獨特性

10.49 已知 $A=\begin{bmatrix}6 & -12\\ -3 & 6\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}12 & 6\\ 6 & 3\end{bmatrix}$

(*a*) 求 AB。(*b*) 此乘積有何特別之處？

圖 (*a*) $AB=\begin{bmatrix}6(12)-12(6) & 6(6)-12(3)\\ -3(12)+6(6) & -3(6)+6(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

(*b*) 此乘積 AB 是矩陣代數中很獨特之點，其不同於一般代數的是，在一般代數中，兩非零之數字相乘絕不可能等於 0，而本例中兩非零矩陣之乘積却爲一零矩陣，之所以如此，乃因爲此二矩陣均爲奇異的（singular），所謂奇異矩陣是指一列或行爲另一列或行之倍數（參見 11.1 節），於本題中，A 之第一列爲第二列之（−2）倍，而第二行爲第一行之（−2）倍，同時 B 之第一列爲第二列之 2 倍，而第一行爲第二行之 2 倍。由此可知，於矩陣代數中，包含奇異矩陣之乘法運算可能，但並不一定，產生一零矩陣，參見問題 10.50。

10.50 已知 $A=\begin{bmatrix}6 & 12\\ 3 & 6\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}12 & 6\\ 6 & 3\end{bmatrix}$，(*a*) 求 AB，(*b*) 評論此解。

圖 (*a*) $AB=\begin{bmatrix}6(12)+12(6) & 6(6)+12(3)\\ 3(12)+6(6) & 3(6)+6(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}144 & 72\\ 72 & 36\end{bmatrix}$

(*b*) 雖然 A 與 B 均爲奇異矩陣，但它們之乘積並非零矩陣，惟其乘積 AB 仍爲奇異矩陣。

10.51 已知 $A=\begin{bmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$

(*a*) 求 AB 與 AC，(*b*) 評論此解之不尋常特性。

圖 (*a*)

$$AB=\begin{bmatrix}4(2)+8(2) & 4(1)+8(2)\\ 1(2)+2(2) & 1(1)+2(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24 & 20\\ 6 & 5\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}4(-2)+8(4) & 4(1)+8(2)\\ 1(-2)+2(4) & 1(1)+2(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24 & 20\\ 6 & 5\end{bmatrix}$$

(*b*) 即使 $B\neq C$，$AB=AC$，不同於普通代數之乘法，即一數乘以不同兩數其結果不會相同，但是在矩陣代數乘法中，一矩陣分別乘以兩個不同之矩陣，其積却可能，但不一定，得到相同之積矩陣，於此例中，A 爲一奇異矩陣。

求解矩陣方程式之高斯方法

10.52 將下列線性方程組以 (*a*) 矩陣形式，(*b*) 擴張矩陣表示之，其中令 $A=$ 係數

矩陣，X = 變數之行向量且 B = 參數之行向量。

圖

$$7x_1 + 8x_2 = 120$$
$$6x_1 + 9x_2 = 98$$

(a)
$$AX = B$$
$$\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 98 \end{bmatrix}$$

(b)
$$A \mid B = \left[\begin{array}{cc|c} 7 & 8 & 120 \\ 6 & 9 & 98 \end{array}\right]$$

10.53 已知

$$4x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 149$$
$$2x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 204$$
$$5x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 168$$

重新作問題 10.52 。

圖

(a)
$$AX = B$$
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 2 & 8 & 7 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 149 \\ 204 \\ 168 \end{bmatrix}$$

(b)
$$A \mid B = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 9 & 149 \\ 2 & 8 & 7 & 204 \\ 5 & 6 & 3 & 168 \end{array}\right]$$

10.54 使用高斯消去法求解下列線性方程組：

$$3x_1 + 6x_2 = 60$$
$$5x_1 + 4x_2 = 52$$

圖 首先，將此方程組以擴張矩陣表示之，

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 60 \\ 5 & 4 & 52 \end{array}\right]$$

然後，應用列運算將左方之係數矩陣轉換爲單位矩陣，最簡單之方法是先求得主對角線之第 1 個元素爲 1 ，並使該行之元素全部爲 0 ，然後，再利用列運算求得主對角線之第 2 個元素爲 1 並使得該行之其它元素爲 0 ，…等等，例示如下：

1*a*. 第一列乘以 $\frac{1}{3}$ ：

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 20 \\ 5 & 4 & 52 \end{array}\right]$$

1*b*. 第二列減 5 乘以第一列：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 20 \\ 0 & -6 & | & -48 \end{bmatrix}$$

2a. 第二列乘以 $-\frac{1}{6}$：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 20 \\ 0 & 1 & | & 8 \end{bmatrix}$$

2b. 最後，第一列減 2 倍之第二列：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & | & 8 \end{bmatrix}$$

因此，$x_1 = 4$ 與 $x_2 = 8$，因爲

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

10.55 已知

$$2x_1 + 8x_2 = 34$$
$$4x_1 + 12x_2 = 56$$

重新作問題 10.54 。

圖 擴張矩陣爲

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & | & 34 \\ 4 & 12 & | & 56 \end{bmatrix}$$

1a. 第一列乘以 $\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & | & 17 \\ 4 & 12 & | & 56 \end{bmatrix}$$

1b. 第二列減 4 倍之第一列：

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & | & 17 \\ 0 & -4 & | & -12 \end{bmatrix}$$

2a. 第二列乘以 $-\frac{1}{4}$：

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & | & 17 \\ 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

2b. 第一列減 4 倍之第一列：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

因此，$x_1 = 5$ 與 $x_2 = 3$ 。

10.56 已知

$$4x_1 + 10x_2 = 30$$
$$6x_1 + 25x_2 = 67$$

重新作問題 10.54 。

圖 擴張矩陣爲

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 & | & 30 \\ 6 & 25 & | & 67 \end{bmatrix}$$

1a. 第一列乘以 $\frac{1}{4}$：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2.5 & | & 7.5 \\ 6 & 25 & | & 67 \end{bmatrix}$$

1b. 第二列減 6 倍之第一列：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2.5 & | & 7.5 \\ 0 & 10 & | & 22 \end{bmatrix}$$

2a. 第二列乘以 $\frac{1}{10}$：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2.5 & 7.5 \\ 0 & 1 & 2.2 \end{bmatrix}$$

2b. 第一列減 2.5 倍之第二列：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2.2 \end{bmatrix}$$

因此，$x_1 = 2$ 與 $x_2 = 2.2$ 。

10.57 已知

$$3x_1 + 7x_2 = 67$$
$$2x_1 + 9x_2 = 75$$

重新作問題 10.54 。

圖 擴張矩陣爲

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 67 \\ 2 & 9 & 75 \end{bmatrix}$$

1a. 第一列乘以 $\frac{1}{3}$：

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{67}{3} \\ 2 & 9 & 75 \end{bmatrix}$$

1b. 第二列減 2 倍之第一列：

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{67}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{91}{3} \end{bmatrix}$$

2a. 第二列乘以 $\frac{3}{13}$：

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{67}{3} \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

2b. 第一列減 $\frac{7}{3}$ 倍之第二列：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

因此，$x_1 = 6$ 與 $x_2 = 7$ 。

10.58 利用高斯消去法求解下列線性方程組，

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 24$$
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 23$$
$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33$$

圖 擴張矩陣爲

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 & 24 \\ 2 & 4 & 3 & 23 \\ 5 & 3 & 4 & 33 \end{bmatrix}$$

1a. 第一列乘以 $\frac{1}{3}$ ：

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 23 \\ 5 & 3 & 4 & 33 \end{bmatrix}$$

1b. 第二列減 2 倍之第一列與第三列減 5 倍之第一列：

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 2 & 8 \\ 0 & \frac{8}{3} & -1 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

2a. 第二列乘以 $\frac{3}{8}$ ：

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{21}{8} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

2*b*. 第一列減 $\frac{2}{3}$ 倍之第二列並將 $\frac{1}{3}$ 倍之第二列加至第三列：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{25}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{21}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{49}{8} & -\frac{49}{8} \end{bmatrix}$$

3*a*. 第三列乘以 $-\frac{8}{49}$：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{25}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{21}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3*b*. 第一列減 $\frac{9}{4}$ 倍之第三列且將 $\frac{3}{8}$ 倍之第三列加至第二列：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，$x_1 = 4$，$x_2 = 3$ 與 $x_3 = 1$。

10.59 已知

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 73 \\ 7x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ 4x_1 + 8x_2 - 9x_3 &= -9 \end{aligned}$$

重新作問題 10.58。

解 擴張矩陣爲

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 & 73 \\ 7 & -3 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & -9 & -9 \end{bmatrix}$$

1*a*. 第一列乘以 $\frac{1}{6}$：

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{73}{6} \\ 7 & -3 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & -9 & -9 \end{bmatrix}$$

1*b*. 第二列減 7 倍之第一列且第三列減 4 倍之第一列：

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{73}{6} \\ 0 & -\frac{16}{3} & -\frac{29}{6} & -\frac{517}{6} \\ 0 & \frac{20}{3} & -\frac{74}{6} & -\frac{173}{3} \end{bmatrix}$$

2*a*. 第二列乘以 $-\frac{3}{16}$：

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{23}{6} \\ 0 & 1 & \frac{29}{12} & \frac{517}{12} \\ 0 & \frac{20}{3} & -\frac{74}{6} & -\frac{173}{3} \end{bmatrix}$$

2*b*. 第一列減 $\frac{1}{3}$ 倍之第二列且第三列減 $\frac{20}{3}$ 倍之第二列：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{31}{96} & \frac{651}{96} \\ 0 & 1 & \frac{29}{12} & \frac{517}{12} \\ 0 & 0 & -\frac{441}{24} & -\frac{3969}{24} \end{bmatrix}$$

3*a*. 第三列乘以 $-\frac{24}{441}$ ：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{31}{96} & \frac{651}{96} \\ 0 & 1 & \frac{29}{12} & \frac{517}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

3*b*. 第一列減 $\frac{31}{96}$ 倍之第三列且第二列減 $\frac{29}{12}$ 倍之第三列：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

因此，$x_1 = 2$，$x_2 = 8$ 與 $x_3 = 9$。

第十一章

反 矩 陣

11·1 行列式與非奇異性

一（2×2）矩陣之行列式（determinant）$|A|$ 稱爲二階行列式，其值爲矩陣中主對角線之兩元素乘積減非主對角線另兩元素之乘積，因此，就所予之一般化（2×2）矩陣而言，

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

其行列式，$|A|=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$。

行列式值爲一單一數或純量，並且只當矩陣爲方陣時才能求其行列式，如果一矩陣之行列式值爲非零，則此矩陣爲非奇異（nonsingular）亦即，非線性相依，反之若 $|A|=0$ 則 A 爲奇異矩陣（singular matrix），其中 A 至少有一列或行爲另一列或行之倍數。

例題 11.1

行列式之計算例示如下：已知

$$A=\begin{bmatrix}6 & 4\\ 7 & 9\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{bmatrix}$$

由上述之法則知，

$$|A|=6(9)-7(4)=26$$

因 $|A|\neq 0$，此矩陣爲非奇異，即線性獨立，另一方面

$$|B|=4(9)-6(6)=0$$

因 $|B|=0$，B 爲奇異或線性相依，較常用之檢查方法是第二列與第二行分別爲第一列與第一行之 1.5 倍。

11·2 高階行列式

（3×3）三階矩陣

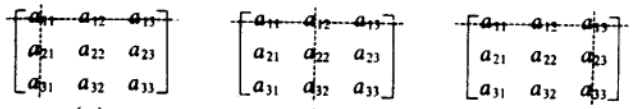
$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$ 之行列式。

稱爲三階行列式，其值是由三種乘積之加總而得，故首先應求取此三種乘積，

(1) 取第一列之第一個元素，a_{11}，並消去 a_{11} 所在之列與行之其它元素，參見下述 (a)，然後，以 a_{11} 乘以其餘元素之二階行列式。

(2) 取第一列之第二個元素，a_{12}，並消去 a_{12} 所在列與行之其它元素，參見下述 (b)，然後以 a_{12} 乘以 (−1) 並乘以其餘元素之二階行列式。

(3) 取第一列之第三個元素，a_{13}，並消去 a_{13} 所在列與行之其它元素，參見下述 (c)，然後以 a_{13} 乘以其餘元素之二階行列式。



(a) (b) (c)

根據上述原則，行列式之計算例示如下：

$$|A|=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}(-1)\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} \qquad (11.1)$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})=\text{一純量}$$

例題 11.2

已知

$$A=\begin{bmatrix}8 & 3 & 2\\ 6 & 4 & 7\\ 5 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

行列式 $|A|$ 之計算如下：

$$|A|=8\begin{vmatrix}4 & 7\\ 1 & 3\end{vmatrix}+3(-1)\begin{vmatrix}6 & 7\\ 5 & 3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}6 & 4\\ 5 & 1\end{vmatrix}$$

$$=8[4(3)-1(7)]-3[6(3)-5(7)]+2[6(1)-5(4)]$$

$$=8(5)-3(-17)+2(-14)=63$$

因 $|A|\neq 0$，故 A 爲非奇異。

11·3 子行列式與餘因式

於 11.2 節所述中，消去某一元素後所餘留元素所構成之次行列式 (subdeterminant) 稱爲子行列式 (minor)，因此，一子行列式 $|M_{ij}|$ 爲由刪去矩陣第 i 列

與第 j 行後所剩下之子矩陣之行列式，採 11.2 節所述之矩陣，其諸子行列式如下：

$$|M_{11}|=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \qquad |M_{12}|=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} \qquad |M_{13}|=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

其中 $|M_{11}|$ 爲 a_{11} 之子行列式；$|M_{12}|$ 爲 a_{12} 之子行列式；$|M_{13}|$ 爲 a_{13} 之子行列式，因而，(11.1)式之行列式可寫爲：

$$|A|=a_{11}|M_{11}|-a_{12}|M_{12}|+a_{13}|M_{13}| \tag{11.2}$$

一子行列式附加上預定之代數符號者稱爲餘因式(cofactor) $|C_{ij}|$，符號之規則如下：

$$|C_{ij}|=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

亦即，若二下標 i 與 j 之和爲偶數，則 $|C_{ij}|=|M_{ij}|$，此乃因爲 (-1) 之偶數次方爲正，反之，如果 $i+j$ 等於奇數，則 $|C_{ij}|=-|M_{ij}|$，此乃因爲 (-1) 之奇數次方爲負。

例題 11.3

11.2 節之矩陣其諸餘因式(1) $|C_{11}|$，(2) $|C_{12}|$ 與(3) $|C_{13}|$，如下：

(1) $$|C_{11}|=(-1)^{1+1}|M_{11}|$$

因 $(-1)^{1+1}=(-1)^2=1$,

$$|C_{11}|=|M_{11}|=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

(2) $$|C_{12}|=(-1)^{1+2}|M_{12}|$$

因 $(-1)^{1+2}=(-1)^3=-1$,

$$|C_{12}|=-|M_{12}|=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$$

(3) $$|C_{13}|=(-1)^{1+3}|M_{13}|$$

因 $(-1)^{1+3}=(-1)^4=1$,

$$|C_{13}|=|M_{13}|=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

11.4 拉普拉斯展開式

拉普拉斯展開式(Laplace expansion)是一種以餘因式計算行列式值之方法，主要優點是可以將高階行列式予以化簡爲低階行列式來計算行列式值。一個三階行列式之拉普拉斯展開式如下：

$$|A|=a_{11}|C_{11}|+a_{12}|C_{12}|+a_{13}|C_{13}| \tag{11.3}$$

式中 $|C_{ij}|$ 爲二階行列式之餘因式，在此，不像(11.1)與(11.2)式一樣，a_{11} 並

沒有乘（－1），此乃因爲根據餘因式之規則，$|C_{12}|$ 已含有（－1）。

拉普拉斯展開式亦可沿著任一列或行來計算行列式之值，因此，選擇含 0 元素較多之行或列予以展開，將可簡化計算過程。

例題11.4

已知

$$A=\begin{bmatrix}12 & 7 & 0\\ 5 & 8 & 3\\ 6 & 7 & 0\end{bmatrix}$$

我們以第三行作拉普拉斯展開式計算行列式值，例示如下：

$$|A|=a_{13}|C_{13}|+a_{23}|C_{23}|+a_{33}|C_{33}|$$

因 a_{13} 與 $a_{33}=0$，

$$|A|=a_{23}|C_{23}| \tag{11.4}$$

刪去第二列與第三行以求 $|C_{23}|$，

$$\begin{aligned}|C_{23}|&=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}12 & 7\\ 6 & 7\end{vmatrix}\\ &=(-1)[12(7)-6(7)]=-42\end{aligned}$$

然後，代入（11.4）式，其中 $a_{23}=3$，$|A|=3(-42)=-126$。

我們可以第一列作拉普拉斯展開式，求解 $|A|$ 來檢查此答案是否正確。

例題11.5

關於 4 階行列式之拉普拉斯展開式爲

$$|A|=a_{11}|C_{11}|+a_{12}|C_{12}|+a_{13}|C_{13}|+a_{14}|C_{14}|$$

其中三階次行列式之餘因式，可以再度以降爲二階行列式（如前面所述者）來處理，同理，5 階或更高階行列式均可以同樣之方式處理之，參見問題 11.30(*d*) - (*f*)。

11-5 行列式之特性

下列七個有關行列式之特性提供我們在計算行列式值前先將一矩陣所含之元素予以簡化，或將它們之其中一部分化爲零以方便處理。

(1) 將任一列（或行）乘以一個倍數加上或減去其它列（或行）其行列式值不變。

(2) 二列或二行互換，行列式的值變號，而絕對值不變。

(3) 任一列或任一行乘以一常數，行列式的值變爲原來之行列式值乘上此常數。

(4) 一三角矩陣（triangular matrix），即，一矩陣中主對角線以上或以下之每一

元素均爲 0 者，其行列式值爲主對角線上各元素之乘積。

(5) 一矩陣之行列式與其轉置矩陣之行列式值相等。

(6) 如果矩陣中有任一列或任一行之元素全爲 0 ，則此矩陣之行列式值爲 0 。

(7) 如果任二列或行完全相同或成比例關係，即，線性相依，其行列式值爲 0 。這些特性與用途在矩陣之處理應用，可參見問題 11.3-11.21 。

11.6 餘因式與伴隨矩陣

餘因式矩陣是指矩陣中每一元素 a_{ij} 均爲其餘因式 $|C_{ij}|$ ，而伴隨矩陣（adjoint matrix）則指餘因式矩陣之轉置矩陣，亦即，

$$C=\begin{bmatrix}|C_{11}| & |C_{12}| & |C_{13}|\\ |C_{21}| & |C_{22}| & |C_{23}|\\ |C_{31}| & |C_{32}| & |C_{33}|\end{bmatrix} \qquad \text{Adj } A=C'=\begin{bmatrix}|C_{11}| & |C_{21}| & |C_{31}|\\ |C_{12}| & |C_{22}| & |C_{32}|\\ |C_{13}| & |C_{23}| & |C_{33}|\end{bmatrix}$$

例題 11.6

已知矩陣 A 如下所示，其餘因式矩陣 C 與伴隨矩陣 adj A 例示如下：

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 2\\ 5 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

根據餘因式定律以其餘因式 $|C_{ij}|$ 取代諸元素 a_{ij} ，

$$C=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -6 & 7\\ -9 & 3 & 9\\ 5 & 0 & -10\end{bmatrix}$$

則伴隨矩陣爲 C 之轉置，即

$$\text{Adj } A=C'=\begin{bmatrix}-2 & -9 & 5\\ -6 & 3 & 0\\ 7 & 9 & -10\end{bmatrix}$$

11.7 反矩陣

反矩陣（inverse matrix）A^{-1} ，只當 A 爲方陣且爲非奇異的才成立，此矩陣必須滿足下列關係式，

$$AA^{-1}=I=A^{-1}A$$

亦即，一矩陣乘以其反矩陣等於單位矩陣，因此，線性代數中之反矩陣的作用就如同普通代數中倒數之功能，反矩陣之公式爲

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{Adj} A$$

例題 11.7

求

$$A=\begin{bmatrix}4 & 1 & -5\\ -2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

之反矩陣。

(1) 首先檢查是否爲方陣？在此爲 3×3 方陣，因爲只有方陣才存在反矩陣。

(2) 計算此行列式值以確信是否 $|A|\neq 0$，因爲只有非奇異矩陣才存在反矩陣，

$$\begin{aligned}|A| &= 4[3(4)-(-1)(1)]-1[(-2)(4)-3(1)]+(-5)[(-2)(-1)-3(3)]\\ &= 52+11+35=98\neq 0\end{aligned}$$

(3) 求 A 之餘因式矩陣

$$C=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & -5\\ 3 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & -5\\ 3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & -5\\ -2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & 11 & -7\\ 1 & 31 & 7\\ 16 & 6 & 14\end{bmatrix}$$

然後求餘因式矩陣之轉置可得伴隨矩陣，

$$\operatorname{Adj} A=C^{t}=\begin{bmatrix}13 & 1 & 16\\ 11 & 31 & 6\\ -7 & 7 & 14\end{bmatrix}$$

(4) 將伴隨矩陣乘以 $1/|A|=\frac{1}{98}$，可得 A^{-1}，

$$A^{-1}=\frac{1}{98}\begin{bmatrix}13 & 1 & 16\\ 11 & 31 & 6\\ -7 & 7 & 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{13}{98} & \frac{1}{98} & \frac{16}{98}\\ \frac{11}{98} & \frac{31}{98} & \frac{6}{98}\\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7}\end{bmatrix}$$

(5) 檢查 AA^{-1} 或 $A^{-1}A$，如果兩者均等於 I，則此答案正確，請參見問題 11.31(*a*)。

11·8 以反矩陣求解矩陣方程式

反矩陣可用來求解矩陣方程式，如果

$$A_{(n\times n)}X_{(n\times 1)} = B_{(n\times 1)}$$

且反矩陣 A^{-1} 存在，兩邊乘以 A^{-1}，根據乘法之配次法則，可得

$$A^{-1}_{(n\times n)}A_{(n\times n)}X_{(n\times 1)} = A^{-1}_{(n\times n)}B_{(n\times 1)}$$

由 11.7 節知，$A^{-1}A = I$，因此，

$$I_{(n\times n)}X_{(n\times 1)} = A^{-1}_{(n\times n)}B_{(n\times 1)}$$

再由 10.8 節知，$IX = X$，因此，

$$X_{(n\times 1)} = (A^{-1}B)_{(n\times 1)}$$

此方程式之解爲係數矩陣 A 之反矩陣與常數行向量之乘積。

例題 11.8

使用矩陣方程式與反矩陣求解 x_1，x_2 與 x_3，例示如下：已知

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - 5x_3 &= 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 12 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

首先，以矩陣形式表示此方程組，

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

由 11.8 節知，

$$X = A^{-1}B$$

因爲 A^{-1} 已於例 7 中求得，故

$$X = \begin{bmatrix} \frac{13}{98} & \frac{1}{98} & \frac{16}{98} \\ \frac{11}{98} & \frac{31}{98} & \frac{6}{98} \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{104}{98} + \frac{12}{98} + \frac{80}{98} \\ \frac{88}{98} + \frac{372}{98} + \frac{30}{98} \\ -\frac{8}{14} + \frac{12}{14} + \frac{5}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{196}{98} \\ \frac{490}{98} \\ \frac{14}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此，$x_1 = 2$，$x_2 = 5$ 與 $x_3 = 1$。

11.9 矩陣求解之克萊莫法則

克萊莫法則（Cramer's rule）提供一種利用行列式來求解線性方程組之一簡便方法，此法則公式爲

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

其中 x_i 爲方程組中第 i 個未知數，$|A|$ 爲係數矩陣之行列式，而 $|A_i|$ 爲以常數之行向量取代原先矩陣中 x_i 所表之行的各元素的特殊行列式，參見例 9 ，另外有關克萊莫法則之證明請參見問題 11.44 。

例題 11.9

以克萊莫法則求解下列之方程組

$$6x_1 + 5x_2 = 49$$
$$3x_1 + 4x_2 = 32$$

(1) 首先以矩陣形式表示之，

$$AX = B$$
$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 \\ 32 \end{bmatrix}$$

(2) 求 A 之行列式，

$$|A| = 6(4) - 3(5) = 9$$

(3) 然後解 x_1 ，即，以常數向量 B 取代 A 之第 1 行，可得一新的矩陣 A_1 ，

$$A_1 = \begin{bmatrix} 49 & 5 \\ 32 & 4 \end{bmatrix}$$

求 A_1 之行列式值，

$$|A_1| = 49(4) - 32(5) = 36$$

使用克萊莫法則之公式，即

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{36}{9} = 4$$

(4) 其次再解 x_2 ；以常數行向量乃取代原矩陣之第 2 行可得另一新的矩陣 A_2

$$A_2 = \begin{bmatrix} 6 & 49 \\ 3 & 32 \end{bmatrix}$$

取其行列式，

$$|A_2| = 6(32) - 3(49) = 45$$

並使用公式

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{45}{9} = 5$$

關於三條線性方程式之求解，參見問題 11.41 (b) - (e) 。

11·10 以高斯方法求反矩陣

高斯方法亦可用來求反矩陣，首先簡單地建立一擴張矩陣，其中右方爲單位矩陣，然後應用列運算，一直進行至使得左邊之係數矩陣變爲單位矩陣爲止，此時，右邊之矩陣即爲反矩陣。

此種方法之理論基礎可由下列數學步驟觀察得之，首先由擴張矩陣，$A|I$開始，兩邊乘以反矩陣A^{-1}，即$AA^{-1}|IA^{-1}$，由11.7與10.8節知，此式可化簡爲$I|A^{-1}$，其中單位矩陣已變爲左邊之位置，而右邊即爲反矩陣。

例題11.10

使用高斯消去法求反矩陣，例示如下，已知，

$$A=\begin{bmatrix}4 & 1 & -5\\ -2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

將單位矩陣置於原矩陣右邊，形成一擴張矩陣，如下所示：

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}4 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

然後，應用列運算將左方之係數矩陣轉換爲單位矩陣——如10.12節所示者，

1a. 第1列乘以$\frac{1}{4}$，

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0\\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

1b. 將2倍之第一列加至第二列，並以第三列減3倍之第一列，

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{31}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 1\end{array}\right]$$

2a. 第二列乘以$\frac{2}{7}$，

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0\\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{31}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 1\end{array}\right]$$

2b. 第一列減$\frac{1}{4}$倍之第二列，並將$\frac{7}{4}$倍之第二列加至第三列，

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -\frac{8}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0\\ 0 & 0 & 7 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{array}\right]$$

3*a*. 第一列乘以 $\frac{1}{7}$，

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{array}\right]$$

3*b*. 將 $\frac{6}{7}$ 倍之第三列加至第一列，並將 $\frac{3}{7}$ 倍第三列加至第二列：

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{98} & \frac{1}{98} & \frac{8}{49} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{98} & \frac{31}{98} & \frac{3}{49} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{array}\right]$$

因此，

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{98} & \frac{1}{98} & \frac{8}{49} \\ \frac{11}{98} & \frac{31}{98} & \frac{3}{49} \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

與例 7 使用伴隨矩陣法所求相同。

習題與解答

行列式

11.1 求下列各矩陣之行列式 $|A|$。

圖 (*a*) $A = \begin{bmatrix} 9 & 13 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$

$|A| = 9(18) - 15(13) = -33$

(*b*) $A = \begin{bmatrix} 40 & -10 \\ 25 & -5 \end{bmatrix}$

$|A| = 40(-5) - 25(-10) = 50$

(*c*) $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 5 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$

其行列式不存在，因爲 A 爲（3×2）矩陣，而惟有方陣才有行列式值。

11.2 就下列諸矩陣，重新作問題 11.1，注意利用零元素的存在，以簡化計算過程。

圖 (*a*) $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \\ 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} |A| &= 3\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \\ &= 3[1(1) - 9(8)] - 6[2(1) - 7(8)] + 5[2(9) - 7(1)] \\ &= 3(-71) - 6(-54) + 5(11) = 166 \end{aligned}$$

(*b*) $A=\begin{bmatrix}12 & 0 & 3\\ 9 & 2 & 5\\ 4 & 6 & 1\end{bmatrix}$

$$|A|=12\begin{vmatrix}2 & 5\\ 6 & 1\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}9 & 5\\ 4 & 1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}9 & 2\\ 4 & 6\end{vmatrix}$$
$$=12(2-30)-0+3(54-8)=-198$$

(*c*) $A=\begin{bmatrix}0 & 6 & 0\\ 3 & 5 & 2\\ 7 & 6 & 9\end{bmatrix}$

$$|A|=0\begin{vmatrix}5 & 2\\ 6 & 9\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}3 & 2\\ 7 & 9\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}3 & 5\\ 7 & 6\end{vmatrix}$$
$$=0-6(27-14)+0=-78$$

行列式之特性

11.3 已知 $A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 1\\ 3 & 2 & 4\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$

比較 (*a*) *A*之行列式與 (*b*) *A* 之轉置之行列式，(*c*) 上述之比較，說明行列式具有何種特性。

圖 (*a*) $|A|=2(4-16)-5(6-4)+1(12-2)=-24$

(*b*) $A'=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 5 & 2 & 4\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$

$$|A'|=2(4-16)-3(10-4)+1(20-2)=-24$$

(*c*) 此例說明一矩陣之行列式值等於此矩陣之轉置的行列式值，參見 11.5 節。

11.4 比較 (*a*) *A*之行列式值與 (*b*) *A'* 之行列式值，已知

圖 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$

(*a*) $|A|=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ (*b*) $A'=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}$ $|A'|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

11.5 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 5 & 4\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}$

(*a*) 求 *A*之行列式值，(*b*) 將 *A* 之第一列與第二列互調而形成一新的矩陣 *B*，求 *B* 之行列式值，(*c*) 比較此兩個行列式之值，並據以說明行列式有何種

特性。

圖 (a) $|A| = 1(10-12) - 4(6-8) + 2(9-10) = 4$

(b) $$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|B| = 3(8-6) - 5(2-4) + 4(3-8) = -4$$

(c) $|B| = -|A|$，即將任二列或行互調，行列式之值變號，但其絕對值不變。

11.6 (a) 於問題 11.5 中，將第一行與第三行互調，因而形成一新的矩陣 C，(b) 求 C 之行列式值。

圖 (a) $$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) $$|C| = 2(10-9) - 4(8-6) + 1(12-10) = -4$$

11.7 已知 $$W = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

(a) 求 W 之行列式值，(b) 將 W 之第一列與第二列互調，形成一新的矩陣 Y，再比較 Y 與 W 之行列式值。

圖 (a) $$|W| = wz - yx$$

(b) $$Y = \begin{bmatrix} y & z \\ w & x \end{bmatrix} \qquad |Y| = yx - wz = -(wz - yx)$$

11.8 已知 $$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) 求 A 之行列式值，(b) A 之首列乘以 2 而形成一新的矩陣 B，並求 B 之行列式值，(c) 比較此二個行列式值，並據以說明行列式有何種特性。

圖 (a) $$|A| = 3(3-8) - 5(6-16) + 7(4-4) = 35$$

(b) $$B = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad |B| = 6(3-8) - 10(6-16) + 14(4-4) = 70$$

(c) $|B| = 2|A|$，即一矩陣中某列或行乘以一純量（k），將使行列式值放大 k 倍，在此，第一列放大 2 倍，故其行列式值增加 2 倍。

11.9 已知

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 8\\ 3 & 10 & 1\\ 1 & 15 & 4\end{bmatrix}$$

(*a*) 求 $|A|$，(*b*) A 之第二列乘以 $\frac{1}{5}$ 而形成新的矩陣 B，求 $|B|$，(*c*) 比較此二行列式值。

圖 (*a*) $|A|=2(40-15)-5(12-1)+8(45-10)=275$

(*b*) 記得，某列（行）乘以 $\frac{1}{5}$ 即表示除以 5 或該列（行）析出 5 之因數。

$$B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 8\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix} \qquad |B|=2(8-3)-1(12-1)+8(9-2)=55$$

(*c*) $|B|=\frac{1}{5}|A|$

11.10 已知 $$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}a_{11} & ka_{12}\\ a_{21} & ka_{22}\end{bmatrix}$$

比較 (*a*) A 之行列式值，(*b*) B 之行列式值。

圖 (*a*) $|A|=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$

(*b*) $$\begin{aligned}|B| &= a_{11}ka_{22}-a_{21}ka_{12}=k(a_{11}a_{22})-k(a_{21}a_{12})\\ &= k(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})=k|A|\end{aligned}$$

11.11 已知 $$A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 5\\ 4 & 1 & 6\end{bmatrix}$$

(*a*) 求 $|A|$，(*b*) 第一行減 5 倍之第二行，因而形成新的矩陣 B，求 $|B|$，(*c*) 比較此二行列式值，並據以說明行列式有何種特性。

圖 (*a*) $|A|=5(12-5)-1(18-20)+4(3-8)=17$

(*b*) $$B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 4\\ -7 & 2 & 5\\ -1 & 1 & 6\end{bmatrix} \qquad |B|=0-1(-42+5)+4(-7+2)=17$$

(*c*) $|B|=|A|$，即將任一列或行之某一非零之倍數加至或減去某一列或行，其行列式值不變。

11.12 (*a*) 於問題 11.11 中，A 之第一列減第三列，以形成新的矩陣 C，(*b*) 求 $|C|$。

圖 (*a*) $$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 2 & 5\\ 4 & 1 & 6\end{bmatrix}$$

(*b*) $|C|=1(12-5)-0+(-2)(3-8)=17$

11.13 已知一上三角矩陣

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 2 & -5 & 0\\ 6 & & 4\end{bmatrix}$$

其中主對角線以上之元素均爲零，(*a*) 求 $|A|$，(*b*) 求主對角線三個元素之乘積，(*c*) 此例說明行列式有何種特性。

圖 (*a*) $|A|=-3(-20-0)-0+0=60$

(*b*) 其主對角線三元素之乘積爲 $(-3)(-5)(4)=60$。

(*c*) 上三角矩陣之行列式值等於其主對角線上各元素之乘積。

11.14 已知一下三角矩陣

$$A=\begin{bmatrix}2 & -5 & -1\\ 0 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

其中主對角線以下之元素均爲 0，(*a*) 求 $|A|$ 與 (*b*) 主對角線上三元素之乘積。

圖 (*a*) $|A|=2(-21-0)-(-5)(0-0)-1(0-0)=-42$

(*b*) $2(3)(-7)=-42$

11.15 已知

$$A=\begin{bmatrix}12 & 16 & 13\\ 0 & 0 & 0\\ -15 & 20 & 9\end{bmatrix}$$

(*a*) 求 $|A|$，(*b*) 本例說明了行列式具有何種特性？

圖 (*a*) $|A|=12(0-0)-16(0-0)+13(0-0)=0$

(*b*) 任一列或行之全部元素均爲 0，則行列式值將等於 0，在本例中，A 之第二列的元素全部爲 0，故事實上 A 爲一 (2×3) 矩陣而非 (3×3) 矩陣，並且由前面敍述可知，惟有方陣才具有行列式值。

計算行列式值前之矩陣的化簡

11.16 使用問題 11.3 - 11.15 已知之資料，簡化下列諸矩陣，再求其行列式值，首先提出各列或行之共同因素，然後在計算行列式值時再予補回去。

圖 (*a*)

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 7 & 6\\ 24 & -60 & 36\\ 3 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

第二列可提出 12 之因數，因此

$$|A|=12\begin{vmatrix}-4 & 7 & 6\\ 2 & -5 & 3\\ 3 & -1 & 5\end{vmatrix}$$

$$=12[-4(-25+3)-7(10-9)+6(-2+15)]=12(159)=1908$$

(*b*)
$$A=\begin{bmatrix}10 & 52 & 7\\ 12 & 78 & 5\\ 4 & 65 & 11\end{bmatrix}$$

由第二行提出 13 之因數，

$$|A|=13\begin{vmatrix}10 & 4 & 7\\ 12 & 6 & 5\\ 4 & 5 & 11\end{vmatrix}$$

由第一行提出因子 2 ，

$$|A|=13(2)\begin{vmatrix}5 & 4 & 7\\ 6 & 6 & 5\\ 2 & 5 & 11\end{vmatrix}$$

$$=26[5(66-25)-4(66-10)+7(30-12)]=26(107)=2782$$

(*c*)
$$A=\begin{bmatrix}24 & 16 & 20\\ 18 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 15\end{bmatrix}$$

第一列可提出因子 4

$$|A|=4\begin{vmatrix}6 & 4 & 5\\ 18 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 15\end{vmatrix}$$

第一行與第三行分別可提出因子 6 與 5 ，

$$|A|=4(6)(5)\begin{vmatrix}1 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ 1 & 7 & 3\end{vmatrix}$$

$$=120[1(12-7)-4(9-1)+1(21-4)]=120(-10)=-1200$$

11.17 利用加或減某列或行之倍數以化簡下列矩陣，再求其行列式值，

圖 (*a*)
$$A=\begin{bmatrix}3 & 3 & 6\\ 4 & 2 & 4\\ 9 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

第一行減第二行，將使得 $a_{11}=0$ ，因此

$$A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 6\\ 2 & 2 & 4\\ 4 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

第三行減 2 倍之第二行將使得 $a_{13}=0$ ，

$$A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 4 & 5 & -9\end{bmatrix}$$

因此
$$|A|=0-3(-18-0)+0=54$$

(*b*)
$$A=\begin{bmatrix}28 & 34 & 2\\ 23 & 45 & 3\\ 19 & 41 & 1\end{bmatrix}$$

第一行減 14 倍之第三行，將使得 $a_{11}=0$，

$$A=\begin{bmatrix}0 & 34 & 2\\ -19 & 45 & 3\\ 5 & 41 & 1\end{bmatrix}$$

第二行減 17 倍之第三行，將使得 $a_{12}=0$，

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\ -19 & -6 & 3\\ 5 & 24 & 1\end{bmatrix}$$

因此 $|A|=2(-456+30)=-852$

11.18 不必事先化簡矩陣直接求問題 11.17(*b*)，並檢查其結果是否相同。

圖 $|A|=28(45-123)-34(23-57)+2(943-855)=-2184+1156+176=-852$

11.19 已知
$$A=\begin{bmatrix}4 & 36 & 28\\ 5 & 35 & 55\\ 3 & 23 & 18\end{bmatrix}$$

(*a*) 將 A 化爲上三角矩陣並求 $|A|$，(*b*) 再以其他方法檢查你的答案。

圖 (*a*) 第二行減 9 倍之第一行，且第三行減 7 倍之第一行

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 5 & -10 & 20\\ 3 & -4 & -3\end{bmatrix}$$

然後將 2 倍之第二行加至第三行

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 5 & -10 & 0\\ 3 & -4 & -11\end{bmatrix}$$

因此，$|A|=4(-10)(-11)=440$。

(*b*) $|A|=4(630-1265)-36(90-165)+28(115-105)=-2540+2700+280=440$

11.20 已知
$$A=\begin{bmatrix}71 & -26 & 5\\ 58 & 32 & 6\\ 63 & -45 & 3\end{bmatrix}$$

將 A 化爲下三角矩陣並求 $|A|$。

圖 第一行減 21 倍之第三行，且將 15 倍之第三行加至第二行

$$A=\begin{bmatrix}-34 & 49 & 5\\ -68 & 122 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix},$$

然後，第二列減 2 倍之第一列，

$$A=\begin{bmatrix}-34 & 49 & 5\\ 0 & 24 & -4\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$|A|=(-34)(24)(3)=-2448$$

11.21 已知

$$A=\begin{bmatrix}126 & 42 & 63\\ 108 & 56 & 49\\ 96 & 60 & 74\end{bmatrix}$$

將 A 化爲上三角矩陣，並求 $|A|$ 。

圖 第二行減 $\frac{1}{3}$ 倍之第一行，且第三行減 $\frac{1}{2}$ 倍之第一行：

$$A=\begin{bmatrix}126 & 0 & 0\\ 108 & 20 & -5\\ 96 & 28 & 26\end{bmatrix}$$

然後，將 $\frac{1}{4}$ 倍之第二行加至第三行

$$A=\begin{bmatrix}126 & 0 & 0\\ 108 & 20 & 0\\ 96 & 28 & 33\end{bmatrix}$$

$$|A|=126(20)(33)=83,160$$

奇異與非奇異矩陣

11.22 使用行列式以判別下列諸方程組是否有唯一解：

圖 (a) $12x_1+7x_2=147$

$15x_1+19x_2=168$

爲判斷是否存在唯一解，必須求係數矩陣 A 之行列式值 $|A|$，如果 $|A|\neq 0$，此矩陣爲非奇異，則存在一唯一解；反之，如果 $|A|=0$，則此矩陣爲奇異，因而該方程組沒有唯一解，準此

$$A=\begin{bmatrix}12 & 7\\ 15 & 19\end{bmatrix}$$

$$|A|=12(19)-15(7)=123$$

因 $|A|\neq 0$，A 爲非奇異故此方程組存在唯一解。

(*b*) $2x_1 + 3x_2 = 27$
$6x_1 + 9x_2 = 81$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad |A| = 2(9) - 6(3) = 0$$

此方程組沒有唯一解，亦即此方程組爲線性相依，其圖形如問題 1.15 (*b*) 所示。

(*c*) $72x_1 - 54x_2 = 216$
$64x_1 - 48x_2 = 192$

$$A = \begin{bmatrix} 72 & -54 \\ 64 & -48 \end{bmatrix} \qquad |A| = 72(-48) - 64(-54) = -3456 + 3456 = 0$$

此方程組沒有唯一解，因爲其爲線性相依，如果進一步觀察可知，第二個方程式爲第一個方程式之 $\frac{8}{9}$ 倍。

(*d*) $4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 27$
$x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 19$
$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 15$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad |A| = 4(18-2) - 3(3-6) + 5(1-18) = -12$$

此方程組存在一唯一解。

(*e*) $4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 28$
$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 20$
$10x_1 + 5x_2 + 15x_3 = 70$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10 & 5 & 15 \end{bmatrix} \qquad |A| = 4(15-10) - 2(45-20) + 6(15-10) = 0$$

此方程組沒有唯一解，因爲其爲線性相依，如果進一步檢查可知，第三個方程式爲第一個方程式之 2.5 倍。

(*f*) $56x_1 + 47x_2 + 8x_3 = 365$
$84x_1 - 39x_2 + 12x_3 = 249$
$28x_1 - 81x_2 + 4x_3 = 168$

$$A = \begin{bmatrix} 56 & 47 & 8 \\ 84 & -39 & 12 \\ 28 & -81 & 4 \end{bmatrix}$$

首先，分別由第一行與第三行提出其共同因子 28 與 4

$$|A| = 28(4)\begin{vmatrix} 2 & 47 & 2 \\ 3 & -39 & 3 \\ 1 & -81 & 1 \end{vmatrix}$$

此時第一行與第三行爲線性相依乃顯而易見，故此行列式值爲 0 ，且唯一解不存在。

$$|A| = 112[2(-39+243) + 47(0) + 2(-243+39)] = 112(0) = 0$$

子行列式與餘因式

11.23 求 (*a*) 第一列子行列式 $|M_{ij}|$ 與 (*b*) 第一列中之每一元素之餘因式 $|C_{ij}|$，已知

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

圖 (*a*) 爲求 a_{11} 之子行列式，我們將 a_{11} 所在之行與列刪去，剩下的即爲 a_{11} 之子行列式，因此，$|M_{11}| = a_{22}$ ，同樣的，$|M_{12}| = a_{21}$ 。

(*b*) 由餘因式之規則可知，

$$|C_{11}| = (-1)^{1+1}|M_{11}| = +1(a_{22}) = a_{22}$$
$$|C_{12}| = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -1(a_{21}) = -a_{21}$$

11.24 求 (*a*) 第二列之子行列式與 (*b*) 第二列各元素之餘因式，已知

圖

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 17 \\ 19 & 15 \end{bmatrix}$$

(*a*) $|M_{21}| = 17$ $|M_{22}| = 13$

(*b*) $|C_{21}| = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -1(17) = -17$

$|C_{22}| = (-1)^{2+2}|M_{22}| = +1(13) = 13$

11.25 求 (*a*) 第二行之子行列式與 (*b*) 第二行各元素之餘因式，已知

圖

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$$

(*a*) $|M_{12}| = 12$ $|M_{22}| = 6$

(*b*) $|C_{12}| = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -12$

$|C_{22}| = (-1)^{2+2}|M_{22}| = 6$

11.26 求 (*a*) 第一列之子行列式與 (*b*) 第一列各元素之餘因式

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

圖 (*a*) 刪去第一列與第一行，

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -26$$

同樣地，

$$|M_{12}| = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 17$$

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 15$$

(*b*)

$$|C_{11}| = (-1)^2|M_{11}| = -26$$
$$|C_{12}| = (-1)^3|M_{12}| = -17$$
$$|C_{13}| = (-1)^4|M_{13}| = 15$$

11.27 求 (*a*) 第三列之子行列式與 (*b*) 第三列各元素之餘因式，已知

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ 6 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

圖 (*a*) 刪去第三列與第一行，

$$|M_{31}| = \begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 69$$

同理，

$$|M_{32}| = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 51$$

$$|M_{33}| = \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -15$$

(*b*)

$$|C_{31}| = (-1)^4|M_{31}| = 69$$
$$|C_{32}| = (-1)^5|M_{32}| = -51$$
$$|C_{33}| = (-1)^6|M_{33}| = -15$$

11.28 求 (*a*) 第二行之子行列式與 (*b*) 餘因式，已知

圖

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 6 & 11 \\ 12 & 9 & 4 \\ 7 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

(*a*)

$$|M_{12}| = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$|M_{22}| = \begin{vmatrix} 13 & 11 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -51$$

$$|M_{32}| = \begin{vmatrix} 13 & 11 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} = -80$$

(*b*)

$$|C_{12}| = (-1)^3|M_{12}| = -1(-4) = 4$$
$$|C_{22}| = (-1)^4|M_{22}| = -51$$
$$|C_{32}| = (-1)^5|M_{32}| = -1(-80) = 80$$

11.29 求下列諸矩陣之(1)餘因式矩陣 C 與(2)伴隨矩陣 adj A ：

圖 (a) $A=\begin{bmatrix}7 & 12\\ 4 & 3\end{bmatrix}$

(1) $C=\begin{bmatrix}|C_{11}| & |C_{12}|\\ |C_{21}| & |C_{22}|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|M_{11}| & -|M_{12}|\\ -|M_{21}| & |M_{22}|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ -12 & 7\end{bmatrix}$ (2) $\text{Adj } A=C'=\begin{bmatrix}3 & -12\\ -4 & 7\end{bmatrix}$

(b) $A=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 13 & 6\end{bmatrix}$

(1) $C=\begin{bmatrix}6 & -13\\ -5 & -2\end{bmatrix}$ (2) $\text{Adj } A=\begin{bmatrix}6 & -5\\ -13 & -2\end{bmatrix}$

(c) $A=\begin{bmatrix}9 & -16\\ -20 & 7\end{bmatrix}$

(1) $C=\begin{bmatrix}7 & 20\\ 16 & 9\end{bmatrix}$ (2) $\text{Adj } A=\begin{bmatrix}7 & 16\\ 20 & 9\end{bmatrix}$

(d) $A=\begin{bmatrix}6 & 2 & 7\\ 5 & 4 & 9\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}$

(1) $C=\begin{bmatrix}|C_{11}| & |C_{12}| & |C_{13}|\\ |C_{21}| & |C_{22}| & |C_{23}|\\ |C_{31}| & |C_{32}| & |C_{33}|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}4 & 9\\ 3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}5 & 9\\ 3 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}5 & 4\\ 3 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 7\\ 3 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}6 & 7\\ 3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}6 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 7\\ 4 & 9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}6 & 7\\ 5 & 9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}6 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-23 & 22 & 3\\ 19 & -15 & -12\\ -10 & -19 & 14\end{bmatrix}$

(2) $\text{Adj } A=C'=\begin{bmatrix}-23 & 19 & -10\\ 22 & -15 & -19\\ 3 & -12 & 14\end{bmatrix}$

(e) $A=\begin{bmatrix}13 & -2 & 8\\ -9 & 6 & -4\\ -3 & 2 & -1\end{bmatrix}$

(1) $C=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}6 & -4\\ 2 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-9 & -4\\ -3 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-9 & 6\\ -3 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-2 & 8\\ 2 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}13 & 8\\ -3 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}13 & -2\\ -3 & 2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-2 & 8\\ 6 & -4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}13 & 8\\ -9 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}13 & -2\\ -9 & 6\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 14 & 11 & -20\\ -40 & -20 & 60\end{bmatrix}$

(2) $\text{Adj } A=C'=\begin{bmatrix}2 & 14 & -40\\ 3 & 11 & -20\\ 0 & -20 & 60\end{bmatrix}$

拉普拉斯展開式

11.30 使用拉普拉斯展開式求下列諸矩陣之行列式值，可選擇任一列或行展開之。

圖 (*a*)
$$A=\begin{bmatrix}15 & 7 & 9\\ 2 & 5 & 6\\ 9 & 0 & 12\end{bmatrix}$$

沿著第二列予以展開，則

$$|A|=a_{12}|C_{12}|+a_{22}|C_{22}|+a_{32}|C_{32}|=7(-1)\begin{vmatrix}2 & 6\\ 9 & 12\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}15 & 9\\ 9 & 12\end{vmatrix}+0$$
$$=-7(-30)+5(99)=705$$

(*b*) $A=\begin{bmatrix}23 & 35 & 0\\ 72 & 46 & 10\\ 15 & 29 & 0\end{bmatrix}$

沿著第三行展開，則

$$|A|=a_{13}|C_{13}|+a_{23}|C_{23}|+a_{33}|C_{33}|$$
$$=0+10(-1)\begin{vmatrix}23 & 35\\ 15 & 29\end{vmatrix}+0=-10(142)=-1420$$

(*c*) $A=\begin{bmatrix}12 & 98 & 15\\ 0 & 25 & 0\\ 21 & 84 & 19\end{bmatrix}$

沿著第二列展開，則

$$|A|=a_{21}|C_{21}|+a_{22}|C_{22}|+a_{23}|C_{23}|=0+25\begin{vmatrix}12 & 15\\ 21 & 19\end{vmatrix}+0=25(-87)=-2175$$

(*d*) $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1 & 5\\ 3 & 2 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 4\\ 3 & 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$

沿著第一列展開，則

$$|A|=a_{11}|C_{11}|+a_{12}|C_{12}|+a_{13}|C_{13}|+a_{14}|C_{14}|$$
$$=2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 4 & 3 & 2\end{vmatrix}+4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 4\\ 3 & 3 & 2\end{vmatrix}+1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}+5(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}3 & 2 & 5\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{vmatrix}$$

然後就每一個（3×3）次行列式沿著第一列展開，可得

$$|A|=2\left[2\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}\right]-4\left[3\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}\right]$$
$$+1\left[3\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}\right]-5\left[3\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}\right]$$

$$= 2[2(-10) - 5(-12) + 1(2)] - 4[3(-10) - 5(-10) + 1(0)]$$
$$+ 1[3(-12) - 2(-10) + 1(-2)] - 5[3(2) - 2(0) + 5(-2)]$$
$$= 2(42) - 4(20) + 1(-18) - 5(-4) = 6$$

(e) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

沿著第二行展開，則

$$|A| = a_{12}|C_{12}| + a_{22}|C_{22}| + a_{32}|C_{32}| + a_{42}|C_{42}|$$
$$= 0 + 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 1(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

然後，再將每一個（3×3）之次行列式值代入，即

$$|A| = 2(-60) + 1(88) = -32$$

(f) $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 9 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

首先，第一行減 7 倍之第四行，第二行減 3 倍之第四行，及第三行減 5 倍之第四行，以簡化此矩陣，則

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -40 & -14 & -27 & 6 \\ -34 & -15 & -16 & 5 \\ -19 & -4 & -11 & 3 \end{bmatrix}$$

然後沿著第一列展開，

$$|A| = a_{11}|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}| + a_{14}|C_{14}| = 0 + 0 + 0 + 1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -40 & -14 & -27 \\ -34 & -15 & -16 \\ -19 & -4 & -11 \end{vmatrix}$$

將（3×3）之行列式值代入，則

$$|A| = -1(963) = -963$$

反矩陣之求法

11.31 求下列諸矩陣之反矩陣 A^{-1}，並檢查 (a) 之答案。

解 (a) $A = \begin{bmatrix} 24 & 15 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{Adj} A$$

計算其行列式值， $|A| = 24(7) - 8(15) = 48$

然後求餘因式矩陣以得其伴隨矩陣，

$$C = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -15 & 24 \end{bmatrix}$$

而 $$\text{Adj } A = C' = \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ -8 & 24 \end{bmatrix}$$

因此， $$A^{-1} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 7 & -15 \\ -8 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{48} & -\frac{5}{16} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{11.5}$$

檢查之法是確定是否 $A^{-1}A = I$，於此爲便於計算，我們採用(11.5)式中未化簡之 A^{-1} 形式，

$$A^{-1}A = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 7 & -15 \\ -8 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 & 15 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 7(24) - 15(8) & 7(15) - 15(7) \\ -8(24) + 24(8) & -8(15) + 24(7) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 48 & 0 \\ 0 & 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(*b*) $A = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$

$$|A| = 7(12) - 6(9) = 30$$

餘因式矩陣爲

$$C = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$$

而 $$\text{Adj } A = C' = \begin{bmatrix} 12 & -9 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$$

因此， $$A^{-1} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 12 & -9 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{30} \end{bmatrix}$$

(*c*) $A = \begin{bmatrix} -7 & 16 \\ -9 & 13 \end{bmatrix}$

$$|A| = -7(13) - (-9)(16) = 53$$

$$C = \begin{bmatrix} 13 & 9 \\ -16 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = C' = \begin{bmatrix} 13 & -16 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{53}\begin{bmatrix} 13 & -16 \\ 9 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{53} & -\frac{16}{53} \\ \frac{9}{53} & -\frac{7}{53} \end{bmatrix}$$

(*d*) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ 9 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

$$|A| = 4(7 - 48) - 2(21 - 72) + 5(18 - 9) = -17$$

餘因式矩陣爲

$$C=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix}1&8\\6&7\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&8\\9&7\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3&1\\9&6\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2&5\\6&7\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4&5\\9&7\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4&2\\9&6\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}2&5\\1&8\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4&5\\3&8\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4&2\\3&1\end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-41&51&9\\16&-17&-6\\11&-17&-2\end{bmatrix}$$

而
$$\text{Adj } A=C'=\begin{bmatrix}-41&16&11\\51&-17&-17\\9&-6&-2\end{bmatrix}$$

因此，
$$A^{-1}=-\frac{1}{17}\begin{bmatrix}-41&16&11\\51&-17&-17\\9&-6&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{41}{17}&-\frac{16}{17}&-\frac{11}{17}\\-3&1&1\\-\frac{9}{17}&\frac{6}{17}&\frac{2}{17}\end{bmatrix}$$

(*e*) $A=\begin{bmatrix}14&0&6\\9&5&0\\0&11&8\end{bmatrix}$

$$|A|=14(40)-0+6(99)=1154$$

餘因式矩陣爲

$$C=\begin{bmatrix}40&-72&99\\66&112&-154\\-30&54&70\end{bmatrix}$$

而伴隨矩陣爲

$$\text{Adj } A=\begin{bmatrix}40&66&-30\\-72&112&54\\99&-154&70\end{bmatrix}$$

則
$$A^{-1}=\frac{1}{1154}\begin{bmatrix}40&66&-30\\-72&112&54\\99&-154&70\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{20}{577}&\frac{33}{577}&-\frac{15}{577}\\-\frac{36}{577}&\frac{56}{577}&\frac{27}{577}\\\frac{99}{1154}&-\frac{77}{577}&\frac{35}{577}\end{bmatrix}$$

以反矩陣求解方程式

11.32 使用反矩陣求解下列諸線性方程組，並將之代入原方程式以檢查你的答案是否正確？

圖 (*a*) $4x_1+3x_2=28$
$2x_1+5x_2=42$

$$\begin{bmatrix}4&3\\2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}28\\42\end{bmatrix}$$

由 11.8 節知，$X=A^{-1}B$。故首先求A之反矩陣，其中 $|A|=4(5)-2(3)=14$。A之餘因式矩陣爲

$$C=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$$

而 $$\text{Adj } A=C'=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

因此， $$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{14} & -\frac{3}{14}\\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\end{bmatrix}$$

然後代入 $X=A^{-1}B$ ，

$$X=\begin{bmatrix}\frac{5}{14} & -\frac{3}{14}\\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\end{bmatrix}_{(2\times 2)}\begin{bmatrix}28\\ 42\end{bmatrix}_{(2\times 1)}=\begin{bmatrix}10-9\\ -4+12\end{bmatrix}_{(2\times 1)}=\begin{bmatrix}1\\ 8\end{bmatrix}_{(2\times 1)}$$

因此， $\bar{x}_1=1$ 與 $\bar{x}_2=8$ 。

(*b*) $6x_1+7x_2=56$
$2x_1+3x_2=44$

$$\begin{bmatrix}6 & 7\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}56\\ 44\end{bmatrix}$$

其中 $|A|=6(3)-2(7)=4$.

$$C=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -7 & 6\end{bmatrix}\qquad \text{Adj } A=C'=\begin{bmatrix}3 & -7\\ -2 & 6\end{bmatrix}$$

而 $$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & -7\\ -2 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{7}{4}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

因此， $$X=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{7}{4}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}_{(2\times 2)}\begin{bmatrix}56\\ 44\end{bmatrix}_{(2\times 1)}=\begin{bmatrix}42-77\\ -28+66\end{bmatrix}_{(2\times 1)}=\begin{bmatrix}-35\\ 38\end{bmatrix}_{(2\times 1)}$$

故 $\bar{x}_1=-35$ 與 $\bar{x}_2=38$ 。

11.33 兩相關財貨市場（豬肉與牛肉）之均衡情形已知如下，

$$18P_b-P_p=87$$
$$-2P_b+36P_p=98$$

求每一市場之均衡價格。

$$\begin{bmatrix}18 & -1\\ -2 & 36\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_b\\ P_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}87\\ 98\end{bmatrix}$$

其中 $|A|=18(36)-(-2)(-1)=646$ 。

$$C=\begin{bmatrix}36 & 2\\ 1 & 18\end{bmatrix}\qquad \text{Adj } A=\begin{bmatrix}36 & 1\\ 2 & 18\end{bmatrix}$$

而 $$A^{-1}=\frac{1}{646}\begin{bmatrix}36 & 1\\ 2 & 18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{18}{323} & \frac{1}{646}\\ \frac{1}{323} & \frac{9}{323}\end{bmatrix}$$

因此， $$X=\begin{bmatrix}\frac{18}{323} & \frac{1}{646}\\ \frac{1}{323} & \frac{9}{323}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}87\\ 98\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1615}{323}\\ \frac{965}{323}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 3\end{bmatrix}$$

故 $\overline{P}_b = 5$ 與 $\overline{P}_p = 3$ 。

此解與問題 2.16 以聯立方程式解法所求得者相同，讀者可以同樣之方法檢查問題 2.17 之解。

11.34 兩替代財貨之均衡情形爲

$$5P_1 - 2P_2 = 15$$
$$-P_1 + 8P_2 = 16$$

試求個別財貨之均衡價格。

圖

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 16 \end{bmatrix}$$

其中 $|A| = 5(8) - (-1)(-2) = 38$ 。

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{Adj } A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

而

$$A^{-1} = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{1}{19} \\ \frac{1}{38} & \frac{5}{38} \end{bmatrix}$$

因此，

$$X = \begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{1}{19} \\ \frac{1}{38} & \frac{5}{38} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{60+16}{19} \\ \dfrac{15+80}{38} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

故 $\overline{P}_1 = 4$ 與 $\overline{P}_2 = 2.5$ 。

11.35 已知 IS 方程式爲 $0.3Y + 100i - 252 = 0$ 而 LM 方程式爲

$$0.25Y - 200i - 176 = 0$$

求均衡的所得水準與利率。

圖 IS - LM 方程式可寫爲下列之方式

$$0.3Y + 100i = 252$$
$$0.25Y - 200i = 176$$

然後以矩陣形式表示之，其中

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 100 \\ 0.25 & -200 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} Y \\ i \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 252 \\ 176 \end{bmatrix}$$

因此，

$$|A| = 0.3(-200) - 100(0.25) = -85$$

$$C = \begin{bmatrix} -200 & -0.25 \\ -100 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -200 & -100 \\ -0.25 & 0.3 \end{bmatrix}$$

而
$$A^{-1}=-\frac{1}{85}\begin{bmatrix}-200 & -100\\ -0.25 & 0.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{40}{17} & \frac{20}{17}\\ \frac{0.05}{17} & -\frac{0.06}{17}\end{bmatrix}$$

因此，
$$X=\begin{bmatrix}\frac{40}{17} & \frac{20}{17}\\ \frac{0.05}{17} & -\frac{0.06}{17}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}252\\ 176\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{10,080+3520}{17}\\ \frac{12.6-10.56}{17}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}800\\ 0.12\end{bmatrix}$$

均衡時$\overline{Y}=800$且$\overline{i}=0.12$正如問題 2.28 以聯立方程式方法求得者，試以本題同樣之方法，再作問題 2.29 - 2.31 。

11.36 使用反矩陣求解下列線性方程組之未知數，

$$\begin{aligned}3x_1+5x_2+x_3&=36\\ x_1+2x_2+4x_3&=42\\ 4x_1+3x_2+2x_3&=28\end{aligned}$$

圖
$$\begin{bmatrix}3 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}36\\ 42\\ 28\end{bmatrix}$$

其中$|A|=3(4-12)-5(2-16)+1(3-8)=41$。

$$C=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}2&4\\3&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&4\\4&2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2\\4&3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}5&1\\3&2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3&1\\4&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&5\\4&3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}5&1\\2&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&1\\1&4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3&5\\1&2\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 14 & -5\\ -7 & 2 & 11\\ 18 & -11 & 1\end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A=\begin{bmatrix}-8 & -7 & 18\\ 14 & 2 & -11\\ -5 & 11 & 1\end{bmatrix}.$$

而
$$A^{-1}=\frac{1}{41}\begin{bmatrix}-8 & -7 & 18\\ 14 & 2 & -11\\ -5 & 11 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{8}{41} & -\frac{7}{41} & \frac{18}{41}\\ \frac{14}{41} & \frac{2}{41} & -\frac{11}{41}\\ -\frac{5}{41} & \frac{11}{41} & \frac{1}{41}\end{bmatrix}$$

因此，
$$X=\begin{bmatrix}-\frac{8}{41} & -\frac{7}{41} & \frac{18}{41}\\ \frac{14}{41} & \frac{2}{41} & -\frac{11}{41}\\ -\frac{5}{41} & \frac{11}{41} & \frac{1}{41}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}36\\ 42\\ 28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-288-294+504}{41}\\ \frac{504+84-308}{41}\\ \frac{-180+462+28}{41}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.902\\ 6.829\\ 7.561\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

11.37 已知
$$\begin{aligned}2x_1+4x_2-3x_3&=12\\ 3x_1-5x_2+2x_3&=13\\ -x_1+3x_2+2x_3&=17\end{aligned}$$

重新作問題 11.36 。

圖

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 17 \end{bmatrix}$$

其中 $|A| = 2(-16) - 4(8) - 3(4) = -76$ 。

$$C=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -16 & -8 & 4 \\ -17 & 1 & -10 \\ -7 & -13 & -22 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A=\begin{bmatrix} -16 & -17 & -7 \\ -8 & 1 & -13 \\ 4 & -10 & -22 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{76}\begin{bmatrix} -16 & -17 & -7 \\ -8 & 1 & -13 \\ 4 & -10 & -22 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{16}{76} & \frac{17}{76} & \frac{7}{76} \\ \frac{8}{76} & -\frac{1}{76} & \frac{13}{76} \\ -\frac{4}{76} & \frac{10}{76} & \frac{22}{76} \end{bmatrix}$$

可將共同分子析出以簡化往後之計算 。

因此

$$X=\begin{bmatrix} \frac{16}{76} & \frac{17}{76} & \frac{7}{76} \\ \frac{8}{76} & -\frac{1}{76} & \frac{13}{76} \\ -\frac{4}{76} & \frac{10}{76} & \frac{22}{76} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 17 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{192+221+119}{76} \\ \frac{96-13+221}{76} \\ \frac{-48+130+374}{76} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

11.38 三個相關物品之市場的均衡情形如下：

$$\begin{aligned} 11P_1 - P_2 - P_3 &= 31 \\ -P_1 + 6P_2 - 2P_3 &= 26 \\ -P_1 - 2P_2 + 7P_3 &= 24 \end{aligned}$$

試求每一個別市場之均衡價格 。

圖

$$\begin{bmatrix} 11 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 31 \\ 26 \\ 24 \end{bmatrix}$$

其中 $|A| = 11(38) + 1(-9) - 1(8) = 401$ 。

$$C=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 38 & 9 & 8 \\ 9 & 76 & 23 \\ 8 & 23 & 65 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A=\begin{bmatrix}38 & 9 & 8\\ 9 & 76 & 23\\ 8 & 23 & 65\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{401}\begin{bmatrix}38 & 9 & 8\\ 9 & 76 & 23\\ 8 & 23 & 65\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{38}{401} & \frac{9}{401} & \frac{8}{401}\\ \frac{9}{401} & \frac{76}{401} & \frac{23}{401}\\ \frac{8}{401} & \frac{23}{401} & \frac{65}{401}\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}\frac{38}{401} & \frac{9}{401} & \frac{8}{401}\\ \frac{9}{401} & \frac{76}{401} & \frac{23}{401}\\ \frac{8}{401} & \frac{23}{401} & \frac{65}{401}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}31\\ 26\\ 24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1178+234+192}{401}\\ \frac{279+1976+552}{401}\\ \frac{248+598+1560}{401}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 7\\ 6\end{bmatrix}$$

參見問題 2.20，與本題之解相同。

11.39 已知$Y=C+I_0$，其中$C=C_0+bY$。使用反矩陣求均衡之Y與C。

圖 首先將上述方程式重新排列，即內生變數C與Y及其係數置於等式之左邊，而將外生變數C_0與I_0置於等式之右邊。

$$\begin{aligned}Y-C&=I_0\\ -bY+C&=C_0\end{aligned}$$

因此，
$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ -b & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y\\ C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_0\\ C_0\end{bmatrix}$$

係數矩陣之行列式值爲$|A|=1(1)+1(-b)=1-b$，其餘因式矩陣爲

$$C=\begin{bmatrix}1 & b\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ b & 1\end{bmatrix}$$

而
$$A^{-1}=\frac{1}{1-b}\begin{bmatrix}1 & 1\\ b & 1\end{bmatrix}$$

令 $X=\begin{bmatrix}Y\\ C\end{bmatrix}$，
$$X=\frac{1}{1-b}\begin{bmatrix}1 & 1\\ b & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_0\\ C_0\end{bmatrix}=\frac{1}{1-b}\begin{bmatrix}I_0+C_0\\ bI_0+C_0\end{bmatrix}$$

因此，
$$\bar{Y}=\frac{1}{1-b}(I_0+C_0)\qquad \bar{C}=\frac{1}{1-b}(C_0+bI_0)$$

注意，第二章之例 3，則不用矩陣而求解均衡之所得水準。

克萊莫法則

11.40 使用克萊莫法則求解下列各方程組之未知數：

圖 (*a*)
$$\begin{aligned}2x_1+6x_2&=22\\ -x_1+5x_2&=53\end{aligned}$$

由克萊莫法則知，$\bar{x}_i=\dfrac{|A_i|}{|A|}$

其中 A_i 爲以常數行向量取代原矩陣之 x_i 係數所在之行，因此由原先之資料可知，

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 22 \\ 53 \end{bmatrix}$$

其中 $|A| = 2(5)-(-1)(6) = 16$ 。

以常數行向量取代係數矩陣之第一行，

$$A_1=\begin{bmatrix} 22 & 6 \\ 53 & 5 \end{bmatrix}$$

其中 $|A_1| = 22(5)-53(6) = -208$ 。因此，

$$\bar{x}_1=\frac{|A_1|}{|A|}=-\frac{208}{16}=-13$$

再以常數行向量取代係數矩陣之第二行，

$$A_2=\begin{bmatrix} 2 & 22 \\ -1 & 53 \end{bmatrix}$$

其中 $|A_2| = 2(53)-(-1)(22) = 128$ 。因此，

$$\bar{x}_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{128}{16}=8$$

(*b*) $5x_1-3x_2=28$
$-2x_1+4x_2=14$

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

其中 $|A| = 5(4)-(-3)(-2) = 14$

$$A_1=\begin{bmatrix} 28 & -3 \\ 14 & 4 \end{bmatrix}$$

其中 $|A_1| = 28(4)-(-3)(14) = 154$ 。

$$A_2=\begin{bmatrix} 5 & 28 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}$$

其中 $|A_2| = 5(14)-28(-2) = 126$ 。因此，

$$\bar{x}_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{154}{14}=11 \qquad \text{且} \qquad \bar{x}_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{126}{14}=9$$

(*c*) $7p_1+2p_2=60$
$p_1+8p_2=78$

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

故 $|A| = 7(8) - 2(1) = 54$ 。

$$A_1 = \begin{bmatrix} 60 & 2 \\ 78 & 8 \end{bmatrix}$$

故 $|A_1| = 60(8) - 2(78) = 324$ 。

$$A_2 = \begin{bmatrix} 7 & 60 \\ 1 & 78 \end{bmatrix}$$

故 $|A_2| = 7(78) - 60(1) = 486$ 。

$$\bar{p}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{324}{54} = 6 \qquad \text{且} \qquad \bar{p}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{486}{54} = 9$$

(*d*) $18P_b - P_p = 87$
$-2P_b + 36P_p = 98$

$$A = \begin{bmatrix} 18 & -1 \\ -2 & 36 \end{bmatrix}$$

故 $|A| = 18(36) - (-1)(-2) = 646$ 。

$$A_1 = \begin{bmatrix} 87 & -1 \\ 98 & 36 \end{bmatrix}$$

故 $|A_1| = 87(36) + 1(98) = 3230$ 。

$$A_2 = \begin{bmatrix} 18 & 87 \\ -2 & 98 \end{bmatrix}$$

故 $|A_2| = 18(98) - 87(-2) = 1938$ 。

$$\bar{P}_b = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{3230}{646} = 5 \qquad \text{且} \qquad \bar{P}_p = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1938}{646} = 3$$

將本題使用之方法與問題 2.16 與 11.33 使用之求解方法作一比較可知，同樣之問題，前者以聯立解求解而後者則以反矩陣方法求解。

11.41 就下列各方程組重新作問題 11.40 。

圖 (*a*) $0.4Y + 150i = 209$
$0.1Y - 250i = 35$

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 150 \\ 0.1 & -250 \end{bmatrix}$$

故 $|A| = 0.4(-250) - 150(0.1) = -115$ 。

$$A_1=\begin{bmatrix}209 & 150\\ 35 & -250\end{bmatrix}$$

故 $|A_1|=209(-250)-150(35)=-57,500$ 。

$$A_2=\begin{bmatrix}0.4 & 209\\ 0.1 & 35\end{bmatrix}$$

故 $|A_2|=0.4(35)-209(0.1)=-6.9$ 。

$$\bar{Y}=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{-57,500}{-115}=500 \qquad \text{且} \qquad \bar{i}=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{-6.9}{-115}=0.06$$

將本題之方法與問題 2.30 作一比較。

(*b*) $5x_1-2x_2+3x_3=16$
$2x_1+3x_2-5x_3=2$
$4x_1-5x_2+6x_3=7$

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & -5 & 6\end{vmatrix}=5(18-25)+2(12+20)+3(-10--12)=-37$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix}16 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 7 & -5 & 6\end{vmatrix}=16(18-25)+2(12+35)+3(-10-21)=-111$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix}5 & 16 & 3\\ 2 & 2 & -5\\ 4 & 7 & 6\end{vmatrix}=5(12+35)-16(12+20)+3(14-8)=-259$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix}5 & -2 & 16\\ 2 & 3 & 2\\ 4 & -5 & 7\end{vmatrix}=5(21+10)+2(14-8)+16(-10-12)=-185$$

$$\bar{x}_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{-111}{-37}=3 \qquad \bar{x}_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{-259}{-37}=7 \qquad \bar{x}_3=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{-185}{-37}=5$$

(*c*) $5x_1-4x_2=10$
$4x_2-5x_3=-5$
$3x_1-2x_3=20$

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & -4 & 0\\ 0 & 4 & -5\\ 3 & 0 & -2\end{vmatrix}=5(-8)+4(15)=20$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix}10 & -4 & 0\\ -5 & 4 & -5\\ 20 & 0 & -2\end{vmatrix}=10(-8)+4(110)=360$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 0 & -5 & -5 \\ 3 & 20 & -2 \end{vmatrix} = 5(110) - 10(15) = 400$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 10 \\ 0 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & 20 \end{vmatrix} = 5(80) + 3(-20) = 340$$

$$\bar{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{360}{20} = 18 \qquad \bar{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{400}{20} = 20 \qquad \bar{x}_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{340}{20} = 17$$

(*d*) $2x_1 + 4x_2 - x_3 = 52$
$-x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 72$
$3x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 10$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 2(31) - 4(-11) + 1(-8) = 114$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 52 & 4 & -1 \\ 72 & 5 & 3 \\ 10 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 52(31) - 4(114) - 1(-554) = 1710$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 52 & -1 \\ -1 & 72 & 3 \\ 3 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 2(114) - 52(-11) - 1(-226) = 1026$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 52 \\ -1 & 5 & 72 \\ 3 & -7 & 10 \end{vmatrix} = 2(554) - 4(-226) + 52(-8) = 1596$$

$$\bar{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{1710}{114} = 15 \qquad \bar{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1026}{114} = 9 \qquad \bar{x}_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{1596}{114} = 14$$

(*e*) $11p_1 - p_2 - p_3 = 31$
$-p_1 + 6p_2 - 2p_3 = 26$
$-p_1 - 2p_2 + 7p_3 = 24$

$$|A| = \begin{vmatrix} 11 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 11(38) + 1(-9) - 1(8) = 401$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 31 & -1 & -1 \\ 26 & 6 & -2 \\ 24 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 31(38) + 1(230) - 1(-196) = 1604$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 11 & 31 & -1 \\ -1 & 26 & -2 \\ -1 & 24 & 7 \end{vmatrix} = 11(230) - 31(-9) - 1(2) = 2807$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 11 & -1 & 31 \\ -1 & 6 & 26 \\ -1 & -2 & 24 \end{vmatrix} = 11(196) + 1(2) + 31(8) = 2406$$

因此， $\bar{p}_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{1604}{401} = 4$　　$\bar{p}_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{2807}{401} = 7$　　$\bar{p}_3 = \dfrac{|A_3|}{|A|} = \dfrac{2406}{401} = 6$

將本題求解之型態與問題 2.20 及問題 11.37 者作一比較。

11.42 於第六章例 7 中受限制下求極值之一階條件爲

$$\frac{\partial TC}{\partial x} = 16x - y + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial TC}{\partial y} = 24y - x + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial TC}{\partial \lambda} = x + y - 42 = 0$$

使用克萊莫法則求 x 與 y。

圖　首先將上述各方程式重新整理之，

$$\begin{aligned} 16x - y + \lambda &= 0 \\ -x + 24y + \lambda &= 0 \\ x + y &= 42 \end{aligned}$$

然後以矩陣表示之

$$\begin{bmatrix} 16 & -1 & 1 \\ -1 & 24 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 42 \end{bmatrix}$$

沿著第三行展開其行列式，$|A| = 1(-1-24) - 1(16+1) = -42$。

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 24 & 1 \\ 42 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

沿著第一行展開其行列式，$|A_1| = 42(-1-24) = -1050$。

$$A_2 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 42 & 0 \end{bmatrix}$$

沿著第二行展開其行列式，$|A_2| = -42(16+1) = -714$。

$$A_3 = \begin{bmatrix} 16 & -1 & 0 \\ -1 & 24 & 0 \\ 1 & 1 & 42 \end{bmatrix}$$

沿著第三行展開其行列式，$|A_3| = 42(384-1) = 16,086$。因此，

$$\bar{x} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-1050}{-42} = 25 \qquad \bar{y} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-714}{-42} = 17 \qquad \bar{\lambda} = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{16,086}{-42} = -383$$

11.43 於問題 6.43 中，受限制情形下求效用極大之一階條件爲

$$\begin{aligned} Q_2 + 10\lambda &= 0 \\ Q_1 + 2\lambda &= 0 \\ 10Q_1 + 2Q_2 - 240 &= 0 \end{aligned}$$

使用克萊莫法則解各個未知數。

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 2 \\ 10 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 240 \end{vmatrix}$$

因此，$|A| = -1(-20) + 10(2) = 40$。

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \\ 240 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 240(2) = 480$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 2 \\ 10 & 240 & 0 \end{vmatrix} = -240(-10) = 2400$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 240 \end{vmatrix} = 240(-1) = -240$$

$$\bar{Q}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{480}{40} = 12 \qquad \bar{Q}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{2400}{40} = 60 \qquad \bar{\lambda} = \frac{|A_3|}{|A|} = -\frac{240}{40} = -6$$

11.44 已知

$$ax_1 + bx_2 = g \tag{11.6}$$

$$cx_1 + dx_2 = h \tag{11.7}$$

試證克萊莫法則

$$\bar{x}_1 = \frac{\begin{vmatrix} g & b \\ h & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{|A_1|}{|A|} \qquad \bar{x}_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & g \\ c & h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{|A_2|}{|A|}$$

圖 (11.6) 式除以 b，

$$\frac{a}{b}x_1 + x_2 = \frac{g}{b} \tag{11.8}$$

(11.8) 式乘以 d 並減 (11.7) 式，

$$\frac{ad}{b}x_1 + dx_2 = \frac{dg}{b}$$
$$-cx_1 - dx_2 = -h$$
$$\left(\frac{ad-cb}{b}\right)x_1 = \frac{dg-hb}{b}$$
$$\bar{x}_1 = \frac{dg-hb}{ad-cb} = \frac{\begin{vmatrix} g & b \\ h & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{|A_1|}{|A|}$$

同理，(11.6)式除以a，　$x_1 + \frac{b}{a}x_2 = \frac{g}{a}$　　(11.9)

(11.9)式乘以$-c$並加至(11.7)式，

$$-cx_1 - \frac{bc}{a}x_2 = -\frac{cg}{a}$$
$$cx_1 + dx_2 = h$$
$$\left(\frac{ad-bc}{a}\right)x_2 = \frac{ah-cg}{a}$$
$$\bar{x}_2 = \frac{ah-cg}{ad-bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & g \\ c & h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{|A_2|}{|A|}$$

證畢。

以高斯方法求反矩陣

11.45　使用高斯消去法求下列各矩陣之反矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

圖　首先建立一擴張矩陣，其中右方爲單位矩陣，左方爲原先之矩陣再應用列運算化簡左邊之矩陣，一直到其爲一單位矩陣爲止，此時，右方之矩陣即爲反矩陣A^{-1}。因此，

$$A|B = \left[\begin{array}{cc|cc} 7 & 9 & 1 & 0 \\ 6 & 12 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1a.　第一列乘以$\frac{1}{7}$，

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{9}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 6 & 12 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1b.　第二列減6倍之第一列，，

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{9}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{30}{7} & -\frac{6}{7} & 1 \end{array}\right]$$

2*a*. 第二列乘以 $\frac{7}{30}$，

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{9}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{30} \end{array}\right]$$

2*b*. 第一列減 $\frac{7}{9}$ 倍之第二列

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{3}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{30} \end{array}\right]$$

因此，
$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{3} & \frac{7}{30} \end{bmatrix}$$

正如問題 11.31(*b*) 以伴隨矩陣方法求得者一樣。

11.46 已知

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ 9 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

重新作問題 11.45。

$$A\,|\,B=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(1) 第一列乘以 $\frac{1}{4}$，

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(2) 第二列減 3 倍之第一列且第三列減 9 倍之第一列，

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{17}{4} & -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{17}{4} & -\frac{9}{4} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(3) 第二列乘以 -2，

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{17}{2} & \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{17}{4} & -\frac{9}{4} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(4) 第一列減 $\frac{1}{2}$ 倍之第二列且第三列減 $\frac{3}{2}$ 倍之第二列，

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{17}{2} & \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{2} & -\frac{9}{2} & 3 & 1 \end{array}\right]$$

(5) 第三列乘以 $\frac{2}{17}$，

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{17}{2} & \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{17} & \frac{6}{17} & \frac{2}{17} \end{array}\right]$$

(6) 第一列減 $\frac{11}{2}$ 倍之第三列且第二列減 $\frac{17}{2}$ 倍之第三列，

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{41}{17} & -\frac{16}{17} & -\frac{11}{17} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{17} & \frac{6}{17} & \frac{2}{17} \end{array}\right]$$

因此
$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{41}{17} & -\frac{16}{17} & -\frac{11}{17} \\ -3 & 1 & 1 \\ -\frac{9}{17} & \frac{6}{17} & \frac{2}{17} \end{bmatrix}$$

正如問題 11.31(d) 以伴隨矩陣方法求得者一樣。

第十二章

特殊行列式與矩陣以及它們在經濟學上之應用

12.1 傑可比行列式

11.1 節曾討論過，如何使用簡單之行列式來檢查線性相依或獨立，與此對照的，**傑可比行列式**（Jacobian determinant）則可以用來檢查函數間之（線性或非線性）依存性。傑可比行列式 $|J|$ 是由方程組中所有一階偏導數所構成，每個偏導數均按其一定之次階予以排列，已知

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$$
$$y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$$

$$|J| = \left|\frac{\partial y_1, \partial y_2, \partial y_3}{\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

如果 $|J| = 0$，則方程組爲函數性相依；反之，如果 $|J| \neq 0$，此方程組爲函數性獨立。

例題12.1

使用傑可比檢查函數性之依存性，例示如下，已知

$$y_1 = 5x_1 + 3x_2$$
$$y_2 = 25x_1^2 + 30x_1x_2 + 9x_2^2$$

首先，取一階偏導數，

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 5 \qquad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 3 \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 50x_1 + 30x_2 \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 30x_1 + 18x_2$$

然後建立其傑可比，

$$|J| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 50x_1 + 30x_2 & 30x_1 + 18x_2 \end{vmatrix}$$

並計算之，

$$|J| = 5(30x_1 + 18x_2) - 3(50x_1 + 30x_2) = 0$$

因爲 $|J| = 0$。故諸方程式爲函數性相依，在此，最簡明易見的是，$(5x_1 + 3x_2)^2 = 25x_1^2 + 30x_1x_2 + 9x_2^2$。

12-2 赫辛行列式

爲求多變數函數 $z = f(x, y)$ 之極值，已知其一階條件 $z_x = z_y = 0$，除此之外，有兩個條件亦須滿足：即

(1) $z_{xx}, z_{yy} > 0$ 對極小值而言
$z_{xx}, z_{yy} < 0$ 對極大值而言

(2) $z_{xx}z_{yy} > (z_{xy})^2$

以上請參見 5.7 節。本節將介紹一種檢查二階條件之簡便方法，即使用赫辛(Hessian)行列式，赫辛行列式 $|H|$ 乃由所有之二階偏導數構成之行列式，其中二階直接偏導數均位於主對角線上，而二階交叉偏導數則位於其它之位置上，亦即

$$|H| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$$

其中 $z_{xy} = z_{yx}$，如果主對角線上之第一個元素，其主子行列式(principal minor)，$|H_1| = z_{xx}$ 爲正，且第二個主子行列式

$$|H_2| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix} = z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^2 > 0$$

則求極小值之二階條件可予滿足，此時 $|H_1| > 0$ 與 $|H_2| > 0$，此赫辛稱爲正肯定(positive definite)，由此可知，一正肯定之赫辛行列式滿足極小值之二階條件。

反之，如果第一個主子行列式，$|H_1| = z_{xx} < 0$ 且第二個主子行列式，

$$|H_2| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_x & z_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

則求極大值之二階條件可予滿足，此時，$|H_1| < 0$ 與 $|H_2| > 0$ 之赫辛行列式稱爲負肯定(negative definite)，由此可知，一負肯定之赫辛行列滿足極大值之二階條件。

例題12.2

於第五章之例 14 中，判別

$$z = 6x^2 - 9x - 3xy - 7y + 5y^2$$

是否在 $\bar{x} = 1$ ，$\bar{y} = 1$ 爲極值，其二階偏導數爲 $z_{xx} = 12$ ，$z_{yy} = 10$ 與 $z_{xy} = -3$ 。使用赫辛行列式檢查其二階條件，

$$|H| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix}$$

取其主子行列式，$|H_1| = 12 > 0$ 與

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} = 12(10) - (-3)(-3) = 111 > 0$$

由於 $|H_1| > 0$ 且 $|H_2| > 0$ ，其赫辛行列式爲正肯定故 z 在臨界點上爲極小值。

例題12.3

我們亦可使用行列式來檢查二次式爲正或負肯定，二次式之行列式亦稱爲判別式（discriminant）$|D|$，已知一兩變數之簡單二次式如下所示

$$z = 2x^2 + 5xy + 8y^2$$

建立判別式之方法是，將平方項之係數分別置於主對角線上，然後非平方項之係數平分之而置於非主對角線上之位置，亦即

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 2.5 \\ 2.5 & 8 \end{vmatrix}$$

然後，如赫辛之檢查法一般，計算各主子行列式之值。

$$|D_1| = 2 > 0 \qquad |D_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2.5 \\ 2.5 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 6.25 = 9.75 > 0$$

因此，z 爲正肯定，亦即所有非零之 x 與 y 將大於 0 。

12.3 三階赫辛行列式

已知 $y = f(x_1, x_2, x_3)$ ，其三階赫辛行列式爲

$$|H| = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix}$$

其中各元素爲各種不同對 y 之二階偏導數，

$$y_{11}=\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \qquad y_{12}=\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad y_{23}=\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_3} \qquad \text{等等}$$

此時求相對極大或極小之二階條件爲其第一、第二與第三個主子行列式之符號之正、負而言，如果 $|H_1|=y_{11}>0$，

$$|H_2|=\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}>0 \qquad \text{且} \qquad |H_3|=|H|>0$$

其中 $|H_i|$ 爲第三個主子行列式，則 $|H|$ 爲正肯定並滿足極小值之二階條件。反之，如果 $|H_1|=y_{11}<0$，

$$|H_2|=\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}>0 \qquad \text{且} \qquad |H_3|=|H|<0$$

則 $|H|$ 爲負肯定，並滿足極大值之二階條件，簡言之，如果所有主子行列式均爲正，則 $|H|$ 爲正肯定，且滿足相對極小值之二階條件；反之，如果主子行列式之符號爲正、負交替出現，則 $|H|$ 爲負肯定，且將滿足一相對極大值之二階條件。

例題 12.4

函數

$$y=-5x_1^2+10x_1+x_1x_3-2x_2^2+4x_2+2x_2x_3-4x_3^2$$

之最適化如下所示，並使用赫辛行列式檢查其二階條件。

其一階條件爲

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=y_1=-10x_1+10+x_3=0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}=y_2=-4x_2+2x_3+4=0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3}=y_3=x_1+2x_2-8x_3=0$$

將之以矩陣表示如下

$$\begin{bmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -10 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12.1}$$

使用克萊莫法則（參見 11.9 節），並求其各個所須之不同行列式，其中 $|A|=-10(28)+1(14)=-276\neq 0$，因爲本例中 $|A|$ 即爲一傑可比，且不等於零，故

此三條方程式爲函數性獨立，其它諸行列式值計算如下，

$$|A_1| = -10(28) + 1(-8) = -288 \quad |A_2| = -10(32) - (-10)(-2) + 1(4) = -336 \quad |A_3| = -10(8) - 10(4) = -120$$

因此 $\bar{x}_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{-288}{-276} \cong 1.04$ $\bar{x}_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{-336}{-276} \cong 1.22$ $\bar{x}_3 = \dfrac{|A_3|}{|A|} = \dfrac{-120}{-276} \cong 0.43$

取其二階偏導數以檢查二階條件，

$$\begin{array}{lll} y_{11} = -10 & y_{12} = 0 & y_{13} = 1 \\ y_{21} = 0 & y_{22} = -4 & y_{23} = 2 \\ y_{31} = 1 & y_{32} = 2 & y_{33} = -8 \end{array}$$

因此，

$$|H| = \begin{vmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix}$$

此行列式諸元素與（12.1）式之係數矩陣之元素相同，此乃因爲一階偏導數均爲線性之故，最後，應用赫辛之檢查法，檢查其第一、二與第三個主子行列式分別如下，

$$|H_1| = -10 < 0 \qquad |H_2| = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 40 > 0 \qquad |H_3| = |H| = |A| = -276 < 0$$

因爲其各主子行列式剛好正、負交替出現，故其赫辛行列式爲負肯定而此函數在 $\bar{x}_1 = 1.04$，$\bar{x}_2 = 1.22$ 與 $\bar{x}_3 = 0.43$ 時有極大值。

12.4 有限制條件時求極值之鑲邊的赫辛行列式

受制於限制式 $g(x, y)$ 求函數 $f(x, y)$ 之極值之問題在 5.8 節曾予討論，該節指出，建立一新的函數，即 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$，其一階條件爲 $F_x = F_y = F_\lambda = 0$。

其二階條件，則可以**鑲邊之赫辛行列式**（bordered Hessian）$|\bar{H}|$，即

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & g_x \\ F_{yx} & F_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{或} \qquad \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix}$$

它只不過是空白的赫辛行列式

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix}$$

鑲上限制式之一階導式及以 0 置於主對角線上。一鑲邊的主子行列式之序號（order）決定於其被鑲邊之主子行列式之序號，因此，上面所述 $|\bar{H}|$ 即代表鑲邊之主行列式

$|\bar{H}_2|$，因爲被鑲邊之主子行列式之維度爲（2×2）。

若一n變數之函數$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，受制於$g(x_1, x_2, \cdots, xn)$，則

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} & g_1 \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2n} & g_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \cdots & F_{nn} & g_n \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n & 0 \end{vmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} \\ g_2 & F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n & F_{n1} & F_{n2} & \cdots & F_{nn} \end{vmatrix}$$

其中$|\bar{H}| = |\bar{H}_n|$，因爲被鑲邊之主子行列式爲（$n \times n$）。

如果$|\bar{H}_2|$，$|\bar{H}_3|$，…，$|\bar{H}_n| < 0$，則此鑲邊的赫辛行列式爲正肯定，其爲極小值之充分條件，應注意的是，我們以$|\bar{H}_2|$而非$|\bar{H}_1|$檢查其二階條件。

如果$|\bar{H}_2| > 0$，$|\bar{H}_3| < 0$，$|\bar{H}_4| > 0$，等等，則此鑲邊的赫辛行列式爲負肯定，其爲極大值之充分條件，如果一已知之$|\bar{H}|$符合上述之準則，我們可予肯定。該函數有極值，反之，如果不符合上述準則，則我們必須進一步檢查其它項目（已超出本書範圍，在此不予討論），因爲上述準則只爲充分條件而非必要條件。

例題12.5

關於第五章之例16，我們在此可以使用鑲邊的赫辛行列式檢查函數極值之二階條件並判別Z爲極大或極小值，茲說明如下。

因爲$Z_{xx} = 8$，$Z_{yy} = 12$，$Z_{xy} = Z_{yx} = 3$，且由限制式知，$g_x = 1$，$g_y = 1$，

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 3 & 12 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

由第二個主子行列式$|\bar{H}_2|$開始，

$$|\bar{H}_2| = 8(-1) - 3(-1) + 1(3 - 12) = -14$$

由於$|\bar{H}_2| < 0$，故$|\bar{H}|$爲正肯定，亦即Z有一極小值。

例題12.6

鑲邊的赫辛行列式亦可用來檢查9.11節所述一般化C-D生產函數求極大值之二階條件，茲說明如下：

因爲$Q_{KK} = -0.24K^{-1.6}L^{0.5}$，$Q_{LL} = -0.25K^{0.4}L^{-1.5}$，$Q_{KL} = Q_{LK} = 0.2K^{-0.6}L^{-0.5}$，且由限制式知，$g_K = 3$，$g_L = 4$，

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} -0.24K^{-1.6}L^{0.5} & 0.2K^{-0.6}L^{-0.5} & 3 \\ 0.2K^{-0.6}L^{-0.5} & -0.25K^{0.4}L^{-1.5} & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

由 $|\bar{H}_2|$ 開始，沿第三列展開此行列式，即

$$|\bar{H}_2| = 3(0.8K^{-0.6}L^{-0.5} + 0.75K^{0.4}L^{-1.5}) - 4(-0.96K^{-1.6}L^{0.5} - 0.6K^{-0.6}L^{-0.5})$$
$$= 2.25K^{0.4}L^{-1.5} + 4.8K^{-0.6}L^{-0.5} + 3.84K^{-1.6}L^{0.5} = \frac{2.25K^{0.4}}{L^{1.5}} + \frac{4.8}{K^{0.6}L^{0.5}} + \frac{3.84L^{0.5}}{K^{1.6}} > 0$$

由於 $|\bar{H}_2| > 0$，故 $|\bar{H}|$ 爲負肯定而 Q 有一極大值。

12-5 馬夏爾需求函數之導出

馬夏爾需求函數（Marshallian demand function）指出，一消費者對某財貨之購買量爲此商品價格與可支用所得的函數，馬夏爾需求函數之求取，乃受制於一預算限制式求取效用之極大值，即，已知 $u = Q_1Q_2$，受制於 $P_1Q_1 + P_2Q_2 = B$，其中 B = 預算或可支用所得，其拉格朗齊函數爲

$$U = Q_1Q_2 + \lambda(P_1Q_1 + P_2Q_2 - B)$$

因此

$$U_1 = Q_2 + \lambda P_1 = 0 \tag{12.2}$$
$$U_2 = Q_1 + \lambda P_2 = 0 \tag{12.3}$$
$$U_\lambda = P_1Q_1 + P_2Q_2 - B = 0 \tag{12.4}$$

聯立解 (12.2) 與 (12.3) 式可得

$$\frac{-Q_2}{P_1} = \lambda = \frac{-Q_1}{P_2}$$

因此，

$$\bar{Q}_2 = \frac{Q_1P_1}{P_2} \qquad \bar{Q}_1 = \frac{Q_2P_2}{P_1}$$

將 $Q_2 = Q_1P_1/P_2$ 代入 (12.4) 式，則

$$P_1Q_1 + \frac{P_2(Q_1P_1)}{P_2} = B \qquad \bar{Q}_1 = \frac{B}{2P_1}$$

同樣地，以 $Q_1 = Q_2P_2/P_1$ 代入 (12.4) 式可知

$$\bar{Q}_2 = \frac{B}{2P_2}$$

這些即爲 Q_1 與 Q_2 之馬夏爾需求函數，亦即，當受制於個人所得與商品價格之限制下，求其滿足之極大。

然後檢查其二階條件，其中 $U_{11} = 0$，$U_{22} = 0$，$U_{12} = U_{21} = 1$，$g_1 = \dot{P}_1$，與 $g_2 = P_2$，

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & P_1 \\ 1 & 0 & P_2 \\ P_1 & P_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|\bar{H}_2| = -1(-P_1P_2) + P_1(P_2) = 2P_1P_2 > 0$$

由於 $|\bar{H}_2| > 0$，故 $|\bar{H}|$ 爲負肯定而 U 有極大值。

例題 12.7

已知 $B = 250$，Q_1 在 $P_1 = 5$，10 與 25 之需求函數之導出根據前述之步驟例示如下：

當 $P_1 = 5$，　　$\bar{Q}_1 = \dfrac{250}{2(5)} = 25$

當 $P_1 = 10$，　　$\bar{Q}_1 = \dfrac{250}{2(10)} = 12.5$

當 $P_1 = 25$，　　$\bar{Q}_1 = \dfrac{250}{2(25)} = 5$

（因爲在此簡單的模型裡，每一種財貨之需求均決定於所得與財貨價格，故此二財貨之需求函數完全相同，關於較實際的函數關係，參見問題 12.54 - 55）。

12.6 投入一產出分析

於現代之經濟社會中，一財貨之生產往往需要許多其它財貨做爲投入，此即生產過程中之**中間財貨**（intermediate goods）。例如，鋼鐵之生產需要煤礦、鐵礦、電力等等。產品 i 之總需求 x 爲此產品之中間需求加上此產品之**最終需求**（final demand）b 之總和，其中最終需求指消費者，投資者，政府部門與出口部門，即最後之使用者而言，如果 a_{ij} 爲**技術係數**（technical coefficient），其意義爲，生產價值爲一元之第 j 種財貨所需第 i 種投入之價值謂之，則產品 i 之總需求以數學式表示如下：

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \cdots + a_{in}x_n + b_i$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, n$。如以矩陣形式表示則如下所示，

$$X = AX + B \tag{12.5}$$

其中

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

上式中，A稱爲技術係數矩陣，爲求得滿足最終需求之總產出（中間與最後財貨），我們可以技術係數矩陣與最終需求行向量之項來解X，因爲此二項均爲已知者，則由(12.5)式，可知

$$\begin{aligned} X - AX &= B \\ (I - A)X &= B \\ X &= (I - A)^{-1}B \end{aligned} \tag{12.6}$$

因此，對於一個三部門之經濟體系而言，

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

式中（$I-A$）矩陣稱爲**里昂迪夫矩陣**（Leontief matrix）。一般而言，於一完整的**投入－產出表**（input-output table）裡，勞動與資本被列入投入一項，並且構成廠商之**附加價值**（value added），同時在此模型中沿著任一行j將每一元素之垂直加總其和等於1：即縱行代表生產一單位或價值爲一元商品的投入成本，參見問題12.43。

例題12.8

已知技術係數矩陣A與最終需求向量B如下所示，試求產業1、2與3對x之最終需求，

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix}$$

由(12.6)式知，$X=(I-A)^{-1}B$，其中

$$(I-A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.4 & -0.1 \\ -0.5 & 0.8 & -0.6 \\ -0.1 & -0.3 & 0.9 \end{bmatrix}$$

取其反矩陣，

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{0.151} \begin{bmatrix} 0.54 & 0.39 & 0.32 \\ 0.51 & 0.62 & 0.47 \\ 0.23 & 0.25 & 0.36 \end{bmatrix}$$

代入(12.6)式，

$$X = \frac{1}{0.151} \begin{bmatrix} 0.54 & 0.39 & 0.32 \\ 0.51 & 0.62 & 0.47 \\ 0.23 & 0.25 & 0.36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.151} \begin{bmatrix} 24.3 \\ 30.5 \\ 17.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160.93 \\ 201.99 \\ 118.54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

12.7 特性根與特性向量

迄至目前爲止，赫辛矩陣與二次式之正、負肯定之判別，我們均以其主子行列式來檢定，本節將介紹以**特性根**（characteristic roots）檢定其正、負肯定之方法。已知一方陣 A，如果可能求得一向量 $V \neq 0$ 與一純量 C 使得

$$AV = cV \tag{12.7}$$

則純量 c 稱爲特性根；而向量 V 稱爲特性向量，另外（12.7）式亦可改寫爲

$$AV = cIV$$

將之重新整理使得

$$\begin{aligned} AV - cIV &= 0 \\ (A - cI)V &= 0 \end{aligned} \tag{12.8}$$

其中（$A - cI$）稱爲 A 之**特性矩陣**（characteristic matrix），因爲我們假設，$V \neq 0$，故此特性矩陣必爲奇異矩陣（參見問題 10.49），因爲其行列式值等於 0。例如一（3×3）矩陣 A，則

$$|A - cI| = \begin{vmatrix} a_{11} - c & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - c & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - c \end{vmatrix} = 0$$

由於（12.8）式中 $|A - cI| = 0$，故就 V 而言，將存在無限多組解。因此，爲求取一單一組解，我們必須進行**正規化**（normaized）之步驟，亦即，要求 V 中之每一元素 v_i 使得 $\Sigma v_i^2 = 1$，參見例 10。現在說明以特性根檢查正、負肯定之原則如下：

如果

(1) 全部的特性根（c）均爲正，則 A 爲正肯定。

(2) 全部的 c 爲負，則 A 爲負肯定。

(3) 全部的 c 爲非負，並且至少有一個 $c = 0$，則 A 爲**正的半肯定**（positive semidefinite）。

(4) 全部的 c 爲非正，並且至少有一個 $c = 0$，則 A 爲**負的半肯定**（negative semidefinite）。

(5) 部分 c 爲正而部分爲負，則無法確定。

例題 12.9

已知

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

求A之特性根，此時必須令特性矩陣（$A-cI$）之行列式爲0，亦即

$$|A-cI|=\begin{vmatrix}-6-c & 3\\ 3 & -6-c\end{vmatrix}=0 \tag{12.9}$$

$$(-6-c)(-6-c)-(3)(3)=0$$

$$c^2+12c+27=0 \qquad (c+9)(c+3)=0$$

$$c_1=-9 \qquad c_2=-3$$

檢查其正、負肯定，因爲兩特性根均爲負，故A爲負肯定。

例題12.10

繼續例9之討論，以第一個根$c_1=-9$代入（12.9）式以求特性向量，

$$\begin{bmatrix}-6-(-9) & 3\\ 3 & -6-(-9)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=0 \tag{12.10}$$

因爲係數矩陣爲線性相依，故（12.10）式可有無限多解，化簡此矩陣可得兩個完全相同之方程式：

$$3v_1+3v_2=0$$

以v_1項求解v_2，即

$$v_2=-v_1 \tag{12.11}$$

然後，將（12.11）式之解予以正規化，使得

$$v_1^2+v_2^2=1 \tag{12.12}$$

$v_2=-v_1$代入（12.12）式，可得

$$v_1^2+(-v_1)^2=1$$

故，$2v_1^2=1$，$v_1^2=\frac{1}{2}$，取其正的平方根，則$v_1=\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{0.5}$。由（12.11）式知，$v_2=-v_1$。因此，$v_2=-\sqrt{0.5}$因而第一個特性向量爲

$$V_1=\begin{bmatrix}\sqrt{0.5}\\ -\sqrt{0.5}\end{bmatrix}$$

其次使用第二個特性根$c_2=-3$求特性向量如下：

$$\begin{bmatrix}-6-(-3) & 3\\ 3 & -6-(-3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=0$$

此（2×2）矩陣乘以行向量，可得

$$-3v_1 + 3v_2 = 0$$
$$3v_1 - 3v_2 = 0$$

因此，$v_1 = v_2$，將之正規化，

$$v_1^2 + v_2^2 = 1$$
$$(v_2)^2 + v_2^2 = 1$$
$$2v_2^2 = 1$$
$$v_2 = \sqrt{0.5} \qquad v_1 = \sqrt{0.5}$$

因此
$$V_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} \end{bmatrix}$$

12.8 轉換矩陣

當我們求得特性向量V_1與V_2後，可再求得**轉換矩陣**（transformation matrix）以使得$T'AT$之乘積爲一**對角矩陣**（diagonal matrix）其中對角元素均爲特性根，例如，以一（3 × 3）矩陣爲例，

$$T'AT = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

例題12.11

使用例9與例10所知資料，則其轉換矩陣T爲

$$T = [V_1 \quad V_2] = \begin{bmatrix} \sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} \\ -\sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} \end{bmatrix} \qquad \text{且} \qquad T' = \begin{bmatrix} \sqrt{0.5} & -\sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} \end{bmatrix}$$

因此，
$$T'AT = \begin{bmatrix} \sqrt{0.5} & -\sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} \\ -\sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} \end{bmatrix}$$

其中
$$T'A = \begin{bmatrix} -9\sqrt{0.5} & 9\sqrt{0.5} \\ -3\sqrt{0.5} & -3\sqrt{0.5} \end{bmatrix}$$

故
$$T'AT = \begin{bmatrix} -18(0.5) & 0 \\ 0 & -6(0.5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

習題與解答

傑可比行列式

12.1 使用傑可比行列式檢定下列各方程式之函數性依存關係：

$$y_1 = 6x_1 + 4x_2$$
$$y_2 = 7x_1 + 9x_2$$

圖 取一階偏導數以建立傑可比行列式 $|J|$ ，

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=6 \qquad \frac{\partial y_1}{\partial x_2}=4 \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_1}=7 \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_2}=9$$

因此，
$$|J|=\begin{vmatrix}6 & 4\\ 7 & 9\end{vmatrix}=6(9)-7(4)=26$$

因爲 $|J|\neq 0$ ，故此方程組並非函數性相依，應注意的是，於一線性方程組中，$|J|$ 等於係數矩陣 A 之行列式 $|A|$ ，並且它們之每一個元素均相同，參見 11.1 節發現，以行列式檢查一矩陣是否非奇異之方法只不過是以傑可比來檢查線性方程組之應用罷。

12.2 已知

$$y_1=3x_1-4x_2$$
$$y_2=9x_1^2-24x_1x_2+16x_2^2$$

重新作問題 12.1 。

圖 一階偏導數爲

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=3 \qquad \frac{\partial y_1}{\partial x_2}=-4 \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_1}=18x_1-24x_2 \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_2}=-24x_1+32x_2$$

因此，
$$|J|=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 18x_1-24x_2 & -24x_1+32x_2\end{vmatrix}=3(-24x_1+32x_2)+4(18x_1-24x_2)=0$$

故存在函數性相依：$(3x_1-4x_2)^2=9x_1^2-24x_1x_2+16x_2^2$ 。

12.3 已知

$$y_1=x_1^2-3x_2+5$$
$$y_2=x_1^4-6x_1^2x_2+9x_2^2$$

重新作問題 12.1 。

圖
$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=2x_1 \qquad \frac{\partial y_1}{\partial x_2}=-3 \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_1}=4x_1^3-12x_1x_2 \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_2}=-6x_1^2+18x_2$$

$$|J|=\begin{vmatrix}2x_1 & -3\\ 4x_1^3-12x_1x_2 & -6x_1^2+18x_2\end{vmatrix}=2x_1(-6x_1^2+18x_2)+3(4x_1^3-12x_1x_2)=0$$

故此方程組爲函數性相依：$y_2=(y_1-5)^2$ ，其中

$$y_1-5=x_1^2-3x_2+5-5=x_1^2-3x_2$$

而
$$(x_1^2-3x_2)^2=x_1^4-6x_1^2x_2+9x^2$$

12.4 以傑可比行列式檢查下列各方程組之函數性依存關係。

圖 (*a*) $y_1=4x_1-x_2$

$y_2=16x_1^2+8x_1x_2+x_2^2$

$$|J|=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 32x_1+8x_2 & 8x_1+2x_2\end{vmatrix}=4(8x_1+2x_2)+1(32x_1+8x_2)=64x_1+16x_2\neq 0$$

此方程組爲函數性獨立。

(b) $y_1 = 1.5x_1^2 + 12x_1x_2 + 24x_2^2$

$y_2 = 2x_1 + 8x_2$

$$|J| = \begin{vmatrix} 3x_1 + 12x_2 & 12x_1 + 48x_2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8(3x_1 + 12x_2) - 2(12x_1 + 48x_2) = 0$$

此方程組中各函數相依，

(c) $y_1 = 4x_1^2 + 3x_2 + 9$

$y_2 = 16x_1^4 + 24x_1^2x_2 + 9x_2^2 + 12$

$$|J| = \begin{vmatrix} 8x_1 & 3 \\ 64x_1^3 + 48x_1x_2 & 24x_1^2 + 18x_2 \end{vmatrix} = 8x_1(24x_1^2 + 18x_2) - 3(64x_1^3 + 48x_1x_2) = 0$$

此方程組存在函數性相依。

判別式與二次函數之符號 - 肯定

12.5 使用判別式，判別下列各二次函數爲正或負肯定。

圖 (a) $y = -3x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$

因爲平方項之係數，放在主對角線上，而非平方項 x_1x_2 之係數則平均置於 a_{12} 與 a_{21} 之位置，故

$$|D| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

其中 $|D_1| = -3 < 0$ $|D_2| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-3)(-4) - (2)(2) = 8 > 0$

由於 $|D_1| < 0$ 而 $|D_2| > 0$，y 爲負肯定，因而對每一非零之 x_1 與 x_2 而言，y 將爲負。

(b) $y = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + 7x_2^2$

判別式爲 $|D| = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$

其中 $|D_1| = 5 > 0$ 而 $|D_2| = |D| = 5(7) - (-1)(-1) = 34 > 0$。由於 $|D_1| > 0$ 且 $|D_2| > 0$，故爲正肯定因而對每一非 0 之 x_1 與 x_2 而言，y 將爲正。

12.6 已知 $y = 5x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 8x_3^2 - 3x_1x_3$，重新作問題 12.5。

圖 對於三個變數之二次式而言，其判別式之元素組成如下：平方項之係數仍位於主對角線上，而 x_1x_2 之係數則平均置於 a_{12} 與 a_{21} 之位置，x_2x_3 之係數平均置於 a_{23} 與 a_{32} 之位置。故判別式，

$$|D| = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -1.5 \\ -3 & 3 & -1 \\ -1.5 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

其中 $|D_1| = 5 > 0$ $|D_2| = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 6 > 0$

而 $|D_3| = |D| = 5(23) + 3(-25.5) - 1.5(7.5) = 27.25 > 0$ 。因此，y 爲正肯定。

12.7 使用判別式求下列各函數之符號肯定。

圖 (*a*) $y = -2x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2 + 2x_2x_3 - 3x_3^2 + 2x_1x_3$

$$|D| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

其中 $|D_1| = -2 < 0$ $|D_2| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 6 > 0$

而 $|D_3| = |D| = -2(14) - 2(-7) + 1(7) = -7 < 0$ 。故 y 爲負肯定。

(*b*) $y = -7x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_3 - 4x_3^2 - 6x_1x_3$

$$|D| = \begin{vmatrix} -7 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

其中 $|D_1| = -7$ $|D_2| = \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 14$

而 $|D_3| = |D| = -7(7) - 3(-6) = -31$ 。故 y 爲負肯定。

求極值問題之赫辛行列式

12.8 使用(*a*)克萊莫法則求一階條件，(*b*)赫辛行列式檢查二階條件，求下列函數之極值。

$$y = 3x_1^2 - 5x_1 - x_1x_2 + 6x_2^2 - 4x_2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2 + 2x_3 - 3x_1x_3$$

圖 (*a*) 一階條件爲

$$\begin{aligned} y_1 &= 6x_1 - 5 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ y_2 &= -x_1 + 12x_2 - 4 + 2x_3 = 0 \\ y_3 &= 2x_2 + 8x_3 + 2 - 3x_1 = 0 \end{aligned} \tag{12.13}$$

以矩陣形式表之，$\begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 12 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

使用克萊莫法則，$|A| = 6(92) + 1(-2) - 3(34) = 448$ 。因爲 $|A|$

亦等於 $|J|$，故此函數爲函數性獨立，

$$|A_1| = 5(92) + 1(36) - 3(32) = 400$$
$$|A_2| = 6(36) - 5(-2) - 3(14) = 184$$
$$|A_3| = 6(-32) + 1(14) + 5(34) = -8$$

因此，$\bar{x}_1 = \frac{400}{448} \cong 0.89$　　$\bar{x}_2 = \frac{184}{448} \cong 0.41$　　$\bar{x}_3 = \frac{-8}{448} \cong -0.02$

(*b*) 對 (12.13) 式取二階偏導數以建立赫辛行列式來檢定其二階條件，

$$y_{11} = 6 \qquad y_{12} = -1 \qquad y_{13} = -3$$
$$y_{21} = -1 \qquad y_{22} = 12 \qquad y_{23} = 2$$
$$y_{31} = -3 \qquad y_{32} = 2 \qquad y_{33} = 8$$

因此，$$|H| = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -1 & 12 & 2 \\ -3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

其中 $|H_1| = 6 > 0$　　$|H_2| = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 12 \end{vmatrix} = 71 > 0$

並且 $|H_3| = |H| = |A| = 448 > 0$。由於 $|H|$ 爲正肯定，故 y 在臨界點上爲極小值。

12.9 已知 $y = -5x_1^2 + 10x_1 x_2 - 2x_2^2 + 4x_2 + 2x_2 x_3 - x_3^2$ 重新作問題12.8。

圖 (*a*)

$$y_1 = -10x_1 + 10 + x_3 = 0$$
$$y_2 = -4x_2 + 4 + 2x_3 = 0 \qquad (12.14)$$
$$y_3 = x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 0$$

以矩陣形式表之，$$\begin{bmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

使用克萊莫法則，
$$|A| = -10(28) - 1(4) = -276$$
$$|A_1| = -10(28) + 1(-8) = -288$$
$$|A_2| = -10(32) + 10(-2) + 1(4) = -336$$
$$|A_3| = -10(8) - 10(4) = -120$$

因此，$\bar{x}_1 = \frac{-288}{-276} \cong 1.04$　　$\bar{x}_2 = \frac{-336}{-276} \cong 1.22$　　$\bar{x}_3 = \frac{-120}{-276} \cong 0.43$

(*b*) 取 (12.14) 之二階偏導數以建立赫辛行列式，

$$|H| = \begin{vmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix}$$

其中 $|H_1| = -10 < 0$，$|H_2| = 40 > 0$，且 $|H_3| = |A| = -276 < 0$。因此，$|H|$ 爲負肯定而 y 爲極大值。

12.10 某一純粹競爭廠商生產兩種財貨Q_1與Q_2，其總收益與總成本函數如下：

$$TR = 15Q_1 + 18Q_2 \qquad TC = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 3Q_2^2$$

此兩種財貨在生產技術上是彼此相關的，因爲某一財貨之邊際成本將視另一財貨之產出水準而定（例如，$\partial TC/\partial Q_1 = 4Q_1 + 2Q_2$），使用(*a*)克萊莫法則於一階條件，(*b*)赫辛行列檢定其二階條件，求此廠商利潤之極大值。

解 (*a*) $\Pi = TR - TC = 15Q_1 + 18Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 3Q_2^2$

一階條件爲

$$\Pi_1 = 15 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0$$
$$\Pi_2 = 18 - 2Q_1 - 6Q_2 = 0$$

以矩陣表之

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -18 \end{bmatrix}$$

以克萊莫法則求解，

$$|A| = 24 - 4 = 20 \qquad |A_1| = 90 - 36 = 54 \qquad |A_2| = 72 - 30 = 42$$

因此，

$$\bar{Q}_1 = \frac{54}{20} = 2.7 \qquad \bar{Q}_2 = \frac{42}{20} = 2.1$$

(*b*) 使用赫辛行列式檢查其二階條件，

$$|H| = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}$$

其中$|H_1| = -4$且$|H_2| = 20$。由於$|H|$爲負肯定，故Π爲極大值。

12.11 使用問題12.10之技巧求某純粹競爭廠商之利潤極大值，假設此廠商所生產之財貨在生產技術上並不相關，且此廠商之總收益與總成本函數爲

$$TR = 7Q_1 + 9Q_2 \qquad TC = Q_1^2 + 2Q_1 + 5Q_2 + 2Q_2^2$$

(*a*)
$$\Pi = 7Q_1 + 9Q_2 - Q_1^2 - 2Q_1 - 5Q_2 - 2Q_2^2$$
$$\Pi_1 = 7 - 2Q_1 - 2 = 0 \qquad \bar{Q}_1 = 2.5$$
$$\Pi_2 = 9 - 5 - 4Q_2 = 0 \qquad \bar{Q}_2 = 1$$

(*b*)
$$|H| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$$

其中$|H_1| = -2$且$|H_2| = 8$，故$|H|$爲負肯定，故Π爲極大值。

12.12 某獨佔廠商生產兩相關之財貨

亦即 $P_1 = f(Q_1, Q_2)$

當這些財貨互爲替代財貨而其需求與總成本函數分別如下所示，

$$P_1 = 80 - 5Q_1 - 2Q_2 \qquad P_2 = 50 - Q_1 - 3Q_2 \qquad TC = 3Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$$

使用 (*a*) 克萊莫法則，(*b*) 赫辛行列式，如問題 12.10 者求此廠商之極大利潤。

圖 (*a*) $\Pi = TR - TC$，其中 $TR = P_1Q_1 + P_2Q_2$

$$\Pi = (80 - 5Q_1 - 2Q_2)Q_1 + (50 - Q_1 - 3Q_2)Q_2 - (3Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2)$$
$$= 80Q_1 + 50Q_2 - 4Q_1Q_2 - 8Q_1^2 - 5Q_2^2$$

$$\Pi_1 = 80 - 4Q_2 - 16Q_1 = 0 \qquad \Pi_2 = 50 - 4Q_1 - 10Q_2 = 0$$

以矩陣表示，

$$\begin{bmatrix} -16 & -4 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80 \\ -50 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 160 - 16 = 144 \qquad |A_1| = 800 - 200 = 600 \qquad |A_2| = 800 - 320 = 480$$

故

$$\bar{Q}_1 = \frac{600}{144} \cong 4.17 \qquad \bar{Q}_2 = \frac{480}{144} \cong 3.33$$

(*b*)

$$|H| = \begin{vmatrix} -16 & -4 \\ -4 & -10 \end{vmatrix}$$

其中 $|H_1| = -16$ 與 $|H_2| = 144$ 故 Π 爲極大值。

12.13 已知生產兩互爲替代財貨之生產其需求與總成本函數如下：

$$P_1 = 130 - 4Q_1 - Q_2 \qquad P_2 = 160 - 2Q_1 - 5Q_2 \qquad TC = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 4Q_2^2$$

使用 (*a*) 克萊莫法則求一階條件，(*b*) 赫辛行列式檢查其二階條件以使利潤極大。

圖 (*a*)

$$\Pi = (130 - 4Q_1 - Q_2)Q_1 + (160 - 2Q_1 - 5Q_2)Q_2 - (2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 4Q_2^2)$$
$$= 130Q_1 + 160Q_2 - 5Q_1Q_2 - 6Q_1^2 - 9Q_2^2$$

$$\Pi_1 = 130 - 5Q_2 - 12Q_1 = 0 \qquad \Pi_2 = 160 - 5Q_1 - 18Q_2 = 0$$

因此，

$$\begin{bmatrix} -12 & -5 \\ -5 & -18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -130 \\ -160 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 191$$

$$|A_1| = 1540 \qquad \bar{Q}_1 = \frac{1540}{191} \cong 8.06$$

$$|A_2| = 1270 \qquad \bar{Q}_2 = \frac{1270}{191} \cong 6.65$$

(*b*)

$$|H| = \begin{vmatrix} -12 & -5 \\ -5 & -18 \end{vmatrix}$$

$|H_1| = -12$ 且 $|H_2| = 191$。故 Π 爲極大值。

12.14 一獨佔廠商生產三種相關財貨，其需求與成本函數分別如下所示

$$P_1 = 180 - 3Q_1 - Q_2 - 2Q_3 \qquad P_2 = 200 - Q_1 - 4Q_2 \qquad P_3 = 150 - Q_2 - 3Q_3$$
$$TC = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + Q_2Q_3 + Q_3^2$$

重新作問題 12.13 。

圖 (a)
$$\Pi = (180 - 3Q_1 - Q_2 - 2Q_3)Q_1 + (200 - Q_1 - 4Q_2)Q_2 + (150 - Q_2 - 3Q_3)Q_3 - (Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + Q_2Q_3 + Q_3^2)$$
$$= 180Q_1 + 200Q_2 + 150Q_3 - 3Q_1Q_2 - 2Q_2Q_3 - 2Q_1Q_3 - 4Q_1^2 - 5Q_2^2 - 4Q_3^2$$
$$\Pi_1 = 180 - 3Q_2 - 2Q_3 - 8Q_1 = 0 \qquad \Pi_2 = 200 - 3Q_1 - 2Q_3 - 10Q_2 = 0$$
$$\Pi_3 = 150 - 2Q_2 - 2Q_1 - 8Q_3 = 0$$

以矩陣表示，

$$\begin{bmatrix} -8 & -3 & -2 \\ -3 & -10 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -180 \\ -200 \\ -150 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -8(76) + 3(20) - 2(-14) = -520$$
$$|A_1| = -180(76) + 3(1300) - 2(-1100) = -7580$$
$$|A_2| = -8(1300) + 180(20) - 2(50) = -6900$$
$$|A_3| = -8(1100) + 3(50) - 180(-14) = -6130$$

因此，
$$\bar{Q}_1 = \frac{-7580}{-520} \cong 14.58 \qquad \bar{Q}_2 = \frac{-6900}{-520} \cong 13.27 \qquad \bar{Q}_3 = \frac{-6130}{-520} \cong 11.79$$

(b)
$$|H| = \begin{vmatrix} -8 & -3 & -2 \\ -3 & -10 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{vmatrix}$$

其中 $|H_1| = -8$ ，$|H_2| = 71$ ，與 $|H_3| = |H| = |A| = -520$ 。故 Π 爲極大值。

12.15 如問題 12.14 者，已知

$$P_1 = 70 - 2Q_1 - Q_2 - Q_3 \qquad P_2 = 120 - Q_1 - 4Q_2 - 2Q_3 \qquad P_3 = 90 - Q_1 - Q_2 - 3Q_3$$
$$TC = Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 2Q_2Q_3 + Q_3^2 + Q_1Q_3$$

求利潤極大值。

圖 (a)
$$\Pi = 70Q_1 + 120Q_2 + 90Q_3 - 3Q_1Q_2 - 5Q_2Q_3 - 3Q_1Q_3 - 3Q_1^2 - 6Q_2^2 - 4Q_3^2$$
$$\Pi_1 = 70 - 3Q_2 - 3Q_3 - 6Q_1 = 0 \qquad \Pi_2 = 120 - 3Q_1 - 5Q_3 - 12Q_2 = 0$$
$$\Pi_3 = 90 - 3Q_1 - 5Q_2 - 8Q_3 = 0$$

因此，

$$\begin{bmatrix} -6 & -3 & -3 \\ -3 & -12 & -5 \\ -3 & -5 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -70 \\ -120 \\ -90 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -336$$
$$|A_1| = -2000 \qquad \bar{Q}_1 = \frac{-2000}{-336} \cong 5.95$$
$$|A_2| = -2160 \qquad \bar{Q}_2 = \frac{-2160}{-336} \cong 6.43$$
$$|A_3| = -1680 \qquad \bar{Q}_3 = \frac{-1680}{-336} = 5$$

(*b*) $$|H| = \begin{vmatrix} -6 & -3 & -3 \\ -3 & -12 & -5 \\ -3 & -5 & -8 \end{vmatrix}$$

其中 $|H_1| = -6$，$|H_2| = 63$，與 $|H_3| = |H| = |A| = -336$。故 Π 爲極大值。

12.16 已知 $Q = f(P)$，使用下列指定方法求利潤極大值，(*a*) 首先求需求之反函數，$P = f(Q)$，(*b*) 使用克萊莫法則求一階條件，(*c*) 以赫辛行列式檢查其二階條件，其需求函數與總成本函數分別如下：

$$Q_1 = 100 - 3P_1 + 2P_2 \qquad Q_2 = 75 + 0.5P_1 - P_2 \qquad \text{TC} = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$$

其中 Q_1 與 Q_2 互爲替代財貨，因爲正如兩需求方程式中所示，P_1 與 P_2 之符號相反（亦即，P_2 上昇，對 Q_1 之需求增加；反之，P_1 上昇，對 Q_2 之需求亦將增加）。

圖 (*a*) 因爲兩個市場互爲相關，故其需求之反函數必須以聯立方式求得，重新整理各項，使得 $P = f(Q)$，以便在求極大化 Π 時，P 只爲 Q 之函數，

$$-3P_1 + 2P_2 = Q_1 - 100$$
$$0.5P_1 - P_2 = Q_2 - 75$$

以矩陣表示，

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 - 100 \\ Q_2 - 75 \end{bmatrix}$$

使用克萊莫法則

$$|A| = 2$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} Q_1 - 100 & 2 \\ Q_2 - 75 & -1 \end{vmatrix} = -Q_1 + 100 - 2Q_2 + 150 = 250 - Q_1 - 2Q_2$$

$$P_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{250 - Q_1 - 2Q_2}{2} = 125 - 0.5Q_1 - Q_2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -3 & Q_1 - 100 \\ 0.5 & Q_2 - 75 \end{vmatrix} = -3Q_2 + 225 - 0.5Q_1 + 50 = 275 - 0.5Q_1 - 3Q_2$$

$$P_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{275 - 0.5Q_1 - 3Q_2}{2} = 137.5 - 0.25Q_1 - 1.5Q_2$$

(*b*) $$\Pi = (125 - 0.5Q_1 - Q_2)Q_1 + (137.5 - 0.25Q_1 - 1.5Q_2)Q_2 - (Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2)$$
$$= 125Q_1 + 137.5Q_2 - 3.25Q_1Q_2 - 1.5Q_1^2 - 2.5Q_2^2$$

$$\Pi_1 = 125 - 3.25Q_2 - 3Q_1 = 0 \qquad \Pi_2 = 137.5 - 3.25Q_1 - 5Q_2 = 0$$

因此，

$$\begin{bmatrix} -3 & -3.25 \\ -3.25 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -125 \\ -137.5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 4.4375$$

$$|A_1| = 178.125 \qquad \bar{Q}_1 = \frac{178.125}{4.4375} \cong 40.14$$

$$|A_2| = 6.25 \qquad \bar{Q}_2 = \frac{6.25}{4.4375} \cong 1.4$$

(c)
$$|H| = \begin{vmatrix} -3 & -3.25 \\ -3.25 & -5 \end{vmatrix}$$

$|H_1| = -3$，$|H_2| = |H| = |A| = 4.4375$，而 Π 爲極大值。

12.17 已知

$$Q_1 = 90 - 6P_1 - 2P_2 \qquad Q_2 = 80 - 2P_1 - 4P_2 \qquad TC = 2Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + 2Q_2^2$$

其中 Q_1 與 Q_2 爲互補財貨，因爲在兩需求方程式中，P_1 與 P_2 均爲同號。重新作問題 12.16 。

(a) 首先將需求函數轉換爲 $P = f(Q)$ 之形式，

$$\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 - 90 \\ Q_2 - 80 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 20$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} Q_1 - 90 & -2 \\ Q_2 - 80 & -4 \end{vmatrix} = -4Q_1 + 360 + 2Q_2 - 160 = 200 - 4Q_1 + 2Q_2$$

$$P_1 = \frac{200 - 4Q_1 + 2Q_2}{20} = 10 - 0.2Q_1 + 0.1Q_2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -6 & Q_1 - 90 \\ -2 & Q_2 - 80 \end{vmatrix} = -6Q_2 + 480 + 2Q_1 - 180 = 300 - 6Q_2 + 2Q_1$$

$$P_2 = \frac{300 - 6Q_2 + 2Q_1}{20} = 15 - 0.3Q_2 + 0.1Q_1$$

(b)
$$\Pi = (10 - 0.2Q_1 + 0.1Q_2)Q_1 + (15 - 0.3Q_2 - 0.1Q_1)Q_2 - (2Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + 2Q_2^2)$$
$$= 10Q_1 + 15Q_2 - 2.8Q_1Q_2 - 2.2Q_1^2 - 2.3Q_2^2$$

$$\Pi_1 = 10 - 2.8Q_2 - 4.4Q_1 = 0 \qquad \Pi_2 = 15 - 2.8Q_1 - 4.6Q_2 = 0$$

因此，

$$\begin{bmatrix} -4.4 & -2.8 \\ -2.8 & -4.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -15 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 12.4$$

$$|A_1| = 4 \qquad \bar{Q}_1 = \frac{4}{12.4} \cong 0.32$$

$$|A_2| = 38 \qquad \bar{Q}_2 = \frac{38}{12.4} \cong 3.06$$

(c)
$$|H| = \begin{vmatrix} -4.4 & -2.8 \\ -2.8 & -4.6 \end{vmatrix}$$

$|H_1| = -4.4$，$|H_2| = |A| = 12.4$，故 Π 爲極大值。

12.18 已知

$$Q_1 = 150 - 3P_1 + P_2 + P_3 \qquad Q_2 = 180 + P_1 - 4P_2 + 2P_3 \qquad Q_3 = 200 + 2P_1 + P_2 - 5P_3$$

$$\text{TC} = Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + Q_2Q_3 + Q_3^2 + Q_1Q_3$$

重新作問題 12.16 。

圖 (*a*) 首先求需求之反函數，

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 - 150 \\ Q_2 - 180 \\ Q_3 - 200 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -36$$

$$|A_1| = (Q_1 - 150)(20 - 2) - 1(-5Q_2 + 900 - 2Q_3 + 400) + 1(Q_2 - 180 + 4Q_3 - 800)$$
$$= -4980 + 18Q_1 + 6Q_2 + 6Q_3$$
$$P_1 = \frac{-4980 + 18Q_1 + 6Q_2 + 6Q_3}{-36} = 138.33 - 0.5Q_1 - 0.17Q_2 - 0.17Q_3$$

$$|A_2| = -3(-5Q_2 + 900 - 2Q_3 + 400) - (Q_1 - 150)(-5 - 4) + 1(Q_3 - 200 - 2Q_2 + 360)$$
$$= -5090 + 9Q_1 + 13Q_2 + 7Q_3$$
$$P_2 = \frac{-5090 + 9Q_1 + 13Q_2 + 7Q_3}{-36} = 141.39 - 0.25Q_1 - 0.36Q_2 - 0.19Q_3$$

$$|A_3| = -3(-4Q_3 + 800 - Q_2 + 180) - 1(Q_3 - 200 - 2Q_2 + 360) + (Q_1 - 150)(1 + 8)$$
$$= -4450 + 9Q_1 + 5Q_2 + 11Q_3$$
$$P_3 = \frac{-4450 + 9Q_1 + 5Q_2 + 11Q_3}{-36} = 123.61 - 0.25Q_1 - 0.14Q_2 - 0.31Q_3$$

(*b*)

$$\Pi = P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 - \text{TC}$$
$$= 138.33Q_1 + 141.39Q_2 + 123.61Q_3 - 1.42Q_1Q_2$$
$$- 1.33Q_2Q_3 - 1.42Q_1Q_3 - 1.5Q_1^2 - 2.36Q_2^2 - 1.31Q_3^2$$

$$\Pi_1 = 138.33 - 1.42Q_2 - 1.42Q_3 - 3Q_1 = 0$$
$$\Pi_2 = 141.39 - 1.42Q_1 - 1.33Q_3 - 4.72Q_2 = 0$$
$$\Pi_3 = 123.61 - 1.33Q_2 - 1.42Q_1 - 2.62Q_3 = 0$$

因此，

$$\begin{bmatrix} -3 & -1.42 & -1.42 \\ -1.42 & -4.72 & -1.33 \\ -1.42 & -1.33 & -2.62 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -138.33 \\ -141.39 \\ -123.61 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -22.37$$

$$|A_1| = -612.27 \qquad \bar{Q}_1 = \frac{-612.27}{-22.37} \cong 27.37$$

$$|A_2| = -329.14 \qquad \bar{Q}_2 = \frac{-329.14}{-22.37} \cong 14.71$$

$$|A_3| = -556.64 \qquad \bar{Q}_3 = \frac{-556.64}{-22.37} \cong 24.88$$

(*c*)

$$|H_1| = \begin{vmatrix} -3 & -1.42 & -1.42 \\ -1.42 & -4.72 & -1.33 \\ -1.42 & -1.33 & -2.62 \end{vmatrix}$$

$|H_1| = -3$ ，$|H_2| = 12.14$ ，與 $|H_3| = |A| = -22.37$ 。故 Π 爲極大值。

差別取價與需求彈性

注意：於本節中，各問題之參數爲方便計算均設定於較實際爲小之數值，但這並不影響其經濟意義。

12.19 某電話公司將其提供服務區分爲三種不同時段，其需求函數分別如下所示：

$$\begin{aligned} &\text{週日：} && Q_1 = 90 - 0.5P_1 \\ &\text{假日：} && Q_2 = 35 - 0.25P_2 \\ &\text{晚間：} && Q_3 = 30 - 0.2P_3 \end{aligned} \tag{12.15}$$

而 $TC = 25 + 20Q$ 其中 $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$。

由本題敍述可知，此獨佔者對不同需求時段採差別取價，因而此公司將對需求之價格彈性 $|\epsilon|$ 最小者索取最高之價格，以求得利潤極大，(*a*) 求利潤極大之產出水準，(*b*) 利潤極大之價格，(*c*) 每一個別市場之需求的價格彈性。以上均使用克萊莫法則求聯立方程組，並用赫辛行列式檢查其二階條件。

圖 (*a*) 由 (12.15) 式知，

$$P_1 = 180 - 2Q_1 \qquad P_2 = 140 - 4Q_2 \qquad P_3 = 150 - 5Q_3 \tag{12.16}$$

因此，

$$\begin{aligned} \Pi &= (180 - 2Q_1)Q_1 + (140 - 4Q_2)Q_2 + (150 - 5Q_3)Q_3 - (25 + 20Q_1 + 20Q_2 + 20Q_3) \\ &= 160Q_1 - 2Q_1^2 + 120Q_2 - 4Q_2^2 + 130Q_3 - 5Q_3^2 - 25 \end{aligned}$$

$$\Pi_1 = 160 - 4Q_1 = 0 \qquad \bar{Q}_1 = 40 \qquad \Pi_2 = 120 - 8Q_2 = 0 \qquad \bar{Q}_2 = 15$$
$$\Pi_3 = 130 - 10Q_3 = 0 \qquad \bar{Q}_3 = 13 \tag{12.17}$$

對 (12.17) 式取二階偏導數以建立赫辛行列式檢查其二階條件

$$|H| = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}$$

$|H_1| = -4$，$|H_2| = 32$，與 $|H_3| = -320$。故 Π 爲極大值。

(*b*) 將臨界值代入 (12.16) 式

$$\bar{P}_1 = 180 - 2(40) = 100 \qquad \bar{P}_2 = 140 - 4(15) = 80 \qquad \bar{P}_3 = 150 - 5(13) = 85$$

$$\epsilon_i = \frac{dQ_i}{dP_i}\frac{P_i}{Q_i}$$

對 (12.15) 式取導數，並以均衡價格與數量代入公式，

$$\epsilon_1 = -0.5\tfrac{100}{40} = -1.25 \qquad \epsilon_2 = -0.25\tfrac{80}{15} = -1.33 \qquad \epsilon_3 = -0.2\tfrac{85}{13} = -1.31$$

MS. 9553-5 B17

由上述可知，爲求取利潤極大值，此廠商將對市場 1 索取最高之價格（$P_1 = 100$），因爲其彈性 $|\epsilon|$ 最小（$|\epsilon_1| = |-1.25|$）；而對市場 2 索取價格最低（$P_2 = 80$），因爲其彈性 $|\epsilon|$ 最大（$|\epsilon_2| = |-1.33|$）。

12.20 某航空公司將其提供之飛行服務區分爲三種不同區段如下：

白天服務：$Q_1 = 12 - \frac{1}{12}P_1$

晚間二等艙：$Q_2 = 11 - \frac{1}{10}P_2$ (12.18)

緊急處理：$Q_3 = 13 - \frac{1}{8}P_3$

$$TC = 40 + 10Q + 0.5Q^2 \tag{12.19}$$

其中 $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ 重新作問題 12.19 。

圖 (*a*) 由（12.18）式知，

$$P_1 = 144 - 12Q_1 \qquad P_2 = 110 - 10Q_2 \qquad P_3 = 104 - 8Q_3 \tag{12.20}$$

$$\Pi = (144 - 12Q_1)Q_1 + (110 - 10Q_2)Q_2 + (104 - 8Q_3)Q_3 - TC$$

以 $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ 代入（12.19）式，

$$TC = 0.5Q_1^2 + Q_1Q_2 + 10Q_1 + 0.5Q_2^2 + Q_2Q_3 + 10Q_2 + 0.5Q_3^2 + Q_1Q_3 + 10Q_3 + 40$$

因此，

$$\Pi = -12.5Q_1^2 + 134Q_1 - Q_1Q_2 - 10.5Q_2^2 + 100Q_2 - Q_2Q_3 - 8.5Q_3^2 + 94Q_3 - Q_1Q_3 - 40$$

$$\Pi_1 = -25Q_1 + 134 - Q_2 - Q_3 = 0 \qquad \Pi_2 = -Q_1 - 21Q_2 + 100 - Q_3 = 0$$

$$\Pi_3 = -17Q_3 + 94 - Q_2 - Q_1 = 0 \tag{12.21}$$

因此，

$$\begin{bmatrix} -25 & -1 & -1 \\ -1 & -21 & -1 \\ -1 & -1 & -17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -134 \\ -100 \\ -94 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -8864$$

$$|A_1| = -44{,}224 \qquad \bar{Q}_1 = \frac{-44{,}224}{-8864} \cong 4.99$$

$$|A_2| = -38{,}000 \qquad \bar{Q}_2 = \frac{-38{,}000}{-8864} \cong 4.29$$

$$|A_3| = -44{,}176 \qquad \bar{Q}_3 = \frac{-44{,}176}{-8864} \cong 4.98$$

對（12.21）式取二階偏導數以建立赫辛行列式，

$$|H| = \begin{vmatrix} -25 & -1 & -1 \\ -1 & -21 & -1 \\ -1 & -1 & -17 \end{vmatrix}$$

$|H_1| = -25$，$|H_2| = 524$。與 $|H_3| = |A| = -8864$。故 Π 爲極大值。

(*b*) 以臨界值代入（12.20）式，可求得 $\bar{P}_1 = 84.12$, $\bar{P}_2 = 67.10$, 與 $\bar{P}_3 = 64.16$.

(*c*) $$\epsilon_i = \frac{dQ_i}{dP_i}\frac{P_i}{Q_i}$$

因此，

$$\epsilon_1 = \frac{-1}{12}\left(\frac{84.12}{4.99}\right) \cong -1.40 \qquad \epsilon_2 = \frac{-1}{10}\left(\frac{67.10}{4.29}\right) \cong -1.56 \qquad \epsilon_3 = -\frac{1}{8}\left(\frac{64.16}{4.98}\right) \cong -1.61$$

此航空公司將對彈性最小者索取最高之價格以求利潤極大。

12.21 某大學之社團，其社員之需求分別如下：

學生社員 $Q_1 = 46.67 - \frac{1}{6}P_1$

低年級社員 $Q_2 = 72.86 - \frac{1}{7}P_2$ (12.22)

高年級社員 $Q_3 = 80 - \frac{1}{8}P_3$

$$\mathrm{TC} = Q^2 + 30Q + 75 \tag{12.23}$$

其中 $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ 。

使用 MR = MC 之方法重新作問題 12.19 。

圖 (*a*) 由 (12.22) 式知，

$$P_1 = 280 - 6Q_1 \qquad P_2 = 510 - 7Q_2 \qquad P_3 = 640 - 8Q_3 \tag{12.24}$$

由於 $\mathrm{TR} = PQ$ ，

$$\mathrm{TR}_1 = 280Q_1 - 6Q_1^2 \qquad \mathrm{TR}_2 = 510Q_2 - 7Q_2^2 \qquad \mathrm{TR}_3 = 640Q_3 - 8Q_3^2 \tag{12.25}$$

分別對 (12.25) 與 (12.23) 式取導數以求其邊際收益與邊際成本（參見問題 4.13）。

$$\mathrm{MR}_1 = 280 - 12Q_1 \qquad \mathrm{MR}_2 = 510 - 14Q_2 \qquad \mathrm{MR}_3 = 640 - 16Q_3 \tag{12.26}$$

$$\mathrm{MC} = 30 + 2Q \tag{12.27}$$

以 $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ 代入 (12.27) 式，

$$\mathrm{MC} = 30 + 2Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3 \tag{12.27a}$$

爲求取極大利潤，在每一個別市場上其 MR = MC 。

$$\begin{aligned} 280 - 12Q_1 &= 30 + 2Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3 \\ 510 - 14Q_2 &= 30 + 2Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3 \\ 640 - 16Q_3 &= 30 + 2Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3 \end{aligned}$$

化簡如下：

$$\begin{aligned} 250 - 14Q_1 - 2Q_2 - 2Q_3 &= 0 \\ 480 - 2Q_1 - 16Q_2 - 2Q_3 &= 0 \\ 610 - 2Q_1 - 2Q_2 - 18Q_3 &= 0 \end{aligned} \tag{12.28}$$

以矩陣表之，

$$\begin{bmatrix} -14 & -2 & -2 \\ -2 & -16 & -2 \\ -2 & -2 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -250 \\ -480 \\ -610 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -3856$$

$$|A_1| = -38{,}560 \qquad \bar{Q}_1 = \frac{-38{,}560}{-3856} = 10$$

$$|A_2| = -96{,}400 \qquad \bar{Q}_2 = \frac{-96{,}400}{-3856} = 25$$

$$|A_3| = -115{,}680 \qquad \bar{Q}_3 = \frac{-115{,}680}{-3856} = 30$$

接著，檢查其二階條件，我們可對（12.28）式直接取二階偏導數，因爲（12.18）式代表MR減MC之式，此猶如直接對利潤函數取一階偏導數，因爲

$$\frac{d\Pi}{dQ} = \frac{dTR}{dQ} - \frac{dTC}{dQ} = MR - MC$$

因此，
$$|H| = \begin{vmatrix} -14 & -2 & -2 \\ -2 & -16 & -2 \\ -2 & -2 & -18 \end{vmatrix}$$

$|H_1| = -14$，$|H_2| = 220$，與$|H_3| = |A| = -3856$。故Π爲極大值。

(*b*) 將極值代入（12.24）式，可得$\bar{P}_1 = 220$，$\bar{P}_2 = 335$，與$\bar{P}_3 = 400$。

(*c*) $\epsilon_1 = -\frac{1}{3.67}$　$\epsilon_2 = -\frac{1}{1.91}$　$\epsilon_3 = -\frac{1}{1.67}$

12.22 MR與ϵ之關係式如下

$$MR = P\left(1 - \frac{1}{|\epsilon|}\right)$$

以此公式檢查問題12.21市場1之答案。

圖
$$MR_1 = 220\left(1 - \frac{1}{3.67}\right) \cong 160$$

比較之，首先以$\bar{Q}_1 = 10$代入（12.26）式，可得$MR_1 = 280 - 12(10) = 160$。

請讀者自行檢查MR_2與MR_3。

受限制條件下求極值之鑲邊的赫辛行列式

12.23 受制於預算限制式$3x + 4y = 90$，求$u = 2xy$之極大值，(*a*) 首先求其臨界值，(*b*) 再以鑲邊的赫辛行列式$|\bar{H}|$檢查其二階條件。

圖 (*a*) 拉格朗齊函數爲 $U = 2xy + \lambda(3x + 4y - 90)$

一階條件爲

$$U_x = 2y + 3\lambda = 0 \qquad U_y = 2x + 4\lambda = 0 \qquad U_\lambda = 3x + 4y - 90 = 0$$

以矩陣表示

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 90 \end{bmatrix} \tag{12.29}$$

以克萊莫法則求解，可得 $|A|=48$，$|A_1|=720$，$|A_2|=540$，與 $|A_3|=-360$。因此 $\bar{x}=15$，$\bar{y}=11.25$ 且 $\bar{\lambda}=-7.5$。

(*b*) 分別對U與限制式取 x 與 y 之二階偏導數以建立鑲邊的赫辛行列式。

$$U_{xx}=0 \qquad U_{yy}=0 \qquad U_{xy}=2=U_{yx} \qquad c_x=3 \qquad c_y=4$$

由 12.4 節知，

$$|\bar{H}|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad 或 \qquad |\bar{H}|=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|\bar{H}_2|=|\bar{H}|=-2(-12)+3(8)=48>0 \qquad |\bar{H}_2|=|\bar{H}|=-3(-8)+4(6)=48>0$$

鑲邊的赫辛行列式可爲上面二種形式之任一種形式，並且不影響主子行列式之值。應注意的是，如果目標函數爲雙線性或二次式而限制式爲線性式，則上述左邊之鑲邊赫辛行列式與（12.29）式中係數矩陣A完全相同，如此可簡化計算之次數，因爲 $|\bar{H}|$ 事實上完全等於 $|A|$。由於 $|\bar{H}|=|A|>0$，故由 12.4 節之規則可知 $|\bar{H}|$ 爲負肯定，因而U有極大值。

12.24 使用問題 12.23 之技巧極大化 $u=xy+x$ 其受制於預算限制式 $6x+2y=110$。

圖 (*a*)

$$U=xy+x+\lambda(6x+2y-110)$$

$$U_x=y+1+6\lambda=0 \qquad U_y=x+2\lambda=0 \qquad U_\lambda=6x+2y-110=0$$

以矩陣表示，

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 110 \end{bmatrix}$$

以克萊莫法則求解，則 $\bar{x}=9\frac{1}{3}$，$\bar{y}=27$ 與 $\bar{\lambda}=-4\frac{2}{3}$。

(*b*) 因爲 $U_{xx}=0$，$U_{yy}=0$，$U_{xy}=1=U_{yx}$，$c_x=6$ 與 $c_y=2$，

$$|\bar{H}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad |\bar{H}_2|=|\bar{H}|=|A|=24$$

由於 $|\bar{H}_2|>0$，故 $|\bar{H}|$ 爲負肯定，而U有極大值。

12.25 當某廠商受限於生產限額（g）等於 $2x+3y=60$，求此廠商總成本 $c=45x^2+90xy+90y^2$ 之極小值，即 (*a*) 求其臨界值，(*b*) 使用鑲邊赫辛行列式檢查二階條件。

圖 (a) $C = 45x^2 + 90xy + 90y^2 + \lambda(2x + 3y - 60)$

$C_x = 90x + 90y + 2\lambda = 0$ $C_y = 90x + 180y + 3\lambda = 0$ $C_\lambda = 2x + 3y - 60 = 0$

以矩陣表之，

$$\begin{bmatrix} 90 & 90 & 2 \\ 90 & 180 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix}$$

以克萊莫法則求解，則 $\bar{x} = 12$，$\bar{y} = 12$ 與 $\bar{\lambda} = -1080$。

(b) 因爲 $C_{xx} = 90$，$C_{yy} = 180$，$C_{xy} = 90 = C_{yx}$，$g_x = 2$，與 $g_y = 3$，

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 90 & 90 & 2 \\ 90 & 180 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$|\bar{H}_2| = -450$。由於 $|\bar{H}_2| < 0$，故 $|\bar{H}|$ 爲正肯定而 C 有極小值。

12.26 當某廠商受限於生產限額 $5x + 7y = 800$，試以問題 12.25 之技巧求此廠商總成本 $c = 3x^2 + 5xy + 6y^2$ 之極小值。

圖 (a) $C = 3x^2 + 5xy + 6y^2 + \lambda(5x + 7y - 800)$

$C_x = 6x + 5y + 5\lambda = 0$ $C_y = 5x + 12y + 7\lambda = 0$ $C_\lambda = 5x + 7y - 800 = 0$

聯立解之可得，$\bar{x} = 81.97$，$\bar{y} = 55.74$，與 $\bar{\lambda} = -154.1$。

(b) 由於 $C_{xx} = 6$，$C_{yy} = 12$，$C_{xy} = 5 = C_{yx}$，$g_x = 5$ 與 $g_y = 7$，

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 12 & 7 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$|\bar{H}_2| = 5(35 - 60) - 7(42 - 25) = -244$。因此，$|\bar{H}|$ 爲正肯定故 C 有極小值。

12.27 極大化效用 $u = x^{0.5}y^{0.3}$ 受制於預算限制式 $10x + 3y = 140$，重新作問題 12.25。

圖 (a) $U = x^{0.5}y^{0.3} + \lambda(10x + 3y - 140)$

$U_x = 0.5x^{-0.5}y^{0.3} + 10\lambda = 0$ $U_y = 0.3x^{0.5}y^{-0.7} + 3\lambda = 0$ $U\lambda = 10x + 3y - 140 = 0$

聯立解之可得正如 9.11 節所示者，$\bar{x} = 8.75$，$\bar{y} = 17.5$ 與 $\bar{\lambda} = -0.04$。

(b) 由於 $U_{xx} = -0.25x^{-1.5}y^{0.3}$，$U_{yy} = -0.21x^{0.5}y^{-1.7}$，$U_{xy} = U_{yx} = 0.15x^{-0.5}y^{-0.7}$，$g_x = 10$ 與 $g_y = 3$。

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} -0.25x^{-1.5}y^{0.3} & 0.15x^{-0.5}y^{-0.7} & 10 \\ 0.15x^{-0.5}y^{-0.7} & -0.21x^{0.5}y^{-1.7} & 3 \\ 10 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

沿第三行展開。

$$|\bar{H}_2| = 10(0.45x^{-0.3}y^{-0.7} + 2.1x^{0.5}y^{-1.7}) - 3(-0.75x^{-1.5}y^{0.3} - 1.5x^{-0.5}y^{-0.7})$$
$$= 21x^{0.5}y^{-1.7} + 9x^{-0.5}y^{-0.7} + 2.25x^{-1.5}y^{0.3} > 0$$

因爲 x 與 $y > 0$，並且一正數 x 之（$-n$）次方等於 $1/x^n > 0$，故 $|\bar{H}_3| > 0$，因而，$|\bar{H}|$ 爲負肯定則 U 爲極大值。

12.28 極大化效用 $u = x^{0.25}y^{0.4}$ 受制於預算限制式 $2x + 8y = 104$ 正如問題 12.27 者。

圖 (*a*)
$$U = x^{0.25}y^{0.4} + \lambda(2x + 8y - 104)$$
$$U_x = 0.25x^{-0.75}y^{0.4} + 2\lambda = 0 \qquad U_y = 0.4x^{0.25}y^{-0.6} + 8\lambda = 0 \qquad U_\lambda = 2x + 8y - 104 = 0$$

聯立解之可得，$\bar{x} = 20$，$\bar{y} = 8$ 與 $\bar{\lambda} = -0.03$。

(*b*)
$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} -0.1875x^{-1.75}y^{0.4} & 0.1x^{-0.75}y^{-0.6} & 2 \\ 0.1x^{-0.75}y^{-0.6} & -0.24x^{0.25}y^{-1.6} & 8 \\ 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

沿著第三列展開，

$$|\bar{H}_2| = 2(0.8x^{-0.75}y^{-0.6} + 0.48x^{0.25}y^{-1.6}) - 8(-1.5x^{-1.75}y^{0.4} - 0.2x^{-0.75}y^{-0.6})$$
$$= 0.96x^{0.25}y^{-1.6} + 3.2x^{-0.75}y^{-0.6} + 12x^{-1.75}y^{0.4} > 0$$

因此，$|\bar{H}|$ 爲負肯定而 U 有極大值。

12.29 某獨佔廠商生產兩互爲替代之財貨，其需求函數分別爲

$$x = 80 - 4P_x + 2P_y \qquad y = 110 + 2P_x - 6P_y$$

其總成本函數爲 $TC = 0.5x^2 + xy + y^2$。如果生產限額爲 $3x + 4y = 350$，則利潤極大之產出水準爲何？

圖 (*a*) 首先將需求函數轉化爲 $P = f(x, y)$，如問題 12.16 者，

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 80 \\ y - 110 \end{bmatrix}$$

由克萊莫法則可求得，

$$P_x = 35 - 0.3x - 0.1y \qquad P_y = 30 - 0.1x - 0.2y$$

因此，$\Pi = P_x x + P_y y - TC = 35x + 30y - 1.2xy - 0.8x^2 - 1.2y^2$

而其拉格朗齊表示式爲

$$\Pi = 35x + 30y - 1.2xy - 0.8x^2 - 1.2y^2 + \lambda(3x + 4y - 350)$$
$$\Pi_x = 35 - 1.2y - 1.6x + 3\lambda = 0$$
$$\Pi_y = 30 - 1.2x - 2.4y + 4\lambda = 0$$
$$\Pi_\lambda = 3x + 4y - 350 = 0$$

聯立解之，可得 $\bar{x} = 56.62$ ，$\bar{y} = 45.11$ 與 $\bar{\lambda} = 36.52$（此例中，由於有限額之限制，此廠商將遭逢虧損，又因爲 $\bar{\lambda} > 0$ ，故限額提高將導致Π減少或更大之損失，反之，限額減少的話，Π將增加或虧損縮小，參見5.9節）。

(*b*)
$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} -1.6 & -1.2 & 3 \\ -1.2 & -2.4 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$|\bar{H}_2| = 18.4$ 。因此，$|\bar{H}|$ 爲負肯定因而Π有極大值，亦即，損失最小。

12.30 受制於 $2xy = 337.5$ 求成本 $c = 3x + 4y$ 之極小值，使用問題12.25(*a*)與(*b*)之技巧，(*c*)討論本題答案與問題12.23之關係。

圖 (*a*)
$$C = 3x + 4y + \lambda(2xy - 337.5)$$

$$C_\lambda = 3 + 2\lambda y = 0 \qquad \lambda = -\frac{1.5}{y} \tag{12.30}$$

$$C_y = 4 + 2\lambda x = 0 \qquad \lambda = -\frac{2}{x} \tag{12.31}$$

$$C_\lambda = 2xy - 337.5 = 0 \tag{12.32}$$

由(12.30)與(12.31)式 λ 相等，故

$$-\frac{1.5}{y} = -\frac{2}{x}$$
$$y = 0.75x$$

代入(12.32)式，

$$2x(0.75x) = 337.5$$
$$1.5x^2 = 337.5$$
$$x^2 = 225 \qquad \bar{x} = 15$$

因此，$\bar{y} = 11.25$ 與 $\bar{\lambda} = -0.133$ 。

(*b*) 因爲 $C_{xx} = 0$ ，$C_{yy} = 0$ ，$C_{xy} = C_{yx} = 2\lambda$ ，並由限制式 $g_x = 2y$ 與 $g_y = 2x$ ，可知

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 2\lambda & 2y \\ 2\lambda & 0 & 2x \\ 2y & 2x & 0 \end{vmatrix}$$

$|\bar{H}_2| = -2\lambda(-4xy) + 2y(4x\lambda) = 16xy\lambda$ 。由於 $\bar{x}$ ，$\bar{y} > 0$ 與 $\bar{\lambda} < 0$ ，$|\bar{H}_2| < 0$ 。因此 $|\bar{H}|$ 爲正肯定，故 C 有極小值。

(*c*) 除了目標函數與限制式顚倒外，本題與問題12.23相同，於問題12.23中，目標函數爲 $u = 2xy$ ，限制式爲 $3x + 4y = 90$；而本題中目標函數爲 $c = 3x + 4y$ ，限制式爲 $2xy = 337.5$ 。因此，我們可在受預算限制條件下效用極大，亦可在一已知效用下求成本之最小。

12.31 當 $Q = 10K^{0.7}L^{0.1}$ 與 $P_K = 28$ ，$P_L = 10$ 求某廠商生產 434 單位產出時之最小成本，(*a*) 求其臨界值，(*b*) 使用鑲邊的赫辛行列式檢查其二階條件，(*c*) 檢查此答案是否與問題 9.38 相同。

圖 (*a*) 目標函數爲 $c = 28K + 10L$ 限制式爲 $10K^{0.7}L^{0.1} = 434$ 。因此，$C = 28K + 10L + \lambda(10K^{0.7}L^{0.1} - 434)$ 。

$$C_K = 28 + 7\lambda K^{-0.3}L^{0.1} = 0 \qquad \lambda = -4K^{0.3}L^{-0.1} \tag{12.33}$$

$$C_L = 10 + \lambda K^{0.7}L^{-0.9} = 0 \qquad \lambda = -10K^{-0.7}L^{0.9} \tag{12.34}$$

$$C_\lambda = 10K^{0.7}L^{0.1} - 434 = 0 \tag{12.35}$$

(12.33) 與 (12.34) 式中，由於 λ 相等，故

$$-4K^{0.3}L^{-0.1} = -10K^{-0.7}L^{0.9} \qquad K = 2.5L$$

代入 (12.35) 式，並使用對數表示之，

$$10(2.5)^{0.7}(L)^{0.7}L^{0.1} = 434 \qquad 19L^{0.8} = 434$$

$$\bar{L} = (22.8)^{1/0.8} = (22.8)^{1.25} \cong 50$$

因此 $\bar{K} = 125$ 與 $\bar{\lambda} = -11.5$ 。

(*b*) 因爲 $C_{KK} = -2.1\lambda K^{-1.3}L^{0.1}$ ，$C_{LL} = -0.9\lambda K^{0.7}L^{-1.9}$ ，$C_{KL} = C_{LK} = 0.7\lambda K^{-0.3}L^{-0.9}$ ，並由限制式知 $g_K = 7K^{-0.3}L^{0.1}$ 與 $g_L = K^{0.7}L^{-0.9}$ ，

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} -2.1\lambda K^{-1.3}L^{0.1} & 0.7\lambda K^{-0.3}L^{-0.9} & 7K^{-0.3}L^{0.1} \\ 0.7\lambda K^{-0.3}L^{-0.9} & -0.9\lambda K^{0.7}L^{-1.9} & K^{0.7}L^{-0.9} \\ 7K^{-0.3}L^{0.1} & K^{0.7}L^{-0.9} & 0 \end{vmatrix}$$

沿第三列展開，

$$|\bar{H}_2| = 7K^{-0.3}L^{0.1}(0.7\lambda K^{0.4}L^{-1.8} + 6.3\lambda K^{0.4}L^{-1.8}) - K^{0.7}L^{-0.9}(-2.1\lambda K^{-0.6}L^{-0.8} - 4.9K^{-0.6}L^{-0.8})$$
$$= 49\lambda K^{0.1}L^{-1.7} + 7\lambda K^{0.1}L^{-1.7} = 56\lambda K^{0.1}L^{-1.7}$$

由於 K ，$L > 0$ ，$\lambda < 0$ ，與 $|\bar{H}_2| < 0$ ，故 $|\bar{H}|$ 爲正肯定因而 C 爲最小值。

(*c*) 本題答案與問題 9.38 者相同，但是應注意當目標函數爲線性函數而限制不爲線性函數時，其求解之步驟有所不同，讀者亦請參見問題 12.32(*c*) 中以鑲邊的赫辛行列式處理問題 9.38 。

12.32 使用鑲邊的赫辛行列式檢查下列各題之二階條件 (*a*) 第六章之例 7 ，(*b*) 問題 9.37 ，(*c*) 問題 9.38 。

圖 (*a*)

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 16 & -1 & 1 \\ -1 & 24 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$|\bar{H}_2| = 1(-1-24) - 1(16+1) = -42$ 。由於 $|\bar{H}_2| < 0$ ，故 $|\bar{H}|$

爲正肯定因而C有極小值。

(b)
$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} -0.21K^{-1.7}L^{0.5} & 0.15K^{-0.7}L^{-0.5} & 6 \\ 0.15K^{-0.7}L^{-0.5} & -0.25K^{0.3}L^{-1.5} & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|\bar{H}_2| = 6(0.30K^{-0.7}L^{-0.5} + 1.5K^{0.3}L^{-1.5}) - 2(-0.42K^{-1.7}L^{0.5} - 0.9K^{-0.7}L^{-0.5})$$
$$= 9K^{0.3}L^{-1.5} + 3.6K^{-0.7}L^{-0.5} + 0.84K^{-1.7}L^{0.5} > 0$$

由於$|\bar{H}_2| > 0$，故$|\bar{H}|$爲負肯定因而Q爲極大值。

(c)
$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} -2.1K^{-1.3}L^{0.1} & 0.7K^{-0.3}L^{-0.9} & 28 \\ 0.7K^{-0.3}L^{-0.9} & -0.9K^{0.7}L^{-1.9} & 10 \\ 28 & 10 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|\bar{H}_2| = 28(7K^{-0.3}L^{-0.9} + 25.2K^{0.7}L^{-1.9}) - 10(-21K^{-1.3}L^{0.1} - 19.6K^{-0.3}L^{-0.9})$$
$$= 705.6K^{0.7}L^{-1.9} + 392K^{-0.3}L^{-0.9} + 210K^{-1.3}L^{0.1} > 0$$

由於$|\bar{H}_2| > 0$。故$|\bar{H}|$爲負肯定因而Q爲極大值。

投入－產出分析

12.33 已知技術係數矩陣A與最終需求向量B如下所示，試分別求產業1，2與3之總需求。

$$A = \begin{array}{c} \text{產出產業} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \text{投入產業} \qquad B = \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 210 \end{bmatrix}$$

解 由(12.6)式知，總需求之向量爲$X = (I - A)^{-1}B$，其中

$$(I - A) = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 \\ -0.3 & -0.5 & 0.8 \end{bmatrix}$$

取$(I - A)$之反矩陣，

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0.239}\begin{bmatrix} 0.57 & 0.34 & 0.27 \\ 0.41 & 0.58 & 0.32 \\ 0.47 & 0.49 & 0.60 \end{bmatrix}$$

代入$X = (I - A)^{-1}B$，

$$X = \frac{1}{0.239}\begin{bmatrix} 0.57 & 0.34 & 0.27 \\ 0.41 & 0.58 & 0.32 \\ 0.47 & 0.49 & 0.60 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 210 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.239}\begin{bmatrix} 210.2 \\ 244.7 \\ 294.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 879.50 \\ 1023.85 \\ 1232.22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

12.34 於問題 12.33中如果產業 1 ，2 與 3 之最終需求分別增加 40 ，20 與 25 ，求 X_2 之新的總需求水準。

$$\Delta X = (I - A)^{-1}\Delta B$$

$$\Delta X = \frac{1}{0.239}\begin{bmatrix}0.57 & 0.34 & 0.27\\ 0.41 & 0.58 & 0.32\\ 0.47 & 0.49 & 0.60\end{bmatrix}\begin{bmatrix}40\\ 20\\ 25\end{bmatrix} = \frac{1}{0.239}\begin{bmatrix}36.35\\ 36.00\\ 43.60\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}152.09\\ 150.63\\ 182.43\end{bmatrix}$$

$$X_2 = X_1 + \Delta X = \begin{bmatrix}879.50\\ 1023.85\\ 1232.22\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}152.09\\ 150.63\\ 182.43\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1031.09\\ 1174.48\\ 1414.65\end{bmatrix}$$

12.35 已知技術係數矩陣 A 與最終需求向量 B 如下所示，試分別求產業 1 ，2 與 3 之總需求。

$$A = \begin{array}{c} \text{產出產業}\\ 1\quad 2\quad 3 \end{array}\begin{bmatrix}0.4 & 0.3 & 0.1\\ 0.2 & 0.2 & 0.3\\ 0.2 & 0.4 & 0.2\end{bmatrix}\begin{array}{l}1\\ 2\\ 3\end{array}\quad \text{投入產業} \qquad B = \begin{bmatrix}140\\ 220\\ 180\end{bmatrix}$$

$$X = (I - A)^{-1}B$$

其中

$$(I - A) = \begin{bmatrix}0.6 & -0.3 & -0.1\\ -0.2 & 0.8 & -0.3\\ -0.2 & -0.4 & 0.8\end{bmatrix}$$

其反矩陣爲

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0.222}\begin{bmatrix}0.52 & 0.28 & 0.17\\ 0.22 & 0.46 & 0.20\\ 0.24 & 0.30 & 0.42\end{bmatrix}$$

因此，

$$X = \frac{1}{0.222}\begin{bmatrix}0.52 & 0.28 & 0.17\\ 0.22 & 0.46 & 0.20\\ 0.24 & 0.30 & 0.42\end{bmatrix}\begin{bmatrix}140\\ 220\\ 180\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}743.24\\ 756.76\\ 789.19\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

12.36 於問題 12.35中，如果產業 1 ，2 與 3 之最終需求分別增加 30 與減少 15 及 35 ，試求 X_2 之新的總需求。

$$\Delta X = (I - A)^{-1}\Delta B$$

$$\Delta X = \frac{1}{0.222}\begin{bmatrix}0.52 & 0.28 & 0.17\\ 0.22 & 0.46 & 0.20\\ 0.24 & 0.30 & 0.42\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30\\ -15\\ -35\end{bmatrix} = \frac{1}{0.222}\begin{bmatrix}5.45\\ -7.30\\ -12.00\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}24.55\\ -32.88\\ -54.05\end{bmatrix}$$

$$X_2 = X_1 + \Delta X = \begin{bmatrix}743.24\\ 756.76\\ 789.19\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}24.55\\ -32.88\\ -54.05\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}767.79\\ 723.88\\ 735.14\end{bmatrix}$$

12.37 已知產業間之交易需求表如下（以百萬元爲單位），求技術係數矩陣。

	產出部門					
投入部門	鋼鐵	煤	鐵	機械	最終需求	總需求
鋼鐵	80	20	110	230	160	600
煤	200	50	90	120	140	600
鐵	220	110	30	40	0	400
機械	60	140	160	240	400	1000
附加價值	40	280	10	370		
毛生產	600	600	400	1000		

圖 技術係數 a_{ij} 表示生產一單位或一元之產品 j 須投入幾單位或元之 i 要素，因此，a_{11} = 每生產值一元之鋼鐵中鋼鐵投入所佔之比例，a_{21} = 每生產一元之鋼鐵中，煤投入所佔之比例，a_{31} = 每生產一元之鋼鐵中鐵投入所佔之比例而 a_{41} = 每生產一元之鋼鐵中機械投入所佔之比例。由此可知，欲求技術係數，我們只須在任一行中以每一個元素除以該行最底端之毛生產值（而忽略掉附加價值），故

$$A=\begin{bmatrix} \frac{80}{600} & \frac{20}{600} & \frac{110}{400} & \frac{230}{1000} \\ \frac{200}{600} & \frac{50}{600} & \frac{90}{400} & \frac{120}{1000} \\ \frac{220}{600} & \frac{110}{600} & \frac{30}{400} & \frac{40}{1000} \\ \frac{60}{600} & \frac{140}{600} & \frac{160}{400} & \frac{240}{1000} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.133 & 0.033 & 0.275 & 0.23 \\ 0.333 & 0.083 & 0.225 & 0.12 \\ 0.367 & 0.183 & 0.075 & 0.04 \\ 0.10 & 0.233 & 0.40 & 0.24 \end{bmatrix}$$

12.38 試檢查問題 12.37 所求得之技術係數矩陣是否正確。

圖 爲檢查矩陣 A，我們可以此矩陣乘以總需求（X）之行向量，其乘積必須等於中間需求［即總需求（X）- 最終需求（B）］，但可能有些微之誤差。

$$AX=\begin{bmatrix} 0.133 & 0.033 & 0.275 & 0.23 \\ 0.333 & 0.083 & 0.225 & 0.12 \\ 0.367 & 0.183 & 0.075 & 0.04 \\ 0.10 & 0.233 & 0.40 & 0.24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 600 \\ 600 \\ 400 \\ 1000 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 439.6 \\ 459.6 \\ 400 \\ 599.8 \end{bmatrix}$$

$$X-B=\begin{bmatrix} 600 \\ 600 \\ 400 \\ 1000 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 160 \\ 140 \\ 0 \\ 400 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 440 \\ 460 \\ 400 \\ 600 \end{bmatrix}$$

12.39 已知產業間交易需求表如下，(*a*) 求技術係數矩陣，(*b*) 檢查你的答案是否正確。

	產出部門				
投入部門	1	2	3	最終需求	總需求
1	20	60	10	50	140
2	50	10	80	10	150
3	40	30	20	40	130
附加價值	30	50	20		
毛生產	140	150	130		

(*a*)
$$A=\begin{bmatrix}\frac{20}{140} & \frac{60}{150} & \frac{10}{130}\\ \frac{30}{140} & \frac{10}{150} & \frac{80}{130}\\ \frac{60}{140} & \frac{30}{150} & \frac{20}{130}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.143 & 0.4 & 0.077\\ 0.357 & 0.067 & 0.615\\ 0.286 & 0.2 & 0.154\end{bmatrix}$$

(*b*)
$$AX=\begin{bmatrix}0.143 & 0.4 & 0.077\\ 0.357 & 0.067 & 0.615\\ 0.286 & 0.2 & 0.154\end{bmatrix}\begin{bmatrix}140\\150\\130\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}90\\140\\90\end{bmatrix}$$

$$X-B=\begin{bmatrix}140\\150\\130\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}50\\10\\40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}90\\140\\90\end{bmatrix}$$

12.40 於問題 12.39中，如果第二年其產業 1，2 與 3 之最終需求分別爲 70，25 與 50，求新的總需求水準各爲多少？

$$X=(I-A)^{-1}B$$

其中 $(I-A)=\begin{bmatrix}0.857 & -0.4 & -0.077\\ -0.357 & 0.933 & -0.615\\ -0.286 & -0.2 & 0.846\end{bmatrix}$ 與 $(I-A)^{-1}=\frac{1}{0.354}\begin{bmatrix}0.666 & 0.354 & 0.318\\ 0.478 & 0.703 & 0.555\\ 0.338 & 0.286 & 0.657\end{bmatrix}$

因此，

$$X=\frac{1}{0.354}\begin{bmatrix}0.666 & 0.354 & 0.318\\ 0.478 & 0.703 & 0.555\\ 0.338 & 0.286 & 0.657\end{bmatrix}\begin{bmatrix}70\\25\\50\end{bmatrix}=\frac{1}{0.354}\begin{bmatrix}71.37\\78.79\\63.66\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}201.61\\222.57\\179.83\end{bmatrix}$$

12.41 於問題 12.39 中，如果我們已求得 $(I-A)$，試以 $(I-A)$ 檢查我們所求得之係數矩陣，亦即檢查是否 $(I-A)^{-1}B=X$。

$$(I-A)^{-1}B=\frac{1}{0.354}\begin{bmatrix}0.666 & 0.354 & 0.318\\ 0.478 & 0.703 & 0.555\\ 0.338 & 0.286 & 0.657\end{bmatrix}\begin{bmatrix}50\\10\\40\end{bmatrix}=\frac{1}{0.354}\begin{bmatrix}49.56\\53.13\\46.04\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}140\\150\\130\end{bmatrix}$$

12.42 於問題 12.39 中，假設附加價值一項完全由原始投入勞動構成，則共需多少的勞動投入才能分別獲得 (*a*) 問題 12.39，(*b*) 問題 12.40之最終需求？(*c*) 如果某經濟體系裡可用勞動只有 100，則其產出組合爲多少？

圖 (*a*) 問題 12.39 中爲求其勞動的技術係數 a_{L1}，我們只要將每一行之附加價值除以其生產毛額，亦即 $a_{L1}=\frac{30}{140}=0.214$，$a_{L2}=\frac{50}{150}=0.333$ 而 $a_{L3}=\frac{20}{130}=0.154$，則在已知之最終需求下所須勞動之投入將等於勞動之技術係數列乘以總需求行向量，因爲勞動亦必須投入於中間財貨之生產。因此，

$$L_1=[0.214 \quad 0.333 \quad 0.154]\begin{bmatrix}140\\150\\130\end{bmatrix}=99.93$$

(b) $$L_3 = [0.214 \quad 0.333 \quad 0.154]\begin{bmatrix}201.61\\222.57\\179.83\end{bmatrix} = 144.95$$

(c) 當全社會中只有100個勞動時，問題12.39可求得其最終需求，因爲 $99.93 < 100$，反之在問題12.40則無法求得最終需求因爲該社會沒有足夠之勞動資源以生產那麼多的財貨（在此所需之勞動爲 $144.95 > 100$）。

12.43 檢查問題12.42所求技術係數之正確性。

圖 求得問題12.39之勞動的技術係數後，即可確知其附加價值均來自勞動之投入，則技術係數之正確性將可很容易檢查之，因爲每一元之產出必須完全分攤於各種投入。因此，只要檢查每一行之技術係數相加是否等於1即可。

	1	2	3
1	0.143	0.4	0.077
2	0.357	0.067	0.615
3	0.286	0.2	0.154
附加價值(勞動)	0.214	0.333	0.154
	1.000	1.000	1.000

特性值、特性向量

12.44 使用特性值（特性根）判斷 $A = \begin{bmatrix}10 & 3\\3 & 4\end{bmatrix}$ 之符號－肯定。爲求 A 之特性根，特性矩陣（$A - cI$）之行列式必須等於0，亦即

$$|A - cI| = \begin{vmatrix}10-c & 3\\3 & 4-c\end{vmatrix} = 0$$

$$40 + c^2 - 14c - 9 = 0 \qquad c^2 - 14c + 31 = 0$$

使用二次式公式，

$$c = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 4(31)}}{2} = \frac{14 \pm 8.485}{2}$$

$$c_1 = 11.2425 \qquad c_2 = 2.7575$$

由於兩個特性根均爲正，故 A 爲正肯定。

12.45 已知 $A = \begin{bmatrix}-4 & -2\\-2 & -6\end{bmatrix}$，重新作問題12.44。

$$|A - cI| = \begin{vmatrix}-4-c & -2\\-2 & -6-c\end{vmatrix} = 0$$

$$24 + c^2 + 10c - 4 = 0 \qquad c^2 + 10c + 20 = 0$$

$$c = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4(20)}}{2} = \frac{-10 \pm 4.4721}{2}$$

$$c_1 = \frac{-5.5279}{2} = -2.764 \qquad c_2 = \frac{-14.4721}{2} = -7.236$$

由於兩個特性根均爲負，故A爲負肯定。

12.46 已知 $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$，重新作問題 12.44 。

$$|A - cI| = \begin{vmatrix} 6-c & 2 \\ 2 & 2-c \end{vmatrix} = 0$$

$$12 + c^2 - 8c - 4 = 0 \qquad c^2 - 8c + 8 = 0$$

$$c = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(8)}}{2} = \frac{8 \pm 5.66}{2}$$

$$c_1 = 1.17 \qquad c_2 = 6.83$$

A爲正肯定。

12.47 已知 $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，重新作問題 12.44 。

$$|A - cI| = \begin{vmatrix} 4-c & 6 & 3 \\ 0 & 2-c & 5 \\ 0 & 1 & 3-c \end{vmatrix} = 0$$

沿著第一行展開，

$$|A - cI| = (4-c)[(2-c)(3-c) - 5] = 0 \tag{12.36}$$

$$-c^3 + 9c^2 - 21c + 4 = 0 \tag{12.37}$$

爲求解(12.37)式，我們可使用三次方根之標準公式，或從(12.36)式分解因式知，

$$4 - c = 0 \qquad 或 \qquad (2-c)(3-c) - 5 = 0$$

因此，諸特性根爲

$$4 - c = 0 \qquad (2-c)(3-c) - 5 = 0$$

$$c_1 = 4 \qquad c^2 - 5c + 1 = 0$$

$$c = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4}}{2} = \frac{5 \pm 4.58}{2}$$

$$c_2 = 4.79 \qquad c_3 = 0.21$$

由於全部之三個特性根均爲正，故A爲正肯定。

12.48 已知 $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 13 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$，重新作問題 12.44 。

$$|A-cI|=\begin{vmatrix}6-c & 1 & 0\\ 13 & 4-c & 0\\ 5 & 1 & 9-c\end{vmatrix}=0$$

沿著第三行展開，

$$|A-cI|=(9-c)[(6-c)(4-c)-13]=0 \qquad (12.38)$$

$$-c^3+19c^2-101c+99=0 \qquad (12.39)$$

由（12.38）之因式分解可知，

$9-c=0$ 或 $(6-c)(4-c)-13=0$

因此，$c_1=9$ $\quad c^2-10c+11=0$

$$c=\frac{10\pm\sqrt{100-4(11)}}{2}=\frac{10\pm7.48}{2}$$

$c_2=8.74$ $\quad c_3=1.26$

由於全部之特性根均爲正，故A爲正肯定。

12.49 已知 $A=\begin{bmatrix}-5 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 0\\ 4 & 2 & -3\end{bmatrix}$ 重新作問題12.44。

$$|A-cI|=\begin{vmatrix}-5-c & 1 & 2\\ 0 & -2-c & 0\\ 4 & 2 & -3-c\end{vmatrix}=0$$

沿著第二列展開，

$$|A-cI|=(-2-c)[(-5-c)(-3-c)-8]=0$$

因此，$-2-c=0$ 或 $(-5-c)(-3-c)-8=0$

$c_1=-2$ $\quad c^2+8c+7=0$

$(c+7)(c+1)=0$

$c_2=-7$ $\quad c_3=-1$

由於全部之特性根均爲負，故A爲負肯定。

12.50 已知 $A=\begin{bmatrix}6 & 6\\ 6 & -3\end{bmatrix}$

求 (*a*) 特性根，(*b*) 特性向量，(*c*) 使用轉換矩陣檢查特性向量，其轉換矩陣形如

$$T'AT=\begin{bmatrix}c_1 & 0\\ 0 & c_2\end{bmatrix}$$

(*a*) $$|A-cI|=\begin{vmatrix}6-c & 6\\ 6 & -3-c\end{vmatrix}=0$$

$$-18 + c^2 - 3c - 36 = 0$$
$$c^2 - 3c - 54 = 0$$
$$(c-9)(c+6) = 0$$
$$c_1 = 9 \qquad c_2 = -6$$

由於一根爲正另一根爲負，故無法確定A之符號 - 肯定。

(*b*) 使用$c_1 = 9$求第一個特性向量V_1。

$$\begin{bmatrix} 6-9 & 6 \\ 6 & -3-9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$v_1 = 2v_2$$

如例 10 所示予以正規化，

$$(2v_2)^2 + v_2^2 = 1$$
$$5v_2^2 = 1$$
$$v_2 = \sqrt{0.2} \qquad v_1 = 2v_2 = 2\sqrt{0.2}$$

因此，
$$V_1 = \begin{bmatrix} 2\sqrt{0.2} \\ \sqrt{0.2} \end{bmatrix}$$

使用$c_2 = -6$求第二個特性向量，

$$\begin{bmatrix} 6-(-6) & 6 \\ 6 & -3-(-6) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$v_2 = -2v_1$$

正規化，

$$v_1^2 + (-2v_1)^2 = 1$$
$$5v_1^2 = 1$$
$$v_1 = \sqrt{0.2} \qquad v_2 = -2v_1 = -2\sqrt{0.2}$$

因此，
$$V_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{0.2} \\ -2\sqrt{0.2} \end{bmatrix}$$

(*c*)
$$T = [V_1 \quad V_2] = \begin{bmatrix} 2\sqrt{0.2} & \sqrt{0.2} \\ \sqrt{0.2} & 2\sqrt{0.2} \end{bmatrix}$$

因此，
$$T'AT = \begin{bmatrix} 2\sqrt{0.2} & \sqrt{0.2} \\ \sqrt{0.2} & -2\sqrt{0.2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\sqrt{0.2} & \sqrt{0.2} \\ \sqrt{0.2} & -2\sqrt{0.2} \end{bmatrix}$$

其中
$$T'A = \begin{bmatrix} 18\sqrt{0.2} & 9\sqrt{0.2} \\ -6\sqrt{0.2} & 12\sqrt{0.2} \end{bmatrix}$$

而
$$T'AT = \begin{bmatrix} 45(0.2) & 0 \\ 0 & -30(0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

12.51 已知 $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$，重新作問題 12.50。

圖 (a)
$$|A-cI| = \begin{vmatrix} 6-c & 3 \\ 3 & -2-c \end{vmatrix} = 0$$
$$c^2 - 4c - 21 = 0$$
$$c_1 = 7 \qquad c_2 = -3$$

由於 $c_1 > 0$ 與 $c_2 < 0$，A 無法確定。

(b) 使用 $c_1 = 7$ 求第一個特性向量，

$$\begin{bmatrix} 6-7 & 3 \\ 3 & -2-7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$v_1 = 3v_2$$

予以正規化，
$$(3v_2)^2 + v_2^2 = 1$$
$$9v_2^2 + v_2^2 = 1$$
$$10v_2^2 = 1$$
$$v_2 = \sqrt{0.1} \qquad \text{且} \qquad v_1 = 3v_2 = 3\sqrt{0.1}$$

因此，
$$V_1 = \begin{bmatrix} 3\sqrt{0.1} \\ \sqrt{0.1} \end{bmatrix}$$

使用 $c_2 = -3$，

$$\begin{bmatrix} 6-(-3) & 3 \\ 3 & -2-(-3) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$v_2 = -3v_1$$

予以正規化，
$$v_1^2 + (-3v_1)^2 = 1$$
$$10v_1^2 = 1$$
$$v_1 = \sqrt{0.1} \qquad \text{且} \qquad v_2 = -3v_1 = -3\sqrt{0.1}$$

因此，
$$V_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{0.1} \\ -3\sqrt{0.1} \end{bmatrix}$$

(c) 檢驗之，
$$T'AT = \begin{bmatrix} 3\sqrt{0.1} & \sqrt{0.1} \\ \sqrt{0.1} & -3\sqrt{0.1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\sqrt{0.1} & \sqrt{0.1} \\ \sqrt{0.1} & -3\sqrt{0.1} \end{bmatrix}$$

其中
$$T'A = \begin{bmatrix} 21\sqrt{0.1} & 7\sqrt{0.1} \\ -3\sqrt{0.1} & 9\sqrt{0.1} \end{bmatrix}$$

而
$$T'AT = \begin{bmatrix} 21\sqrt{0.1} & 7\sqrt{0.1} \\ -3\sqrt{0.1} & 9\sqrt{0.1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\sqrt{0.1} & \sqrt{0.1} \\ \sqrt{0.1} & -3\sqrt{0.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

12.52 使用 (a) 問題 12.50 與 (b) 問題 12.51 之資料證明特性向量爲正規正交 (orthonormal)，亦即 $V_i' V_i = 1$。

圖 (a)
$$V_1'V_1 = [2\sqrt{0.2} \quad \sqrt{0.2}]\begin{bmatrix} 2\sqrt{0.2} \\ \sqrt{0.2} \end{bmatrix} = 4(0.2) + 0.2 = 1$$

$$V_2'V_2 = [\sqrt{0.2} \quad -2\sqrt{0.2}]\begin{bmatrix} \sqrt{0.2} \\ -2\sqrt{0.2} \end{bmatrix} = 0.2 + 4(0.2) = 1$$

(b)
$$V_1'V_1 = [3\sqrt{0.1} \quad \sqrt{0.1}]\begin{bmatrix} 3\sqrt{0.1} \\ \sqrt{0.1} \end{bmatrix} = 9(0.1) + 0.1 = 1$$

$$V_2'V_2 = [\sqrt{0.1} \quad -3\sqrt{0.1}]\begin{bmatrix}\sqrt{0.1}\\ -3\sqrt{0.1}\end{bmatrix} = 0.1 + 9(0.1) = 1$$

12.53 由問題12.52證明特性向量爲正交(orthogonal)，亦即$V_i'V_j = 0$。

(*a*)
$$V_1'V_2 = [2\sqrt{0.2} \quad \sqrt{0.2}]\begin{bmatrix}\sqrt{0.2}\\ -2\sqrt{0.2}\end{bmatrix} = 2(0.2) - 2(0.2) = 0$$

(*b*)
$$V_1'V_2 = [3\sqrt{0.1} \quad \sqrt{0.1}]\begin{bmatrix}\sqrt{0.1}\\ -3\sqrt{0.1}\end{bmatrix} = 3(0.1) - 3(0.1) = 0$$

需求函數之建立

12.54 已知效用函數與預算限制分別爲

$$u = 3x + xy + 2y \qquad P_x x + P_y y = B$$

(*a*) 試據以建立馬夏爾需求函數。

(*b*) 試估計在$P_x = 2$，4時對x之需求，當$B = 60$，$P_y = 4$。

(*c*) 試估計在$P_y = 2$，4時對y之需求，當$B = 60$，$P_x = 4$。

圖 (*a*) 首先寫出其拉格朗齊表示式並取其一階偏導數，

$$U = xy + 3x + 2y + \lambda(P_x x + P_y y - B)$$

$$U_x = y + 3 + \lambda P_x = 0 \qquad U_y = x + 2 + \lambda P_y = 0 \qquad U_\lambda = P_x x + P_y y - B = 0$$

以矩陣表之

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & P_x\\ 1 & 0 & P_y\\ P_x & P_y & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ \lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\ -2\\ B\end{bmatrix}$$

使用克萊莫法則求解，$|A| = -1(-P_x P_y) + P_x(P_y) = 2P_x P_y$。沿著第三行展開，

$$|A_1| = \begin{vmatrix}-3 & 1 & P_x\\ -2 & 0 & P_y\\ B & P_y & 0\end{vmatrix} = P_x(-2P_y) - P_y(-3P_y - B)$$

$$\bar{x} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-2P_x P_y + 3P_y^2 + P_y B}{2P_x P_y} = \frac{B - 2P_x + 3P_y}{2P_x}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix}0 & -3 & P_x\\ 1 & -2 & P_y\\ P_x & B & 0\end{vmatrix} = P_x(B + 2P_x) - P_y(3P_x)$$

$$\bar{y} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{BP_x + 2P_x^2 - 3P_x P_y}{2P_x P_y} = \frac{B + 2P_x - 3P_y}{2P_y}$$

檢查其二階條件，

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & P_x \\ 1 & 0 & P_y \\ P_x & P_y & 0 \end{vmatrix} = |A| = 2P_xP_y > 0$$

因此 $|\bar{H}|$ 爲負肯定而U爲極大值。

(*b*) 已知$B = 60$，$P_y = 4$，並且由上面得知

$$x = \frac{B - 2P_x + 3P_y}{2P_x}$$

當 $P_x = 2$，
$$x = \frac{60 - 2(2) + 3(4)}{2(2)} = \frac{68}{4} = 17$$

當 $P_x = 4$，
$$x = \frac{60 - 2(4) + 3(4)}{2(4)} = \frac{64}{8} = 8$$

(*c*) 當 $B = 60$，$P_x = 4$，

$$y = \frac{B + 2P_x - 3P_y}{2P_y}$$

當 $P_y = 2$，
$$y = \frac{60 + 2(4) - 3(2)}{2(2)} = \frac{62}{4} = 15.5$$

當 $P_y = 4$，
$$y = \frac{60 + 2(4) - 3(4)}{2(4)} = \frac{56}{8} = 7$$

12.55 (*a*) 已知$u = 2x + 2xy + 5y$，$P_xx + P_yy = B$，試導出馬夏爾需求函數。

(*b*) 試估計當$B = 100$，$P_x = 2$且$P_y = 10$時對x與y之需求。

圖 (*a*)

$$U = 2xy + 2x + 5y + \lambda(P_xx + P_yy - B)$$

$$U_x = 2y + 2 + \lambda P_x = 0 \qquad U_y = 2x + 5 + \lambda P_y = 0 \qquad U_\lambda = P_xx + P_yy - B = 0$$

以矩陣表之，

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & P_x \\ 2 & 0 & P_y \\ P_x & P_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ B \end{bmatrix}$$

以克萊莫法則求解，$|A| = -2(-P_xP_y) + P_x(2P_y) = 4P_xP_y$。沿著第三行展開，

$$|A_1| = P_x(-5P_y) - P_y(-2P_y - 2B)$$

$$\bar{x} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-5P_xP_y + 2P_y^2 + 2P_yB}{4P_xP_y} = \frac{2B - 5P_x + 2P_y}{4P_x}$$

$$|A_2| = P_x(2B + 5P_x) - P_y(2P_x)$$

$$\bar{y} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{2P_xB + 5P_x^2 - 2P_xP_y}{4P_xP_y} = \frac{2B + 5P_x - 2P_y}{4P_y}$$

檢查其二階條件，

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & P_x \\ 2 & 0 & P_y \\ P_x & P_y & 0 \end{vmatrix} = |A| = 4P_xP_y > 0$$

故 $|\bar{H}|$ 爲負肯定而 U 爲極大值。

(*b*) 當 $B = 100$ ，$P_x = 2$ ，且 $P_y = 10$ 時，

$$\bar{x} = \frac{2(100) - 5(2) + 2(10)}{4(2)} = 26.25 \qquad \bar{y} = \frac{2(100) + 5(2) - 2(10)}{4(10)} = 4.75$$

第十三章

線性規劃：圖形方法

13-1 圖 解

線性規劃之目標在於求解稀少資源在各種競爭產品或活動之**最適分配**（optimal allocation），在經濟問題中，我們經常碰到受制於某些不等限制式而求函數之最適化的問題，對於受制於單一不等限制式之最適化問題，我們可以用拉格朗齊方法而予簡單的處理（參見6.7節），但是當不等式限制式超過一個時，則使用**線性規劃**（linear programming）將更爲簡單，同時如果每個限制式所包含之變數只有兩個時，更可利用圖形分析方法求解，有關求極大值與極小值之圖解方法分別例示於例1與例2。

例題13.1

某製造業者生產餐桌（x_1）與書桌（x_2），平均每一個餐桌組合（A）須要2.5小時，磨光需要3小時，裝箱需要1小時，而每一個書桌組合需要1小時，磨光需要3小時，裝箱需要2小時，而此廠商每週總共能用來做組合工作者有20小時，做磨光工作者有30小時，而裝箱工作者爲16小時。另外，每個餐桌之利潤爲$3，每個書桌爲$4。

下面將以圖形分析法討論此廠商追求每週利潤極大之產出組合，共分4個步驟進行。

(1) 首先將上述資料以方程式或不等式表示之，則欲求極大值之函數，即目標函數爲

$$\Pi = 3x_1 + 4x_2 \tag{13.1}$$

受制於諸限制式，

A之限制式：$2.5x_1 + x_2 \leq 20$

B之限制式：$3x_1 + 3x_2 \leq 30$

C之限制式：$x_1 + 2x_2 \leq 16$

非負限制式：$x_1, x_2 \geq 0$

前面三個不等式稱爲**技術限制式**（technical constraints），乃決定於技術狀態與可用投入；第四個**非負限制式**（nonnegative constraint）乃事先將本題之解排除負值之可能。

(2) 其次，將不等限制式改寫爲方程式，以 x_1 項解得 x_2，並畫出圖形，亦即，

由 A，　　$x_2 = 20 - 2.5x_1$

由 B，　　$x_2 = 10 - x_1$

由 C，　　$x_2 = 8 - 0.5x_1$

原先之不等式“小於或等於”，表現在圖形者爲每一條方程式所代表曲線上或其左方諸點，參見圖 13-1 (*a*)，而非負限制式，$x_1, x_2 \geq 0$ 則分別代表其縱軸與橫軸。圖中陰影區域稱爲**可能區域**（feasible region），此區域包含了所有滿足以上四個限制式諸點。此外，x_1 與 x_2 稱爲**決策或結構變數**（decision or structural variables）。

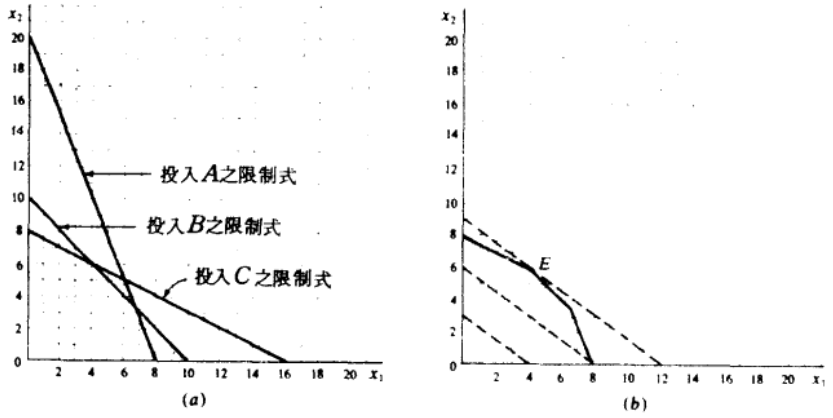


圖 13-1

(3) 如果**最適解**（optimal solution）存在的話，一定位於可能區域，此時，再將各條**等利潤**（isoprofit）線（即目標函數）畫出，由 (13.1) 式知其等利潤線爲

$$x_2 = \frac{\Pi}{4} - \frac{3}{4}x_1$$

亦即，等利潤線之斜率爲 $-\frac{3}{4}$，畫出一系列之（虛線）等利潤線，愈高者代表其利潤愈大，因此，我們必須求與可能區域接觸之最高的等利潤線，在此即爲 E 點，其中 $\bar{x}_1 = 4$ 與 $\bar{x}_2 = 6$，參見圖 13-6 (*b*)，代入 (13.1) 式，可知 $\bar{\Pi} = 3(4) + 4(6) = 36$。

(4) 由上面之討論可知，利潤之極大值必定發生在兩條限制式之交點［稱爲**極點**（extreme point）］。

13.2 極點定理

極點定理是指，如果一目標函數存在最適可能值，則此值一定發生在**邊界**（boundary）之極點或**角點**（corner）。由前節討論可知，在圖 13-1 (*a*)中其極點共有 10 個：（0，20），（0，10），（6，5），（10，0），（16，0），（0，8），（4，6），（7，3），（8，0）與（0，0），其中（0，0）乃非負限制式之交點，上述諸點稱爲**基本解**（basic solutions），惟只有前面五個點稱爲**基本可能解**（basic feasible solutions），因爲此五點均符合其四個限制式。一般而言，只有一個基本可能解爲最適解。例如，在上例中（7，3）之點時其 $\Pi = 3(7) + 4(3) = 33$ 小於 $\Pi = 36$ - 最適解。

例題 13.2

某農夫欲求得其牛群每日最少必須吸收養分 A，B 與 C 之飼料組合，其中每天需要養分 A 14，B 12 與 C 18，而飼料 y_1 含有 2 單位 A 及一單位之 B 與 C；飼料 y_2 含有一單位之 A 與 B 及 3 單位 C，y_1 之成本爲 \$2，y_2 之成本爲 \$4，以下我們將以圖形分析法求出，滿足每日最低養分需求之最小成本的 y_1 與 y_2 之組合，其步驟與例 1 相同，敍述如下：

(1) 欲求極小值之目標函數爲

$$c = 2y_1 + 4y_2 \qquad (13.2)$$

受制於下列限制式，

A 之限制式： $2y_1 + y_2 \geq 14$

B 之限制式： $y_1 + y_2 \geq 12$

C 之限制式： $y_1 + 3y_2 \geq 18$

非負限制式： $y_1, y_2 \geq 0$

其中技術限制式爲 $\geq$，因爲它代表最低之養分需求。

(2) 其次，將不等式改寫爲方程式，以 y_1 項解 y_2 並畫出其圖形，原先之不等式“大於或等於”表現在圖形者爲各限制式所代表曲線上或右方諸點，參見圖 13-2 (*a*)，陰影部分爲可能解區域，此區域包括所有滿足上述四個限制條件諸點。

(3) 爲求其最適解畫出其目標函數 —— 即一系列之**等成本線**（isocost lines），由（13.2）式可知其等成本線爲

$$y_2 = \frac{c}{4} - \frac{1}{2}y_1$$

與可能區域接觸之最低的等成本線將切於 $\bar{y}_1 = 9$ 與 $\bar{y}_2 = 3$ 處，參見圖 13-2 (*b*)，

因此，$\bar{c} = 2(9) + 4(3) = 30$ 。此點即爲所有可能極點中成本最低者，例如，在（2，10）時，$c = 2(2) + 4(10) = 44$ 。［在求極小值之問題中，（0，0）並不在可能區域內。

13-3 鬆弛變數或超額變數

如果變數超過兩個以上時，則我們無法再以前面兩節所述之圖形法求解，因爲此時線性不等式必須被轉換爲一組線性方程式，此時，我們必須於每一不等限制式分別加入一**鬆弛變數**（slack variable）或**超額變數**（surplus variable），參見例 3 。

一“小於或等於”之不等式，如 $5x_1 + 3x_2 \leq 30$ ，可以加上一鬆弛變數 $s \geq 0$ 而予轉化爲方程式，如 $5x_1 + 3x_2 + s = 30$ ，如果 $5x_1 + 3x_2 = 30$ ，此鬆弛變數 $s = 0$ 。反之，如果 $5x_1 + 3x_2 < 30$ ，則 $s > 0$ 且等於 $5x_1 + 3x_2$ 與 30 之差。

同理，一“大於或等於”之不等式，如 $4x_1 + 7x_2 \geq 60$ 可以減去一超額變數 $s \geq 0$ ，而予轉化爲方程式，如 $4x_1 + 7x_2 - s = 0$ ，如果 $4x_1 + 7x_2 = 6$ 則超額變數 $s = 0$ 。反之，如果 $4x_1 + 7x_2 > 60$ ，則 $s > 0$ ，且等於 $4x_1 + 7x_2$ 與 60 之差。

例題 13.3

因爲在例 1 中諸技術限制式爲“小於或等於”之不等式，因此，我們在每一條限制式加上鬆弛變數，如下所示：

$$2.5x_1 + x_2 + s_1 = 20 \qquad 3x_1 + 3x_2 + s_2 = 30 \qquad x_1 + 2x_2 + s_3 = 16$$

以矩陣表示，

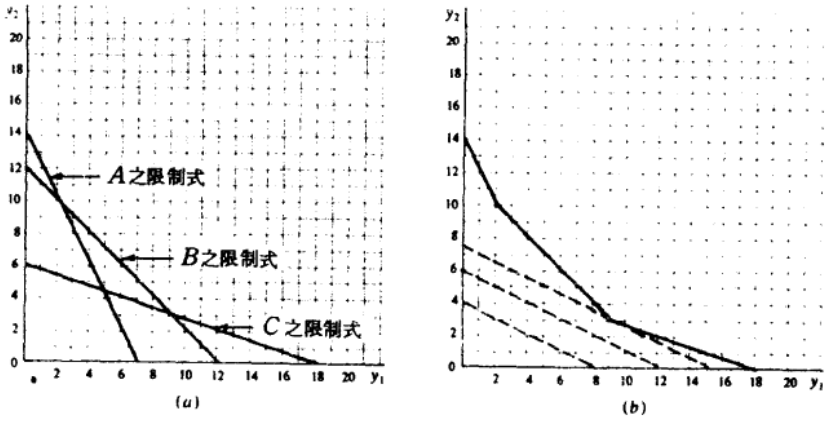


圖 13-2

$$\begin{bmatrix} 2.5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 16 \end{bmatrix}$$

相反的，例 2 之限制式均爲“大於或等於”之不等式，因此，我們減去超額變數如下所示：

$$2y_1 + y_2 - s_1 = 14 \qquad y_1 + y_2 - s_2 = 12 \qquad y_1 + 3y_2 - s_3 = 18$$

以矩陣表示，

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

13.4 基底定理

於一組 m 個相容方程式 n 個變數，其中 $n > m$，則此方程組有無限多解，但其極點數則有限。所謂基底定理（basis theorem）乃指稱，上述之情形下，其某一解中至少有 $n - m$ 個變數爲 0，而此解爲一極點。因此，假設我們令 $n - m$ 個變數等於 0 而解其餘之 m 個變數的 m 條方程式，則可求得一極點，或基本解。此外，基本解之數目的公式如下

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

其中 $n!$ 讀作 n 階層，參見例 4 。

例題 13.4

於例 3 中將不等式轉化爲方程式，其形式將變爲三個方程式與五個變數，則求(1)爲求得一基本解而必須令變數爲 0 之個數與(2)基本解之數目計算例示如下：

(1) 因爲本例有三個方程式與五個變數，則依據上述必須令 $n - m$ 個變數等於 0 以求得一基本解，亦即 5 − 3 或 2 個變數必須等於 0 以求得一基本解或極點。

(2) 使用求基本解數目之公式，$n!/[m!(n-m)!]$ 並代入已知之參數如下：

$$\frac{5!}{3!(2)!}$$

其中 $5! = 5(4)(3)(2)(1)$ 。因此，

$$\frac{5(4)(3)(2)(1)}{3(2)(1)(2)(1)} = 10$$

例題 13.5

關於例 3 中，有些基本解不必經由代數之運算即可看出其答案。

於第一個矩陣中，令 $x_1 = 0$ 與 $x_2 = 0$，則剩下 s_1，s_2，s_3 之單位矩陣。因此，$s_1 = 20$，$s_2 = 30$ 與 $s_3 = 16$ 爲一基本解，此可以直接由矩陣看出。

另外，於第二個矩陣中，令 $y_1 = 0$ 與 $y_2 = 0$，則剩下 s_1，s_2，s_3 之負的單位矩陣。因此，$s_1 = -14$，$s_2 = -12$ 與 $s_3 = -18$ 爲一基本解。然而，應注意的是因爲此基本解不滿足非負之限制式，故此解並非基本可能解。

習題與解答

經濟問題之數學式

13.1 某專業之鋼鐵製造業者，生產兩種類型之鋼鐵（g_1 與 g_2），型 1 需要 2 小時之熔解過程，4 小時之輾壓過程與 10 小時之切割成型，型 2 則分別需要 5 小時，1 小時與 5 小時之三種作業程序，假設此製造業者總共有 40 小時可用來熔解工作，20 小時輾壓與 60 小時切割，且型 1 之利潤爲 24；型 2 之利潤爲 8，則爲求得利潤之極大值之產出組合，首先將上述已知資料轉化爲不等式與方程式如下：

圖

極大化 $\quad \Pi = 24g_1 + 8g_2$

受制於

$$2g_1 + 5g_2 \leq 40 \quad \text{熔解時數之限制式}$$
$$4g_1 + g_2 \leq 20 \quad \text{輾壓時數之限制式}$$
$$10g_1 + 5g_2 \leq 60 \quad \text{切割時數之限制式}$$
$$g_1, g_2 \geq 0$$

此題之圖解，參見問題 13.9。

13.2 某裝飾用之水晶製造業者，生產兩種不同之產品：較粗劣者（x_1）與較精緻者（x_2），其中 x_1 需要 2 小時之壓碎工作，5 小時之篩選工作與 8 小時之烘乾工作，而 x_2 之製造過程分別需要 6 小時壓碎，3 小時篩選與 2 小時烘乾，假設每單位 x_1 之利潤爲 40；x_2 之利潤爲 50，而此業者總共有 36 小時用來壓碎，30 小時篩選與 40 小時烘乾。則爲求取利潤極大之產品組合其各個不等於方程式表示如下：

圖

極大化 $\Pi = 40x_1 + 50x_2$

受制於

$2x_1 + 6x_2 \leq 36$ 壓碎時數之限制式

$5x_1 + 3x_2 \leq 30$ 篩選時數之限制式

$8x_1 + 2x_2 \leq 40$ 烘乾時數之限制式

$x_1, x_2 \geq 0$

其圖解請參見問題 13.10 。

13.3 某玩具製造業者生產兩種玩具：Bong(g_1) 與 Zong(g_2) ，每單位 g_1 之利潤爲 30 ； g_2 爲 20 ， g_1 之製造過程是 6 小時之加工， 4 小時之組合與 5 小時之包裝，而 g_2 之製造過程分別爲 3 小時加工， 6 小時組合與 5 小時包裝 ，如果此業者總共有 54 小時用來加工， 48 小時組合與 50 小時包裝 ，試以方程式與不等式說明此業者求得利潤極大之產品組合？

圖 極大化 $\Pi = 30g_1 + 20g_2$

受制於

$6g_1 + 3g_2 \leq 54$ 加工時數之限制式

$4g_1 + 6g_2 \leq 48$ 組合時數之限制式

$5g_1 + 5g_2 \leq 50$ 包裝時數之限制式

$g_1, g_2 \geq 0$

13.4 某立體電唱機製造業者生產三種類型之電唱機：標準型（y_1），高品質型（y_2）與豪華型（y_3）其利潤分別爲 15 , 20 與 24 , 標準型需費時 3 小時裝配線路與 1 小時裝入機組，高品質型分別需要 1 小時與 5 小時，而豪華型則分別需要 3 小時與 2 小時，如果此業者可用以裝配線路之時數爲 120 ，而裝入機組之時數爲 60 ，則爲求得利潤極大之產品組合 ， 其方程式與不等式表示如下。

圖 極大化 $\Pi = 15y_1 + 20y_2 + 24y_3$

受制於

$3y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 120$ 裝配線路之時數限制

$y_1 + 5y_2 + 2y_3 \leq 60$ 裝入機組之時數限制

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

13.5 某傢俱製造業者生產三種不同類型之餐桌：鄉土型（x_1），現代型（x_2），新潮型（x_3），其中 x_1 需要 2 小時磨光， 3 小時著色，其利潤爲 36 ； x_2 需要 2 小時磨光， 2 小時著色，利潤爲 28 ；而 x_3 需要 4 小時磨光 ，1 小時著色 ，其利潤爲 32 ，如果此業者可用來磨光之時數爲 60 小時，而著色之時數爲 80 小時，則此業者爲求得利潤極大之產品組合爲：

圖

極大化 $\Pi = 36x_1 + 28x_2 + 32x_3$

受制於

$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 60$ 磨光時數之限制

$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 80$ 着色時數之限制

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

13.6 某園藝家希望將肥料予以混合使用，但必須能提供最少15單位之鹼水，20單位硝酸鈉與24單位之磷酸，假設品牌1之肥料含有3單位鹼水，1單位硝酸鈉與3單位磷酸；其成本爲$120，而品牌2之肥料則含有1單位鹼水，5單位硝酸鈉與2單位磷酸；其成本爲$60。則此園藝家爲求得成本最小之肥料使用組合其方程式與不等式表現如下。

圖 極小化 $c = 120x_1 + 60x_2$

受制於

$3x_1 + x_2 \geq 15$ 鹼水之最低需求

$x_1 + 5x_2 \geq 20$ 硝酸鈉之最低需求

$3x_1 + 2x_2 \geq 24$ 磷酸之最低需求

$x_1, x_2 \geq 0$

其圖解參見問題13.14。

13.7 某保健專家希望每天至少吸收36單位維他命A，28單位維他命C與32單位維他命D，假設食物1成本$30能提供2單位維他命$A$，2單位維他命$C$與8單位維他命$D$，而食物2之成本爲$4並分別提供三種維他命3，2與2單位，試以方程式與不等式表現出滿足此人每天需求之維他命的最小成本食物組合。

圖 極小化 $c = 3y_1 + 4y_2$

受制於

$2y_1 + 3y_2 \geq 36$ 維他命A之需求

$2y_1 + 2y_2 \geq 28$ 維他命C之需求

$8y_1 + 2y_2 \geq 32$ 維他命D之需求

$y_1, y_2 \geq 0$

圖解請參見問題13.15。

13.8 某農夫確信其飼養之雞群每天至少需吸取24單位鐵質與8單位之維他命，如果穀類（x_1）可提供2單位鐵質與5單位維他命，穀粉（飼料）x_2可提供4單位鐵質與1單位維他命，而粟類（x_3）可提供2單位鐵質與1單位維他命，假設三種飼料之成本分別爲$40，$20與$60，則此農夫在滿足雞隻每天基本之養分需求下爲求得成本最小之飼料組合，以式子表示如下。

圖 極小化 $c = 40x_1 + 20x_2 + 60x_3$

受制於

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 24 \quad \text{鐵質之需求}$$
$$5x_1 + x_2 + x_3 \geq 8 \quad \text{維他命之需求}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

圖 解

13.9 使用下列資料

(1) 求出每一個以 g_1 項表示 g_2 後畫出其不等限制式。

(2) 再畫出其可能解之區域。

(3) 計算目標函數之斜率，取一直尺依此斜率平行移動，一直到與目標函數接觸爲止而畫一虛線。

(4) 指出此接觸之 g_1 與 g_2 之臨界值，並計算在此臨界點上之目標函數值。

由問題 13.1 知

極大化

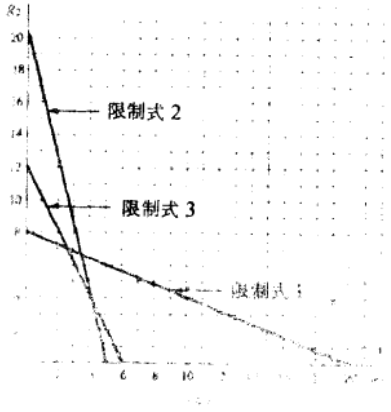
$$\Pi = 24g_1 + 8g_2$$

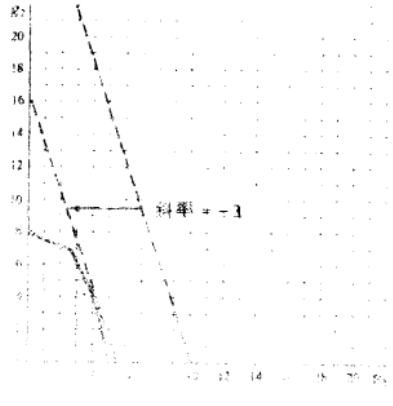
受制於

$$2g_1 + 5g_2 \leq 40 \quad \text{限制式 1}$$
$$4g_1 + g_2 \leq 20 \quad \text{限制式 2}$$
$$10g_1 + 5g_2 \leq 60 \quad \text{限制式 3}$$
$$g_1, g_2 \geq 0$$

圖 本題之不等限制式繪示如圖 13-3(*a*)，例如，限制式 1 爲 $g_2 = 8 - \frac{2}{5}g_1$，當 $g_1 = 0$ 時，$g_2 = 8$，當 $g_2 = 0$ 時，$g_1 = 20$，應注意的是非負限制式，只是將本題之分析限定於第一象限內。

其可能解區域如圖 13-3 (*b*)所示，由目標函數 $g_2 = \Pi/8 - 3g_1$；知其斜率爲 -3，由圖中可看出，在接觸點上，$\bar{g}_1 = 4$ 與 $\bar{g}_2 = 4$，因此，$\bar{\Pi} = 24(4) + 8(4) = 128$。





13.10 使用下列由問題 13.2 所導出之資料，重新作問題 13.9 ：

極大化 $\Pi = 40x_1 + 50x_2$

受制於

$2x_1 + 6x_2 \leq 36$ 限制式 1

$5x_1 + 3x_2 \leq 30$ 限制式 2

$8x_1 + 2x_2 \leq 40$ 限制式 3

$x_1, x_2 \geq 0$

圖 各限制式之圖形請參見圖 13-4 (*a*)；其可能解區域則繪示於圖 13-4 (*b*)。

由目標函數可知，$x_2 = \Pi / 50 - \frac{4}{5}x_1$ ；斜率 $= -\frac{4}{5}$ ，於圖 13-4 (*b*) 中可知，$\overline{x}_1 = 3$ 與 $\overline{x}_2 = 5$ ，因此，$\overline{\Pi} = 40(3) + 50(5) = 370$ 。

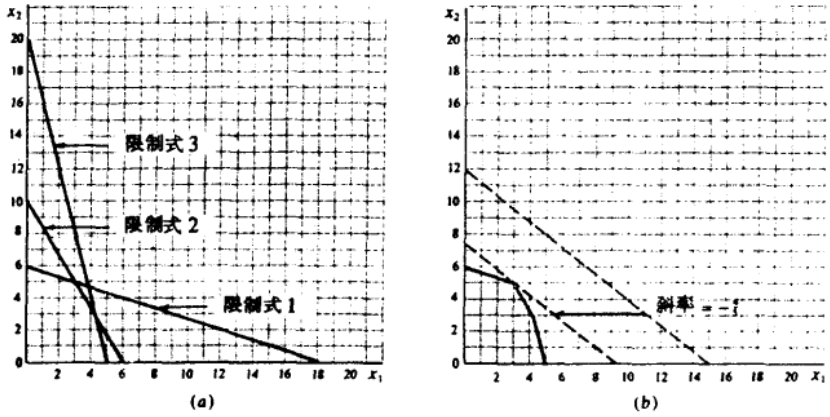


圖 13-4

13.11 根據下列資料，重新作問題 13.9 ：

極大化 $\Pi = 5x_1 + 3x_2$

受制於

$6x_1 + 2x_2 \leq 36$ 限制式 1

$5x_1 + 5x_2 \leq 40$ 限制式 2

$2x_1 + 4x_2 \leq 28$ 限制式 3

$x_1, x_2 \geq 0$

圖 不等限制式繪示於圖 13-5 (*a*)；可能解區域則繪示於 13-5 (*b*)。

由目標函數知，$x_2 = \Pi / 3 - \frac{5}{3}x$ ；故斜率 $= -\frac{5}{3}$ 。由圖 13-5 (*b*) 觀察可知，$\overline{x}_1 = 5$ 與 $\overline{x}_2 = 3$ 。因此，$\overline{\Pi} = 5(5) + 3(3) = 34$ 。

13.12 已知資料如下，重新作問題 13.9 ：

極大化 $\Pi = 40y_1 + 30y_2$

受制於

$5y_1 + 2y_2 \leq 30$ 限制式 1

$2y_1 + 4y_2 \leq 28$ 限制式 2

$y_2 \leq 6$ 限制式 3

$y_1, y_2 \geq 0$

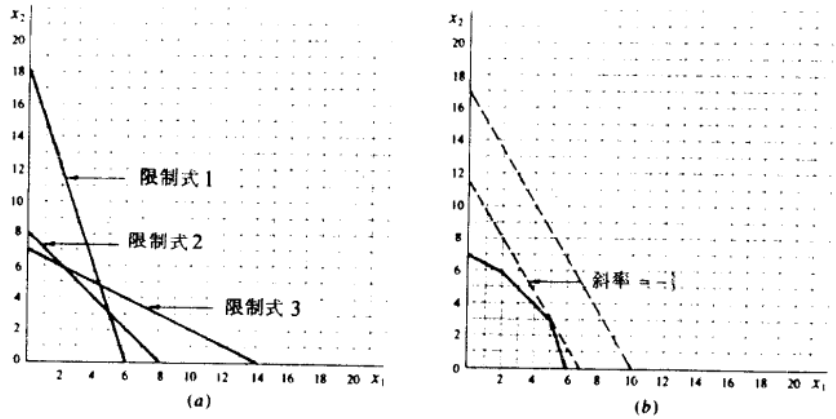


圖 13-5

圖　不等限制式繪示於圖 13-6 (*a*)；可能解區域繪示於圖 13-6 (*b*)。

其臨界值爲，$\bar{y}_1 = 4$，$\bar{y}_2 = 5$，故 $\overline{\Pi} = 40(4) + 30(5) = 310$。

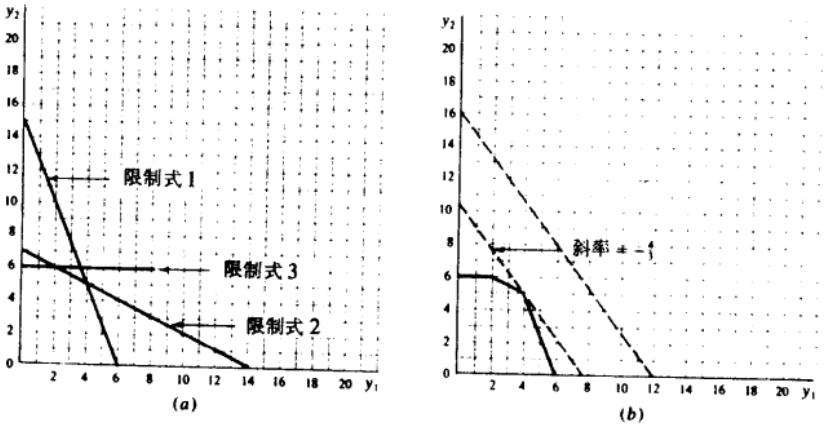


圖 13-6

13.13　已知資料如下，重新作問題 13.9。

極大化　　$\Pi = 20x_1 + 10x_2$

受制於　　$4x_1 + 3x_2 \leq 48$　限制式 1　　$x_1 \leq 9$　限制式 3

$3x_1 + 5x_2 \leq 60$　限制式 2　　$x_1, x_2 \geq 0$

圖　參見圖 13-7。

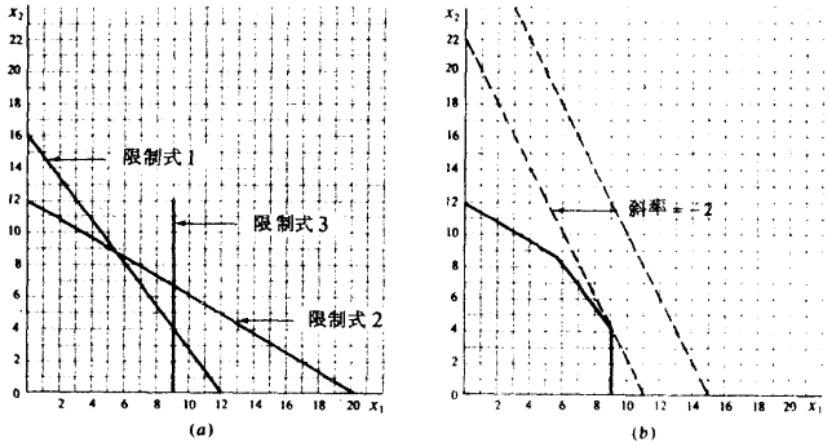


圖 13-7

由圖中可知，臨界值爲 $\bar{x}_1 = 9$ ，$\bar{x}_2 = 4$ ，故 $\bar{\Pi} = 20(9) + 10(4) = 220$ 。

13.14 使用由問題 13.6 導出之資料（如下所示），(1)求出每一個以 x_1 項代表 x_2 後畫出其不等限制式，(2)以黑點表示畫出其可能解區域，(3)計算目標函數之斜率，並如問題 13.9 者畫出一虛線，(4)由圖中找出接觸點之臨界值，並計算目標函數在臨界點之值。

極小化 $c = 120x_1 + 60x_2$

受制於 $3x_1 + x_2 \geq 15$ 限制式 1　　$3x_1 + 2x_2 \geq 24$ 限制式 3

$x_1 + 5x_2 \geq 20$ 限制式 2　　$x_1, x_2 \geq 0$

圖 參見圖 13-8，由目標函數知，$x_2 = c/60 - 2x_1$ ；故斜率 $= -2$ 。於圖 13-8 (*b*)可知臨界點，$\bar{x}_1 = 2$ ，$\bar{x}_2 = 9$ ，故 $\bar{c} = 120(2) + 60(9) = 780$ 。

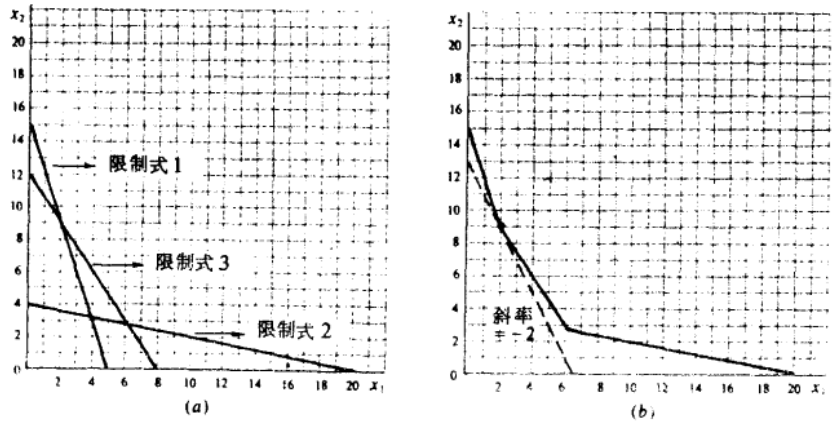


圖 13-8

13.15 使用問題 13.7 所導出之資料，重新作問題 13.14 。

極小化 $c = 3y_1 + 4y_2$

受制於 $2y_1 + 3y_2 \geq 36$ 限制式 1　　$8y_1 + 2y_2 \geq 32$ 限制式 3

$2y_1 + 2y_2 \geq 28$ 限制式 2　　$y_1, y_2 \geq 0$

圖　參見圖 13-9，並由圖 13-9 (*b*) 可知臨界值，$\bar{y}_1 = 6$ 與 $\bar{y}_2 = 8$ ；因此，$\bar{c} = 3(6) + 4(8) = 50$ 。

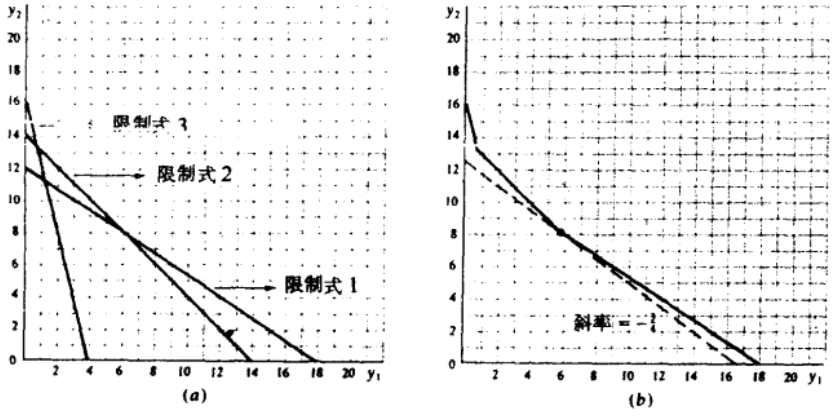


圖 13-9

13.16 使用下列資料，重新作問題 13.14 。

極小化 $c = 30x_1 + 50x_2$

受制於 $6x_1 + 2x_2 \geq 30$ 限制式 1　　$5x_1 + 10x_2 \geq 60$ 限制式 3

$3x_1 + 2x_2 \geq 24$ 限制式 2　　$x_1, x_2 \geq 0$

圖　不等限制式繪示於圖 13-10 (*a*)；可能解區域繪示於圖 13-10 (*b*)，於圖13-10 (*b*) 可看出目標函數之斜率 $= -\frac{3}{5}$ ；而 $\bar{x}_1 = 6$ 與 $\bar{x}_2 = 3$ 。因此，$\bar{c} = 30(6) + 50(3) = 330$ 。

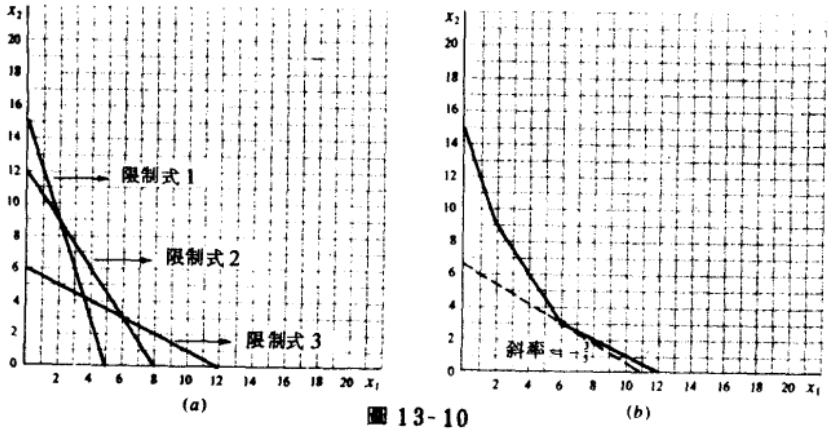


圖 13-10

13.17 已知資料如下，試重新作問題 13.14 。

極小化 $c = 4g_1 + 5g_2$

受制於 $4g_1 + 2g_2 \geq 28$ 限制式 1　　$g_2 \geq 4$ 限制式 3

$2g_1 + 3g_2 \geq 30$ 限制式 2　　$g_1, g_2 \geq 0$

圖 參見圖 13-11 ，於圖 13-11 (*b*)中可知，目標函數之斜率 $= -\frac{4}{5}$ ，$\bar{g}_1 = 3$ 與 $\bar{g}_2 = 8$ ；故 $\bar{c} = 4(3) + 5(8) = 52$ 。

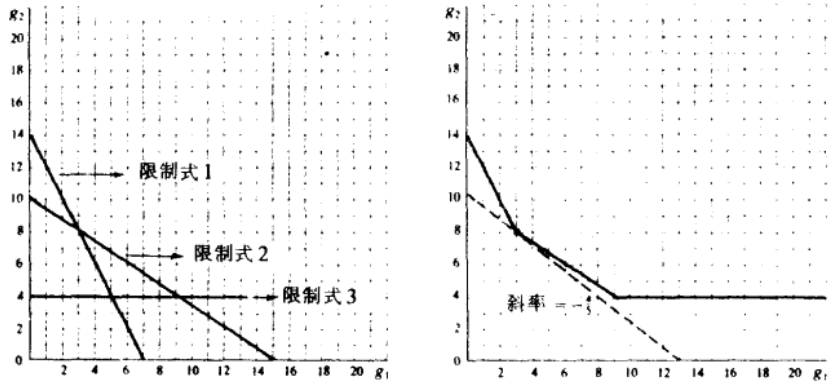


圖 13-11

13.18 使用下列資料重新作問題 13.14 ：

極小化 $c = 2x_1 + 8x_2$

受制於 $4x_1 + 4x_2 \geq 32$ 限制式 1　　$x_1 \geq 2$ 限制式 3

$x_1 + 5x_2 \geq 20$ 限制式 2　　$x_1, x_2 \geq 0$

圖 參見圖 13-12 。

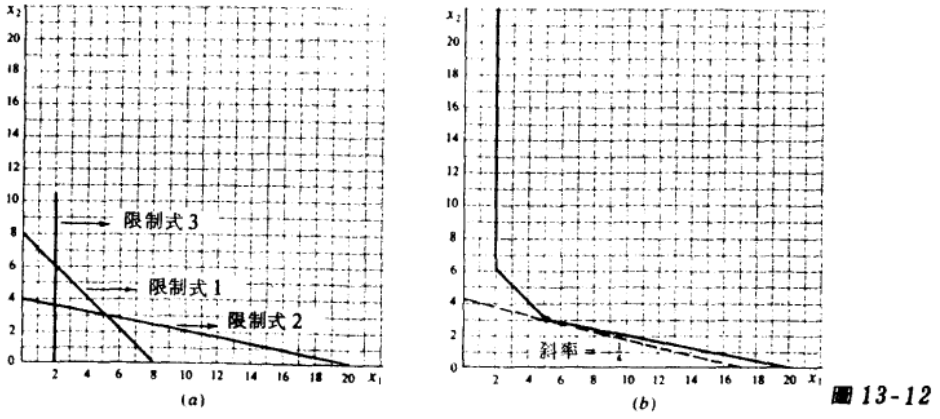


圖 13-12

由圖 13-12 (*b*)知，目標函數之斜率 $=-\frac{1}{4}$，$\bar{x}_1=5$，與 $\bar{x}_2=3$。因此，$\bar{c}=2(5)+8(3)=34$。

多個最適解

13.19 已知下列資料，重新作問題 13.14。

極小化 $\quad c=4x_1+2x_2$

受制於 $\quad 4x_1+x_2\geq 20$ 限制式 1 $\quad x_1+6x_2\geq 18$ 限制式 3

$2x_1+x_2\geq 14$ 限制式 2 $\quad x_1, x_2\geq 0$

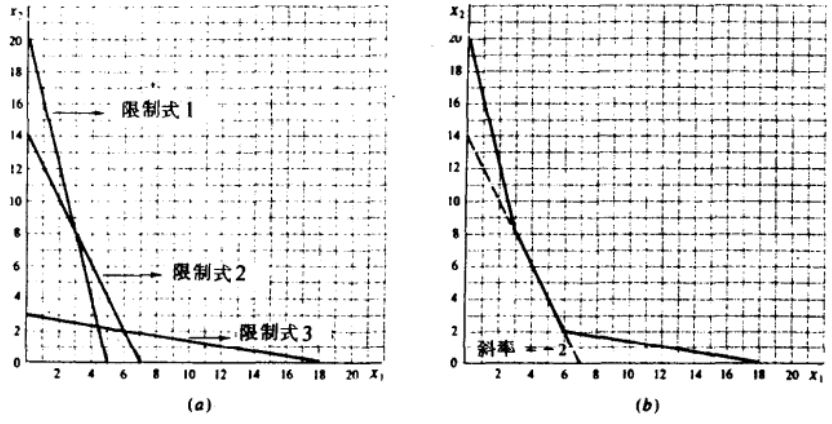


圖 13-13

圖 於圖 13-13 中，由於等成本線與第二條限制式在某一區段相切，故沒有單一之最適解，任意位於（3，8）與（6，2）線段上之點將使目標函數爲極小(受制於限制式），當目標函數與限制式之一存在線性相依之關係時，將出現多個最適解，例如在本題中目標函數與第二個限制式存在線性相依之關係，（因爲其中之一爲另一式之倍數）。應注意的是，本題之多個最適解的情況並不與極點定理牴觸，因爲極點（3，8）與（6，2）亦包含於最適解內，即 $c=4(3)+2(8)=28$ 或 $c=4(6)+2(2)=28$。

鬆弛變數與超額變數

13.20 根據下列已知資料 (*a*) 將不等限制式加上鬆弛變數或減去超額變數而轉換爲方程式，(*b*) 以矩陣形式表示這些方程式。

極大化 $\quad \Pi=24y_1+8y_2$

受制於 $\quad 2y_1+5y_2\leq 40 \quad 10y_1+5y_2\leq 60$

$4y_1+y_2\leq 20 \quad y_1, y_2\geq 0$

圖 (*a*) 對於“小於或等於”之不等式，我們必須加上鬆弛變數，因此

$$2y_1 + 5y_2 + s_1 = 40 \qquad 4y_1 + y_2 + s_2 = 20 \qquad 10y_1 + 5y_2 + s_3 = 60$$

(*b*)

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 60 \end{bmatrix}$$

13.21 對下列已知資料，重新作問題 13.20：

極小化 $c = 60x_1 + 80x_2$

受制於 $2x_1 + 3x_2 \geq 36 \qquad 8x_1 + 2x_2 \geq 32$

$2x_1 + 2x_2 \geq 28 \qquad x_1, x_2 \geq 0$

圖 (*a*) 對於“大於或等於”之不等式，我們必須減去超額變數。

$$2x_1 + 3x_2 - s_1 = 36 \qquad 2x_1 + 2x_2 - s_2 = 28 \qquad 8x_1 + 2x_2 - s_3 = 32$$

(*b*)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 28 \\ 32 \end{bmatrix}$$

13.22 根據下列資料，(*a*) 將不等式化爲方程式，並以矩陣形式表示，其次求(*a*)爲求得一基本解，我們必須令多少個變數等於 0，(*c*) 存在多少個基本解，(*d*) 由矩陣式讀出第一個基本解。

極小化 $c = 54g_1 + 48g_2 + 50g_3$

受制於 $6g_1 + 4g_2 + 5g_3 \geq 30 \qquad 3g_1 + 6g_2 + 5g_3 \geq 20 \qquad g_1, g_2, g_3 \geq 0$

圖 (*a*) $6g_1 + 4g_2 + 5g_3 - s_1 = 30 \qquad 3g_1 + 6g_2 + 5g_3 - s_2 = 20$

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix}$$

(*b*) 因爲本題共有 2 個方程式與 5 個變數則 $n - m = 5 - 2 = 3$ 個變數必須令其等於零以求得一基本解。

(*c*) 解之數目爲

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{5!}{2!(3!)} = \frac{5(4)(3)(2)(1)}{2(1)(3)(2)(1)} = 10$$

(*d*) 令 $g_1 = g_2 = g_3 = 0$，故第一個基本解爲 $\bar{s}_1 = -30$ 與 $\bar{s}_2 = -20$。因爲兩者均爲負，故它們並非基本可能解。

第十四章

線性規劃：簡形算則

14.1 簡形算則：求極大值問題

算則（algorithm）是指一組求解一問題之規則或一有系統之過程，而簡形算則（simplex algorithm）是指對一方程組求其基本可能解並檢驗何者爲最適解之一套方法（或計算過程），因爲爲求得一基本解，至少必須令 $n-m$ 個變數等於 0，因而在每一個計算之步驟裡均設定某 $n-m$ 個變數爲 0，而基本解則由剩下之 m 個方程式求出其餘 m 個變數之解。簡形算則是指每當由一個基本可能解移至另一個基本可能解時，其值一定會獲得改進，一直到得到最適解爲止。在某一特定步驟中，被令爲 0 之諸變數稱爲不在基底上或不是問題之解，而那些不爲 0 之變數則稱爲在基底上，在解之內或簡稱爲基本變數（basic variables）。以下例 1 是有關求極大值之簡形法則之例示，而有關求極小值之簡形法則如例 3 所示。

例題 14.1

使用簡形法則求利潤極大例示如下，已知

$$\Pi = 5x_1 + 3x_2$$

受制於下列諸限制式

$$6x_1 + 2x_2 \leq 36 \qquad 2x_1 + 4x_2 \leq 28$$
$$5x_1 + 5x_2 \leq 40 \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

(1) 原始之簡形表

i. 首先將諸限制式加上鬆弛變數而化爲方程式如下：

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + s_1 &= 36 \\ 5x_1 + 5x_2 + s_2 &= 40 \\ 2x_1 + 4x_2 + s_3 &= 28 \end{aligned} \tag{14.1}$$

ii. 以矩陣形式表之如下：

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 40 \\ 28 \end{bmatrix}$$

iii. 以限制方程式與常數行向量建立一原始之簡形表，此外，本表之最後一列爲一指標（indicators），乃由目標函數之負值係數及以0爲鬆弛變數之係數組成。同時常數行之最後一列之元素亦爲0，此乃對應於目標函數在原點（即 $x_1 = x_2 = 0$ ）之函數值。

原始之簡形表：

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	常數
⑥	2	1	0	0	36
5	5	0	1	0	40
2	4	0	0	1	28
−5	−3	0	0	0	0
↑ 指標					

iv. 由原始之簡形表可以找出第一個基本可能解，即，如第十三章例5所述，令 $x_1 = 0$ 與 $x_2 = 0$，故 $s_1 = 36$，$s_2 = 40$ 與 $s_3 = 28$，同時，在此第一個基本可能解時，目標函數之值爲0。

(2) 樞紐元素與基底之變換

爲改善目標函數之值，我們必須檢討新的基本解，同時爲了移動至新的基本解，我們必須將一新的變數引進基底，而排除另一個變數，此種過程謂之基底之變換（change of basis）。

i. 上述負值之指標絕對值最大者即我們欲引進新的基底之變數，故由上述可知，第1（x_1）行之−5爲最大絕對值，故 x_1 是我們欲引進新的基底之對象，此時 x_1 行稱爲**樞紐行**（pivot column），並在該行下面畫上箭頭。

ii. 另外，應被從基底剔除之變數則決定於**置換比例**（displacement ratio）最小者，所謂置換比例乃爲常數行各元素除以樞紐行諸元素之商。置換比例最小之列（即樞紐列），不論此比例是否小於或等於0，決定應被剔除之變數，在本例中由於 $\frac{36}{6}$ 最小（$\frac{36}{6} < \frac{40}{5} < \frac{28}{2}$），故列1爲樞紐列，又因爲第一列中在 s_1 行之元素爲1，故 s_1 將被剔除。另外，本列之**樞紐元素**（pivot element）爲⑥，亦即，被引進變數之行與被剔除變數對應之列相交之元素（換句話說，樞紐元素是指樞紐列與樞紐行相交之元素）。

(3) 依其**樞紐旋轉**（pivoting）

樞紐轉換是指在目前之基底下求解 m 個變數 m 條方程式之方法，因爲在此方法的每一個步驟裡只有一個新的變數被引進，並且在前一個步驟中，我們必然包含有一單位矩陣，故所謂**樞紐轉換**（pivoting）只是將樞紐元素應用基本列轉換運算使它變爲1而樞紐行之其餘元素爲0之轉換。此正如10.12節所述之高斯消去法一樣，茲說明如下：

i. 首先，將樞紐列乘以樞紐元素之倒數，於本列中，即列 1 乘以 $\frac{1}{6}$ 。

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	常 數
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	6
5	5	0	1	0	40
2	4	0	0	1	28
−5	−3	0	0	0	0

ii. 樞紐元素變爲 1 後，接著將樞紐行其餘元素轉換爲 0，在此，我們以列 2 減 5 倍之列 1，再以列 3 減 2 倍之列 1。最後將 5 倍之列 1 加至列 4，如此可求得第二個表。

第二個表

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	常 數
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	6
0	⑩	$-\frac{5}{6}$	1	0	10
0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	16
0	$-\frac{4}{3}$ ↑	$\frac{5}{6}$	0	0	30

則第二個基本可能解可直接由第二個表看出，令 $x_2 = 0$ 與 $s_1 = 0$，則我們可得到另一個單位矩陣，並由此可得 $x_1 = 6$，$s_2 = 10$ 與 $s_3 = 16$，並且最後列之最後一個元素（即 30），即爲在第二個基本可能解下之目標函數值。

(4) 最適化

當最後一列之指標不存在負數時，目標函數即爲最適值，因此，根據上述之規則不斷重複地改變基底與樞紐轉換一直到其指標均爲非負爲止。因爲 $-\frac{4}{3}$ 爲第二行中唯一之負值，故 x_2 將被引進基底，因而行 2 變爲樞紐行，將常數行元素除以樞紐行對應之元素，則最小之比例值出現在第二列，因此，$\frac{10}{3}$ 成爲新的樞紐元素，又因爲第二列之單位向量的 1 出現在 s_2 行之下，故 s_2 將被剔除，準此，其樞紐運轉如下：

i. 列 2 乘以 $\frac{3}{10}$ 。

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	常 數
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	6
0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	0	3
0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	16
0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	0	30

ii. 然後，列 1 減去 $\frac{1}{3}$ 倍的列 2，列 3 減去 $\frac{10}{3}$ 倍的列 2 且將 $\frac{4}{3}$ 倍的列 2 加至列

4，可導出第三個表：

第三個表：

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	常數
1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{10}$	0	5
0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	0	3
0	0		-1	1	6
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	0	34

則第三個基本可能解可直接由此表找出，因爲 $s_1 = 0$ 且 $s_2 = 0$ 故 $x_1 = 5$，$x_2 = 3$ 與 $s_3 = 6$。此時最後一列之指標已無負值，故此解即爲最適解，而最後一列之最後一個元素即代表當 $\bar{x}_1 = 5$，$\bar{x}_2 = 3$，$\bar{s}_1 = 0$，$\bar{s}_2 = 0$ 與 $\bar{s}_3 = 6$ 時，目標函數達到最大值，即 $\bar{\Pi} = 34$。由於 $\bar{s}_1 = 0$ 與 $\bar{s}_2 = 0$，故從（14.1）式知，其首二個限制式事實上並不存在鬆弛變數．並且首二個投入被使用殆盡，又由於 $\bar{s}_3 = 6$，故第三種投入剩下 6 單位未予使用，有關此題之圖形表示式，請參見問題 3.11。

14.2 邊際值或影子價格

於最終之簡形表中，每一個鬆弛變數下面之指標，代表其投入之邊際值或影子價格，亦即，當投入增加一單位時，目標函數之變動量。例如，於例 1 中限制式 1 之常數每變動一單位，利潤將增加 $\frac{1}{2}$ 單位或 50¢；而當限制式 2 之常數每增加一單位，利潤將增加 $\frac{2}{5}$ 或 40¢；最後，當限制式 3 之常數增加一單位時利潤之增加爲 0，此乃因爲限制式 3 有一正的鬆弛變數，故在最適解時其對應之投入並未充分使用，因而其邊際值爲 0（亦即，增加此投入一單位對利潤毫無影響）。事實上，目標函數之值必然等於每一種投入之可用數量乘以其邊際值之加總。

例題 14.2

例 1 可經由(1)將臨界值代入目標函數與（14.1）式之限制方程式及(2)計算各種資源之邊際值的總和來檢查其答案是否正確。而所有最適條件均需滿足，令 A，B，C 分別代表限制式 1，2，3 之常數，則

1.
$$\Pi = 5x_1 + 3x_2 \qquad 5x_1 + 5x_2 + s_2 = 40$$
$$= 5(5) + 3(3) = 34 \qquad 5(5) + 5(3) + 0 = 40$$
$$6x_1 + 2x_2 + s_1 = 36 \qquad 2x_1 + 4x_2 + s_3 = 28$$
$$6(5) + 2(3) + 0 = 36 \qquad 2(5) + 4(3) + 6 = 28$$

2.
$$\Pi = MP_A(A) + MP_B(B) + MC_C(C) = \tfrac{1}{2}(36) + \tfrac{2}{5}(40) + 0(28) = 34$$

14.3 簡形算則：極小化之問題

當我們使用簡形算則求某函數之極小值時，諸不等限制式必須減去超額變數（參見例 3），通常，我們改用對偶問題（參見第十五章）來處理將更形容易，因此，讀者可先閱讀第十五章。

例題 14.3

以下是以簡形法則求最小成本，假設所有資料均來自第十三章之例 2，並且，此時以 x 取代 y，而 $c = 2x_1 + 4x_2$，受制於必須吸收之養分的限制式。

$$2x_1 + x_2 \geq 14 \qquad x_1 + 3x_2 \geq 18$$
$$x_1 + x_2 \geq 12 \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

(1) 最初之簡形表（稍加修正者）

i. 將各個不等限制式減去超額變數而轉化爲方程式如下

$$2x_1 + x_2 - s_1 = 14$$
$$x_1 + x_2 - s_2 = 12$$
$$x_1 + 3x_2 - s_3 = 18$$

ii. 以矩陣形式表示這些方程式

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

由此矩陣可以很清楚的看到，正如前述求極大化之最初簡形表一樣，如果 $x_1 = 0$ 與 $x_2 = 0$，則基本解將不在可能區域內，因爲 $s_1 = -14$，$s_2 = -12$，$s_3 = -18$ 三者均爲負值，然而，爲了克服此問題，我們必須引進人工變數（artificial variable）。

iii. 加上人工變數：一人工變數（$A_i \geq 0$）指爲了求出一最初之基本可能解之目的而加上之一個虛擬變數（dumy variable），此虛擬變數並不具任何經濟意義，每一個人工變數被加到每一個原始問題中“大於或等於”之不等式，因此，

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s \\ A \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \qquad (14.2)$$

(2) 適合於極小化問題之最初簡形表

i. 經過上述之調整後，我們可作出一最初之簡形表，首先，將係數矩陣與(14.2)之常數行向量列出，並將目標函數係數以負值列於指標之位置上，應注意的是，目標函數之係數尚包括超額變數之0係數與人工變數之係數M，其中M爲一不可能存在之大數以確證A將被排除於最適解之外。

x_1	x	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	常 數
2	1	-1	0	0	1	0	0	14
1	1	0	-1	0	0	1	0	12
1	3	0	0	-1	0	0	1	18
-2	-4	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$	

指 標

ii. 其次，將M倍之（列1＋列2＋列3）加至第四列，以使得人工變數諸行不存在M，如此，可求解最初之簡形表，如下所示

最初簡形表

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	常 數
2	1	-1	0	0	1	0	0	14
1	1	0	-1	0	0	1	0	12
1	③	0	0	-1	0	0	1	18
$4M-2$	$5M-4$	M	$-M$	$-M$	0	0	0	$44M$

第一個基本可能解，可直接由此表找出，即令，$x_1 = x_2 = s_1 = s_2 = s_3 = 0$，則第一個基本可能解爲$A_1 = 14$，$A_2 = 12$，$A_3 = 18$，而目標函數值爲44M，其爲一不可能存在之大數，因此，我們必須藉助於基底轉換，以減少成本。

(3) 樞紐元素

i. 在求極小化之問題中，最大的正值指標所在之行即爲樞紐行，而該行之變數，即爲我們所欲引進之新基底者，又因爲最後一列之最後一個元素44M，並非指標，故本例中$5M-4$爲最大之正值指標，因此，x_2爲進入新基底之

變數，而 x_3 行爲樞紐行　如上表箭頭所指。

ii. 此外，將被剔除於基底之外的變數，正如極大化問題所示一般，乃決定於常數行各元素除以樞紐行各對應之元素，其比例最小者，此時由於 $\frac{18}{8}=6$ 爲最小之比例，故列 3 爲樞紐列，又因爲第三列之單位向量爲 1 者爲 A_3 行，故 A_3 將被剔除，而此表中，樞紐行與樞紐列相交之樞紐元素爲③。

(4) 樞紐轉換

i. 列 3 乘以 $\frac{1}{8}$ 以使得樞紐元素化簡爲 1 。

2	1	−1	0	0	1	0	0	14
1	1	0	−1	0	0	1	0	12
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{3}$	6
$4M-4$	$5M-4$	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0	$44M$

ii. 列 1 減列 3 ，列 2 減列 3 以及列 4 減（$5M-4$）倍之列 3 ，以使得樞紐行之其餘元素爲 0 。

第二表：

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	常　數
①	0	−1	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	8
$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	6
$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	6
$\frac{7M-2}{3}$ ↑	0	$-M$	$-M$	$\frac{2M-4}{3}$	0	0	$\frac{-5M+4}{3}$	$14M+24$

(5) 重複上述之步驟

只要指標仍存在正直，則上述步驟應繼續進行，此時，新的樞紐行爲行 1 ；新的樞紐列爲列 1 ；因此，x_1 將被引進新的基底，而 A_1 被剔除，而新的樞紐元素爲 $\frac{5}{3}$ 。

i. 列 1 乘以 $\frac{3}{5}$ 。

1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{24}{5}$
$\frac{2}{3}$	0	0	−1	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	6
$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	6
$\frac{7M-2}{3}$	0	$-M$	$-M$	$\frac{M-4}{3}$	0	0	$\frac{-5M+4}{3}$	$14M+24$

ii. 列 2 減 $\frac{2}{3}$ 倍列 1 ，列 3 減 $\frac{1}{3}$ 倍列 1 ，且列 4 減 $[(7M-2)/3]$ 倍列 1 ，以使得 x_1 行之其餘元素爲 0 ，如此，可導出第三個表如下。

第三表：

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	常數
1	0	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{24}{5}$
0	0	①	-1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{14}{5}$
0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{22}{5}$
0	0	$\frac{2M-2}{5}$ ↑	$-M$	$\frac{M-6}{5}$	$\frac{-7M+2}{5}$	0	$\frac{-6M+6}{5}$	$\frac{14M+136}{5}$

(6) 第四次樞紐

i. 列 2 乘以 $\frac{5}{2}$ 。

1	0	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{24}{5}$
0	0	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	7
0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{22}{5}$
0	0	$\frac{2M-2}{5}$	$-M$	$\frac{M-6}{5}$	$\frac{-7M+2}{5}$	0	$\frac{-6M+6}{5}$	$\frac{14M+136}{5}$

ii. 將 $\frac{8}{5}$ 倍列 2 加至列 1 ，列 3 減 $\frac{1}{5}$ 倍列 2 且列 4 減 [($2M-2$)/5] 列 2 ，則第四表：

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	常數
1	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	9
0	0	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	7
0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
0	0	0	-1	-1	$-M$	$-M+1$	$-M+1$	30

此時，由於所有指標均爲負數，故我們已求得一最適解，將單位矩陣孤立之，發現單位向量 x_3 與 s_3 次序顚倒，其最適解可直接由第四表找出：即 $\bar{x}_1=9$ ，$\bar{x}_2=3$ ，$\bar{s}_1=7$ ，$\bar{s}_2=0$ 與 $\bar{s}_3=0$ ，而目標函數值則列示於最後一列之最後一個元素，即 $\bar{c}=30$ 。

下列五點讀者應注意：

1. 由於 $\bar{s}_2=\bar{s}_3=0$ ，故第二與第三的限制條件均可滿足，亦即第二、三條限制式並不存在超額變數，但由於 $\bar{s}_1=7$ ，故第一條限制式超過了 7 單位。
2. 超額變數之指標的絕對值爲各限制式之邊際值或影子價格，此時，由於 s_1 之指標爲 0 ，故第一個養分需求減少一單位時其成本並不致減少，然而，當第二或第三個養分需求減少一單位時，成本均將減少 $1 (因爲 s_2 與 s_3 之指標絕對值均爲 1 ）。最後，若以邊際值來表示，則總成本將等於不同之養分需求乘以它們之影

子價格後之總和。

3. 於最終之簡形表中，人工變數之指標均爲負數，此乃一最適解必然之現象。
4. 超額變數（s_1，s_2，s_3）之係數必然等於與之相對應的人工變數（A_1，A_2，A_3）係數之負值，此乃爲每一個步驟中簡形表必然之事實，此一事實有助於我們檢查是否計算錯誤。
5. 如果已求得一最適可能解，則人工變數必定不存在於基底內。

有關此問題之對偶解，請參見第十五章之例 4 與例 5 。

例題 14.4

我們可經由(1)將諸臨界值代入目標函數與限制方程式，(2)計算各資源之邊際成本的總和，以檢查例 3 之答案是否正確。令 A，B，C 分別代表限制式 1，2，3 之常數，

1.
$$\begin{aligned} c &= 2x_1 + 4x_2 & x_1 + x_2 - s_2 &= 12 \\ &= 2(9) + 4(3) = 30 & 9 + 3 - 0 &= 12 \\ 2x_1 + x_2 - s_1 &= 14 & x_1 + 3x_2 - s_3 &= 18 \\ 2(9) + 3 - 7 &= 14 & 9 + 3(3) - 0 &= 18 \end{aligned}$$

2.
$$c = \mathrm{MC}_A(A) + \mathrm{MC}_B(B) + \mathrm{MC}_C(C) = 0(14) + 1(12) + 1(18) = 30$$

習題與解答

極大化

14.1 使用簡形算則求解下列方程組與不等式組，並求出各限制式中投入（或必要物品）之影子價格。

極大化
$$\Pi = 3y_1 + 4y_2$$
受制於
$$2.5y_1 + y_2 \leq 20 \qquad y_1 + 2y_2 \leq 16$$
$$3y_1 + 3y_2 \leq 30 \qquad y_1, y_2 \geq 0$$

圖 (1) 首先建立其最初之簡形表，

i. 各不等限制式加上鬆弛變數而化爲方程式

$$2.5y_1 + y_2 + s_1 = 20 \qquad 3y_1 + 3y_2 + s_2 = 30 \qquad y_1 + 2y_2 + s_3 = 16$$

ii. 以矩陣表之

$$\begin{bmatrix} 2.5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 16 \end{bmatrix}$$

iii. 最後之簡形表乃由限制方程式之係數矩陣及常數行向量位於上面，而指標位於表之下方所構成，其中，指標即爲目標函數之係數的負值，而各鬆弛變數之指標爲 0 。

最初簡形表

y_1	y_2	s_1	s_2	s_3	常 數
$\frac{5}{2}$	1	1	0	0	20
3	3	0	1	0	30
1	②	0	0	1	16
−3	−4	0	0	0	0

令 $y_1 = y_2 = 0$ ，第一個基本可能解爲 $s_1 = 20$ ，$s_2 = 30$ 與 $s_3 = 16$ ，在第一個基本可能解下，$\Pi = 0$ 。

(2) 基底變換；負值指標中絕對值最大（箭頭所指）者爲樞紐行，而以常數行各元素除以樞紐行中各對應元素之置換比例最小者爲樞紐列，因此②爲樞紐行與樞紐列相交之樞紐元素。

(3) 樞紐轉換

i. 列 3 乘以 $\frac{1}{2}$ 以使得樞紐元素化爲 1 。

$\frac{5}{2}$	1	1	0	0	20
3	3	0	1	0	30
$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	8
−3	−4	0	0	0	0

ii. 列 1 減列 3 ，列 2 減 3 倍之列 3 ，並將 4 倍列 3 加至列 4 ，以使得樞紐行之其餘元素爲 0 。

第二表：

y_1	y_2	s_1	s_2	s_3	常 數
2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	12
①	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	6
$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	8
−1	0	0	0	2	32
↑					

(4) 重覆進行變換基底與樞紐，則行 1 變爲新的樞紐行，列 2 爲新的樞紐列，而 $\frac{3}{2}$ 爲新的樞紐元素。

i. 列 2 乘以 $\frac{2}{3}$ 。

$$\begin{array}{cccccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & & 12 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -1 & & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & & \frac{1}{2} & & 8 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & & 3. \end{array}$$

ii. 列 1 減 2 倍列 2 ，列 3 減 $\frac{1}{2}$ 倍列 2 ，並將列 2 加至列 4 ，以使得樞紐行其餘元素爲 0 。

最終簡形表：

y_1	y_2	s_1	s_2	s_3	常　數
0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	4
1	0	0	$\frac{2}{3}$	-1	4
0	1	0	$-\frac{1}{3}$	1	6
0	0	0	$\frac{2}{3}$	1	36

於此表中，因爲已無負值指標，故爲最終之簡形表，將單位矩陣之單位向量之次序予以修正，可知，$\overline{y}_1 = 4$ ，$\overline{y}_2 = 6$ ，$\overline{s}_1 = 4$ 、$\overline{s}_2 = 0$ ，$\overline{s}_3 = 0$ 且 $\overline{\Pi} = 36$ ，而其投入之影子價格分別爲 0 ，$\frac{2}{3}$ 與 1 。

14.2 對於下列之方程式與不等式，重新作問題 14.1 。

極大化　　$\Pi = 30x_1 + 24x_2 + 60x_3$

受制於　　$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 30$　　$2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \leq 50$　　$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

圖　首先，將鬆弛變數加入各個不等限制式，而化爲方程式，並以矩陣表示之，

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + s_1 = 30 \qquad 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 + s_2 = 50$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \end{bmatrix}$$

其次，建立最初之簡形表。

最初簡形表：

x	x_2	x_3	s_1	s_2	常　數
6	3	5	1	0	30
2	2	⑩	0	1	50
-30	-24	-60 ↑	0	0	0

然後，變換其基底與樞紐如下：(1)列 2 乘以 $\frac{1}{10}$ 。

6	3	5	1	0	30
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{10}$	5
−30	−24	−60	0	0	0

(2)列 1 減 5 倍列 2 ，並將 60 倍列 2 加至列 3 以使得樞紐行之其餘元素爲 0 。

第二簡形表：

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	常 數
⑤	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	5
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{10}$	5
−18	−12	0	0	6	300
↑					

再度地改變其基底與樞紐如下：(1)列 1 乘以 $\frac{1}{5}$ 。

1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{10}$	5
−18	−12	0	0	6	300

(2)列 2 減 $\frac{1}{5}$ 倍列 1 ，並將 18 倍列 1 加到列 3 以使得樞紐行之其餘元素爲 0 。

第三表：

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	常 數
1	⑦	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	1
0	$\frac{3}{25}$	1	$-\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{24}{5}$
0	$-\frac{24}{5}$	0	$\frac{18}{5}$	$\frac{21}{5}$	318
	↑				

第三度轉換樞紐。注意，在第二次轉換樞紐中被引進基底之 x_2，在第三度樞紐轉換時被剔除，由此可知，一變數可能被引進基底後再被剔除；但應注意的是，目標函數之最適值在每一步驟中均一直增加中，(1)列 1 乘以 $\frac{5}{2}$ 。

$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$
0	$\frac{3}{25}$	1	$-\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{24}{5}$
0	$-\frac{24}{5}$	0	$\frac{18}{5}$	$\frac{21}{5}$	318

(2)列 2 減 $\frac{3}{25}$ 列 1 且將 $\frac{24}{5}$ 列 1 加至列 3 ，則

最終表：

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	常 數
$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$
$-\frac{3}{10}$	0	1	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{2}$
12	0	0	6	3	330

於本題中，$\bar{x}_1 = 0$，$\bar{x}_2 = 2.5$，$\bar{x}_3 = 4.5$，$\bar{s}_1 = 0$，$\bar{s}_2 = 0$ 且 $\bar{\Pi} = 330$。第一種投入之影子價格爲 6；而第二種投入之影子價格爲 3。

14.3 已知資料如下：

極大化 $\Pi = 60g_1 + 100g_2$

受制於 $4g_1 + 5g_2 \leq 40$　　$2g_1 + 6g_2 \leq 42$

$6g_1 + 3g_2 \leq 42$　　$g_1, g_2 \geq 0$

重新作問題 14.1。

圖 (1) 建立最初簡形表。

最初簡形表：

g_1	g_2	s_1	s_2	s_3	常數
4	5	1	0	0	40
6	3	0	1	0	42
2	⑥	0	0	1	42
−60	−100	0	0	0	0

↑

(2) 變換基底與樞紐。

i. 列 3 乘以 $\frac{1}{6}$。

4	5	1	0	0	40
6	3	0	1	0	42
$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	7
−60	−100	0	0	0	0

ii 列 1 減 5 倍列 3，列 2 減 3 倍列 3，並將 100 倍列 3 加至列 4 以使得樞紐行其餘元素爲 0。

第二表：

g_1	g_2	s_1	s_2	s_3	常數
①	0	1	0	$-\frac{5}{6}$	5
5	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	21
$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	7
$-\frac{80}{3}$	0	0	0	$\frac{50}{3}$	700

↑

(3) 再度地變換基底與樞紐。

i. 列 1 乘以 $\frac{3}{7}$。

1	0	$\frac{3}{7}$	0	$-\frac{5}{14}$	$\frac{15}{7}$
5	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	21
$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	7
$-\frac{80}{3}$	0	0	0	$\frac{50}{3}$	700

ii. 列 2 減 5 倍列 1 ，列 3 減 $\frac{1}{3}$ 倍列 1 ，並將 $\frac{80}{3}$ 倍列 1 加至列 4 以使得樞紐行之其餘元素爲 0 。

最終表：

g_1	g_2	s_1	s_2	s_3	常 數
1	0	$\frac{3}{7}$	0	$-\frac{5}{14}$	$\frac{15}{7}$
0	0	$-\frac{15}{7}$	1	$\frac{9}{7}$	$\frac{72}{7}$
0	1	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{4}{14}$	$\frac{44}{7}$
0	0	$\frac{80}{7}$	0	$\frac{50}{7}$	$\frac{5300}{7}$

應注意本表中單位矩陣之單位向量之位置 。

$\bar{g}_1 = \frac{15}{7} = 2.14$ $\quad \bar{s}_1 = 0$ $\quad \bar{s}_3 = 0$

$\bar{g}_2 = \frac{44}{7} = 6.29$ $\quad \bar{s}_2 = \frac{72}{7} = 10.29$ $\quad \bar{\Pi} = \frac{5300}{7} = 757.14$

其投入之影子價格分別爲 11.43 ，0與 7.14 。

極小化

14.4 使用簡形算則求解下列方程式與不等式組，並求出每一限制必須物品之影子價格 。

極小化 $c = 60x_1 + 80x_2$

受制於 $2x_1 + 3x_2 \geq 36$ $\quad 8x_1 + 2x_2 \geq 32$

$2x_1 + 2x_2 \geq 28$ $\quad x_1, x_2 \geq 0$

圖 (1) 將每一不等限制式減去一超額變數，而將之轉化爲方程式，並以矩陣表示之，

$2x_1 + 3x_2 - s_1 = 36$ $\quad 2x_1 + 2x_2 - s_2 = 28$ $\quad 8x_1 + 2x_2 - s_3 = 32$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 28 \\ 32 \end{bmatrix}$$

由於第一個基本解不爲可能解，故加上人工變數，

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 28 \\ 32 \end{bmatrix}$$

(2) 接著建立最初之簡形表，將係數矩陣與常數行向量置於表之上方，表之下方則爲目標函數負值係數及超額變數之 0 係數與人工變數之大額係數（M）所組成之指標。

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	常　數
2	3	−1	0	0	1	0	0	36
2	2	0	−1	0	0	1	0	28
8	2	0	0	−1	0	0	1	32
−60	−80	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$	

將M倍之（列 1 + 列 2 + 列 3）加至列 4 以消去人工變數諸行的M而求得最初簡形表。

最初簡形表：

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	常　數
2	3	−1	0	0	1	0	0	36
2	2	0	−1	0	0	1	0	28
⑧	2	0	0	−1	0	0	1	32
$12M-60$ ↑	$7M-80$	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0	$96M$

(3) 決定其樞紐及樞紐元素，因爲 $12M-60$ 爲最大之負值指標，而 $\frac{32}{8}$ 爲最小之置換比例，故 8 爲樞紐元素。

i. 列 3 乘以 $\frac{1}{8}$。

2	3	−1	0	0	1	0	0	36
2	2	0	−1	0	0	1	0	28
1	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	4
$12M-60$	$7M-80$	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0	$96M$

ii. 列 1 減 2 倍列 3，列 2 減 2 倍列 3，並且列 4 減（$12M-60$）倍列 3，可導出第二個簡形表。

第二表：

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	常 數
0	⑤/2	−1	0	1/4	1	0	−1/4	28
0	3/2	0	−1	1/4	0	1	−1/4	20
1	1/4	0	0	−1/8	0	0	1/8	4
0	$4M-65$ ↑	$-M$	$-M$	$\frac{M-15}{2}$	0	0	$\frac{-3M+15}{2}$	$48M+240$

(4) 再度轉換樞紐

i. 列 1 乘以 $\frac{2}{5}$ 。

0	1	−2/5	0	1/10	2/5	0	−1/10	56/5
0	3/2	0	−1	1/4	0	1	−1/4	20
1	1/4	0	0	−1/8	0	0	1/8	4
0	$4M-65$	$-M$	$-M$	$\frac{M-15}{2}$	0	0	$\frac{-3M+15}{2}$	$48M+240$

ii. 列 2 減 $\frac{3}{2}$ 列 1 ，列 3 減 $\frac{1}{4}$ 列 1 以及列 4 減 （ $4M-65$ ）倍列 1 ，可導出第三個簡形表 。

第三表：

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	常 數
0	1	−2/5	0	1/10	2/5	0	−1/10	56/5
0	0	②/5	−1	1/10	−3/5	1	−1/10	16/5
1	0	1/10	0	−3/20	−1/10	0	3/20	6/5
0	0	$\frac{3M}{5}-26$ ↑	$-M$	$\frac{M}{10}-1$	$\frac{-8M}{5}+26$	0	$\frac{-11M}{10}+1$	$\frac{16M}{5}+968$

(5) 第三度轉換樞紐，應注意的是，負值元素不得用以作爲置換比例之分母，故此時 $\frac{3}{5}$ 爲新的樞紐元素 。

i. 列 2 乘以 $\frac{5}{3}$ 。

0	1	−2/5	0	1/10	2/5	0	−1/10	56/5
0	0	1	−5/3	1/6	−1	5/3	−1/6	16/3
1	0	1/10	0	−3/20	−1/10	0	3/20	6/5
0	0	$\frac{3M}{5}-26$	$-M$	$\frac{M}{10}-1$	$\frac{-8M}{5}+26$	0	$\frac{-11M}{10}+1$	$\frac{16M}{5}+968$

ii. 將 $\frac{2}{5}$ 倍列 2 加至列 1 ，列 3 減 $\frac{1}{10}$ 列 2 且列 4 減 [（ $3M/5$ ） − 26] 倍列 2 ，可導出第四個簡形表 。

第四表：

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	常 數
0	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{40}{3}$
0	0	1	$-\frac{5}{3}$	(2)	-1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{16}{3}$
1	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
0	0	0	$-\frac{130}{3}$	$\frac{10}{3}$ ↑	$-M$	$-M+\frac{130}{3}$	$-M-\frac{10}{3}$	$\frac{3320}{3}$

(6) 第四度轉換樞紐。

i. 列 2 乘以 6。

0	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{40}{3}$
0	0	6	-10	1	-6	10	-1	32
1	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
0	0	0	$-\frac{130}{3}$	$\frac{10}{3}$	$-M$	$-M+\frac{130}{3}$	$-M-\frac{10}{3}$	$\frac{3320}{3}$

ii. 列 1 減 $\frac{1}{6}$ 倍列 2，$\frac{1}{6}$ 倍列 2 加至列 3，且列 4 減 $\frac{10}{3}$ 倍列 2。

最終表：

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	常 數
0	1	-1	1	0	1	-1	0	8
0	0	6	-10	1	-6	10	-1	32
1	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	-1	$\frac{3}{2}$	0	6
0	0	-20	-10	0	$-M+20$	$-M+10$	$-M$	1000

注意，單位矩陣中單位向量之次序，$\bar{x}_1 = 6$，$\bar{x}_2 = 8$，$\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 0$，$\bar{s}_3 = 32$ 且 $\bar{c} = 1000$。限制式之影子價格分別爲 20，10 與 0。

14.5 已知資料如下：

極小化 $c = 36x_1 + 40x_2 + 28x_3$

受制於 $6x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 5$　　$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq 3$　　$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

重新作問題 14.4。

圖 (1) 將不等限制式減去超額變數，並於必要時加上人工變數而將之轉化爲方程式，

$$6x_1 + 5x_2 + 2x_3 - s_1 + A_1 = 5 \qquad 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - s_2 + A_2 = 3$$

(2) 建立最初之簡形表，

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	A_1	A_2	常 數
6	5	2	-1	0	1	0	5
2	5	4	0	-1	0	1	3
-36	-40	-28	0	0	$-M$	$-M$	

清除人工變數諸行以建立最初之簡形表如下：

最初簡形表：

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	A_1	A_2	常 數
6	5	2	−1	0	1	0	5
2	⑤	4	0	−1	0	1	3
$8M-36$	$10M-40$ ↑	$6M-28$	$-M$	$-M$	0	0	$8M$

(3) 轉換樞紐，首先列 2 乘以 $\frac{1}{5}$，將樞紐元素化爲 1，列 1 減 5 倍列 2 且列 3 減（$10M-40$）倍列 2。

第二表：

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	A_1	A_2	常 數
④	0	−2	−1	1	1	−1	2
$\frac{2}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
$4M-20$ ↑	0	$-2M+4$	$-M$	$M-8$	0	$-2M+8$	$2M+24$

(4) 再度轉換樞紐，列 1 乘以 $\frac{1}{4}$，可將樞紐元素化簡爲 1，然後列 2 減 $\frac{2}{5}$ 倍列 1，且列 3 減（$4M-20$）倍列 1。

最終表：

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	A_1	A_2	常 數
1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$
0	0	−6	−5	−3	$-M+5$	$-M+3$	34

因此，$\bar{x}_1=\frac{1}{2}$，$\bar{x}_2=\frac{2}{5}$，$\bar{x}_3=0$，$\bar{s}_1=0$，$\bar{s}_2=0$ 且 $\bar{c}=34$。由於 $\bar{s}_1=\bar{s}_2=0$。故本題諸限制式均剛好滿足，而無超額變數，其限制需求之影子價格分別爲 5 與 3。

14.6 已知資料如下：

極小化 $c=20y_1+30y_2+16y_3$

受制於 $2.5y_1+3y_2+y_3\geq 3$　　$y_1+3y_2+2y_3\geq 4$　　$y_1, y_2, y_3\geq 0$

重新作問題 14.4。

圖 (1) 建立最初之簡形表如下。

最初簡形表：

y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	A_1	A_2	常數
$\frac{1}{2}$	③	1	−1	0	1	0	3
1	3	2	0	−1	0	1	4
$\frac{7M}{2}-20$	$6M-30$ ↑	$3M-16$	$-M$	$-M$	0	0	$7M$

(2) 樞紐轉換

y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	A_1	A_2	常數
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1
$-\frac{1}{2}$	0	①	1	−1	−1	1	1
$\frac{-3M}{2}+5$	0	$M-6$ ↑	$M-10$	$-M$	$-2M+10$	0	$M+30$

(3) 再度轉變樞紐

y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	A_1	A_2	常數
$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$-\frac{1}{2}$	0	1	1	−1	−1	1	1
−4	0	0	−4	−6	$-M+4$	$-M+6$	36

因此，$\bar{y}_1=0$，$\bar{y}_2=\frac{3}{2}$，$\bar{y}_3=1$，$\bar{s}_1=0$，$\bar{s}_2=0$ 與 $\bar{c}=36$。其限制需求之影子價格分別爲 4 與 6。

多個最適解

14.7 使用簡形算則求解下列方程式與不等式：

極小化 $c=4x_1+2x_2$

受制於 $4x_1+x_2\geq 20$　　$x_1+6x_2\geq 18$

$2x_1+x_2\geq 14$　　$x_1,x_2\geq 0$

圖 (1) 建立最初之簡形表。

最初簡形表：

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	常數
4	1	−1	0	0	1	0	0	20
2	1	0	−1	0	0	1	0	14
1	⑥	0	0	−1	0	0	1	18
$7M-4$	$8M-2$ ↑	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0	$52M$

(2) 變換樞紐，首先列 3 乘以 $\frac{1}{6}$ 可將樞紐元素化簡爲 1，然後，列 1 減列 3，列 2 減列 3，並且列 4 減 $(8M-2)$ 倍列 3，如此可導出第二表。

第二表：

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	常數
$\frac{17}{6}$	0	-1	0	$\frac{1}{6}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	17
$\frac{11}{6}$	0	0	-1	$\frac{1}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	11
$\frac{1}{6}$	1	0	0	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	3
$\frac{17M-11}{3}$ ↑	0	$-M$	$-M$	$\frac{M-1}{3}$	0	0	$\frac{-4M+1}{3}$	$28M+6$

(3) 再度轉換樞紐，列 1 乘以 $\frac{6}{23}$，然後，列 2 減 $\frac{11}{6}$ 倍列 1，列 3 減 $\frac{1}{6}$ 倍列 1，並且列 4 減 $[(17M-11)/3]$ 倍列 1。

第三表：

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	常數
1	0	$-\frac{6}{23}$	0	$\frac{1}{23}$	$\frac{6}{23}$	0	$-\frac{1}{23}$	$\frac{102}{23}$
0	0	⑪	-1	$\frac{2}{23}$	$-\frac{11}{23}$	1	$-\frac{2}{23}$	$\frac{66}{23}$
0	1	$\frac{1}{23}$	0	$-\frac{4}{23}$	$-\frac{1}{23}$	0	$\frac{4}{23}$	$\frac{22}{23}$
0	0	$\frac{11M-22}{23}$ ↑	$-M$	$\frac{2M-4}{23}$	$\frac{-34M+22}{23}$	0	$\frac{-25M+4}{23}$	$\frac{66M+512}{23}$

(4) 第三度轉換樞紐，列 2 乘以 $\frac{23}{11}$，然後，$\frac{6}{23}$ 倍列 2 加至列 1，列 3 減 $\frac{11}{23}$ 列 2，並且列 4 減 $[(11M-22)/23]$ 倍列 2。

最終表：

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	常數
1	0	0	$-\frac{6}{11}$	$\frac{1}{11}$	0	$\frac{6}{11}$	$-\frac{1}{11}$	6
0	0	1	$-\frac{23}{11}$	$\frac{2}{11}$	-1	$\frac{23}{11}$	$-\frac{2}{11}$	6
0	1	0	$\frac{1}{11}$	$-\frac{2}{11}$	0	$-\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	2
0	0	0	-2	0	$-M$	$-M+2$	$-M$	28

由此最終之簡形表可知，$\bar{x}_1=6$，$\bar{x}_2=2$，$\bar{s}_1=6$，$\bar{s}_2=0$，$\bar{s}_3=0$ 與 $\bar{c}=28$，但不爲最後基底之 s_3，其指標爲 0，此乃表示 s_3 可以被包含在基底內而仍不致影響目標函數之值，因爲，此時目標函數已達到一最適解，因此，本題之最適解可能不只一個，總之，當一個不是基底內之變數，其指標爲 0 時，目標函數必定存在多個最適解。關於本題之題解，請參見問題 13.19。

第十五章

線性規劃：對偶

15.1 對 偶

於線性規劃中每一極大化（極小化）之問題均有一相互對應之極小化（極大化）之問題，其中原先之問題稱爲原始的（primal）；其對應的問題則稱爲對偶（dual），此二者之關係式可經由它們之間共同存在的參數予以轉換而獲得。［關於它們之拉格朗齊函數相似性質，請參見問題 12.30 (c) 與 12.31 (c)］。

例題 14.1

已知一原先或原始的問題，

極大化 $\Pi = g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3$

受制於

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

則其相關之對偶問題爲

極小化 $c = b_1z_1 + b_2z_2 + b_3z_3$

受制於

$$a_{11}z_1 + a_{21}z_2 + a_{31}z_3 \geq g_1$$
$$a_{12}z_1 + a_{22}z_2 + a_{32}z_3 \geq g_2$$
$$a_{13}z_1 + a_{23}z_2 + a_{33}z_3 \geq g_3$$
$$z_1, z_2, z_3 \geq 0$$

15.2 求取對偶問題之轉換規則

將一原始問題轉換爲對偶問題之規則如下：

1. 最適化之方向對調（即極大化改爲極小化，反之亦然）。
2. 技術限制式之不等式的符號反轉過來，但其中決策變數之非負限制式維持不變。
3. 原始問題中，限制式之係數矩陣的諸列轉換爲其對偶問題中限制式係數行元素。
4. 原始問題中，目標函數係數之列向量轉換爲其對偶問題中限制式之常數行向量。
5. 原始問題中，限制式之常數行向量轉換爲其對偶問題中，目標函數之係數列向量。

6. 原始問題中決策變數（x_j）將被對偶問題中決策變數（z_i）取代。

例題 15.2

下述線性規劃問題，

極大化 $\Pi = 5x_1 + 3x_2$

受制於 $6x_1 + 2x_2 \leq 36$

$5x_1 + 5x_2 \leq 40$

$2x_1 + 4x_2 \leq 28$ $\quad x_1, x_2 \geq 0$

之對偶問題爲

極小化 $c = 36z_1 + 40z_2 + 28z_3$

受制於 $6z_1 + 5z_2 + 2z_3 \geq 5$ $\quad 2z_1 + 5z_2 + 4z_3 \geq 3$ $\quad z_1, z_2, z_3 \geq 0$

例題 15.3

下述線性規劃問題

極小化 $c = 20z_1 + 30z_2 + 16z_3$

受制於 $2.5z_1 + 3z_2 + z_3 \geq 3$

$z_1 + 3z_2 + 2z_3 \geq 4$ $\quad z_1, z_2, z_3 \geq 0$

之對偶問題爲

極大化 $\Pi = 3x_1 + 4x_2$

受制於 $2.5x_1 + x_2 \leq 20$ $\quad x_1 + 2x_2 \leq 16$

$3x_1 + 3x_2 \leq 30$ $\quad x_1, x_2 \geq 0$

應注意的是，一對偶問題之對偶即爲原始問題。

15-3 對偶定理

有關線性規劃問題兩個極端重要之對偶定理敍述如下：

1. 原始問題中，目標函數之最適值必然等於其對偶問題中目標函數之最適值（假設一最適可能解存在的話）。
2. 如果在最適的可能解中
   - *i.* 原始問題中有一決策變數不爲 0，則在對偶問題中其對應之鬆弛（或超額）變數必定有一爲 0 之最適值。
   - *ii.* 原始問題中有一鬆弛（或超額）變數不爲 0，則在對偶問題中，其對應之決策變數必然有一爲 0 之最適值。

例題 15.4

已知下列之線型規劃問題

極大化 $\Pi = 14x_1 + 12x_2 + 18x_3$

受制於 $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$

$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4 \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0$

則以對偶定理求解(1)原始目標函數與(2)原始決策變數之最適值之步驟如下所述。首先，其對偶問題爲

極小化 $c = 2z_1 + 4z_2$

受制於 $2z_1 + z_2 \geq 14$

$z_1 + z_2 \geq 12$

$z_1 + 3z_2 \geq 18 \qquad z_1, z_2 \geq 0$

(1) 此對偶問題之最適值如第十三章例 2 之圖解方法所求得者：$\bar{z}_1 = 9$，$\bar{z}_2 = 3$ 與 $\bar{c} = 30$，由於此對偶問題之最適值爲 30，故由對偶定理知，原始問題之 $\bar{\Pi}$ 亦必然等於 30。

(2) 爲求原始決策變數之最適值，我們應將原始 (I) 之不等限制式加上鬆弛變數而將其對偶 (II) 之不等限制式減去超額變數以轉換爲方程式，應注意的是，此時原始問題所使用之鬆弛變數與對偶問題所使用之超額變數之符號應有所區別，在此，我們分別使用 s_i 與 t_i。

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + s_2 &= 4 \end{aligned} \tag{15.1}$$

$$\text{II.}\quad \begin{aligned} 2z_1 + z_2 - t_1 &= 14 \\ z_1 + z_2 - t_2 &= 12 \\ z_1 + 3z_2 - t_3 &= 18 \end{aligned} \tag{15.2}$$

將 $\bar{z}_1 = 9$，$\bar{z}_2 = 3$ 代入 (15.2) 式而求得 $\bar{t}_1$，$\bar{t}_2$，$\bar{t}_3$ 如下所示：

$$\begin{aligned} 2(9) + 3 - t_1 &= 14 \qquad \bar{t}_1 = 7 \\ -\ 9 + 3 - t_2 &= 12 \qquad \bar{t}_2 = 0 \\ 9 + 3(3) - t_3 &= 18 \qquad \bar{t}_3 = 0 \end{aligned}$$

由於第二與第三個對偶限制式之超額變數（$\bar{t}_2$，$\bar{t}_3$）均等於 0，故根據第二個對偶定理可知，其對應之原始決策變數（$\bar{x}_2$，$\bar{x}_3$）必定不等於 0。同時，由於 $\bar{t}_1 \neq 0$，故其對應之決策變數 $\bar{x}_1$ 必等於 0，因此 $\bar{x}_1 = 0$。

另外，根據第二個對偶定理亦可得知，如果對偶之決策變數（$\bar{z}_1$，$\bar{z}_2$）的最適值不等於 0，則其對應之原始鬆弛變數（$\bar{s}_1$，$\bar{s}_2$）必須等於 0，因此，將 $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 0$ 代入 (15.1) 式，並由上述知 $\bar{x}_1 = 0$，故 (15.1) 式可化簡爲

$$x_2 + x_1 = 2 \quad , \quad x_2 + 3x_3 = 4$$

以克萊莫法則求其聯立解可得，$\bar{x}_2 = 1$ 與 $\bar{x}_3 = 1$，因此，最適之決策變數爲 $\bar{x}_1 = 0$，$\bar{x}_2 = 1$ 與 $\bar{x}_3 = 1$，將之代入目標函數：$\Pi = 14(0) + 12(1) + 18(1) = 30$ 以檢查此決策變數值是否正確。

例題 15.5

例 4 之對偶問題可以如第十四章例 3 之原始問題求解，首先將 x_i 轉換爲 z_i，且 s_i 轉換爲 t_i，則其最終之簡形表爲

最終簡形表：

z_1	z_2	t_1	t_2	t_3	A_1	A_2	A_3	常 數
1	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	9
0	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	7
0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
0	0	0	-1	-1	$-M$	$-M+1$	$-M+1$	30

對偶問題之最終簡形表可用來求得(1)原始目標函數與(2)原始問題之決策變數的最適值。

(1) 原始問題中目標函數之最適值正如其對偶問題中目標函數之最適值，即此表中最後一列之最後一個元素：30。

(2) 而原始問題中決策變數之最適值亦可直接由此對偶表中找出，它們即爲對應之對偶問題超額變數行下之指標的絕對值。因爲 t_1 爲第一個對偶問題中限制式之超額變數，故其對應之 $\bar{x}_1 = 0$。另外，因爲 t_2 爲第二個對偶限制式之超額變數，故其對應之 $\bar{x}_2 = 1$，同理，$\bar{x}_3 = 1$。此對偶表中指標（予以匡起來者）之絕對值，即爲原始問題中決策變數之值，其餘人工變數（artificial variable）行下之指標則不具任何經濟意義。

15.4 使用對偶問題之優點

由上面所述之原始與對偶問題間之關係知，一目標函數之最適值可以由原始或對偶問題求得，並且，由於一規劃問題之決策變數與另一對偶（或原始）問題之鬆弛（或超額）變數存在互補性之關係，故只要求得其中一問題之解，即可同時得知另一問題之解，此即爲採用對偶問題之好處，因爲，

1. 我們可以將極小化之問題轉換爲極大化之問題來處理，因爲極大化問題通常較易處理。

2. 對於一個有三決策變數之原始問題，以對偶問題處理則可將之化簡爲二個決策變數之形式（參見例 3），因而，可採用圖解方法處理之。

例題15.6

下述即爲採用對偶問題之方法求取例 3 極小化問題之最適值。

例 3 極小化問題之對偶問題繪示如第十三章例 1，其中 $\bar{z}_1 = 4$，$\bar{z}_2 = 6$ 與 $\bar{\Pi} = 36$，則例 3 中原始問題之成本最小值爲 $\bar{c} = 36$，又使用例 4 之技巧可求得 $\bar{x}_1 = 0$，$\bar{x}_2 = \frac{2}{3}$ 與 $\bar{x}_3 = 1$。關於其相似的解可參見問題 15.1 - 15.4，而其簡形算則法所求得之解則參見問題 15.8。

15.5 對偶問題中之影子價格

當我們使用對偶來解原始問題時，所求得第 i 種資源之邊際值或影子價格（shadow price）即爲其對偶問題中目標函數與之相對應之決策變數。例如，在對偶問題之 z_i 即爲原始問題中第 i 種資源之影子價格，此時目標函數之最適值將永遠等於各種資源乘以其影子價格之總和，以例 1 之參數則如下之式子所示：

$$\Pi = \sum_{i=1}^{3} b_i z_i = b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 \tag{15.3}$$

例題15.7

例 5 中對偶問題之最終簡形表，可用來解得例 4 中原始問題各種資源之影子價格，首先，修正最終表中單位矩陣部分之單位向量的次序，則知，$\bar{z}_1 = 9$ 與 $\bar{z}_2 = 3$，因爲 z_1 與 z_2 爲對應於原始問題中兩種資源之對偶決策變數，故第一種資源之影子價格爲 9；而第二種資源之影子價格爲 3。

此外，這些影子價格可用來求得原始問題中目標函數之值，由例 4 之原始的限制式知其有二單位之第一種資源與四單位之第二種資源，將這些可用資源乘以其影子價格並予以加總，即 $\Pi = 2(9) + 4(3) = 30$。

15.6 影子價格與拉格朗齊乘數

影子價格之功能正如拉格朗齊乘數（參見 5.9），它亦爲估計當限制式每變動一單位所引起目標函數之變動量，此可由（15.3）式分別對 b_1，b_2 與 b_3 取偏導數而輕易證得：即

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b_1} = z_1 \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial b_2} = z_2 \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial b_3} = z_3 \tag{15.4}$$

由（15.4）式，很清楚地看到，限制式常數 b_1，b_2 或 b_3 每變動一單位，其目標函數將分別變動 z_1，z_2 或 z_3。

習題與解答

經由對偶，求解原始問題

15.1 對於下列之原始問題，(*a*) 寫出其對偶問題，(*b*) 以圖解求其對偶問題，然後以對偶解求 (*c*) 原始目標函數與 (*d*) 原始問題決策變數之最適值。

極小化 $c = 40x_1 + 20x_2 + 60x_3$

受制於 $2x_1 + 4x_2 + 10x_3 \geq 24$

$5x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 8 \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0$

圖 (*a*) 其對偶問題爲

極大化 $\Pi = 24z_1 + 8z_2$

受制於 $2z_1 + 5z_2 \leq 40$

$4z_1 + z_2 \leq 20$

$10z_1 + 5z_2 \leq 60 \qquad z_1, z_2 \geq 0$

(*b*) 此對偶問題於問題 13.9 中以原始問題圖解，將 x_i 轉化爲 z_i，則可求得 $\bar{z}_1 = 4$，$\bar{z}_2 = 4$，與 $\bar{\Pi} = 128$。

(*c*) 由於 $\bar{\Pi} = 128$，故 $\bar{c} = 128$。

(*d*) 爲從對偶問題中決策變數 (z_1, z_2) 求得原始問題之決策變數 (x_1, x_2, x_3)，首先將原始 (I) 與對偶 (II) 之不等式轉換爲方程式

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 - s_1 &= 24 \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 - s_2 &= 8 \end{aligned} \qquad \text{II.}\quad \begin{aligned} 2z_1 + 5z_2 + t_1 &= 40 \\ 4z_1 + z_2 + t_2 &= 20 \\ 10z_1 + 5z_2 + t_3 &= 60 \end{aligned}$$

然後將 $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = 4$ 代入對偶問題之限制方程式以解得鬆弛變數，

$$\begin{aligned} 2(4) + 5(4) + t_1 &= 40 & \bar{t}_1 &= 12 \\ 4(4) + 4 + t_2 &= 20 & \bar{t}_2 &= 0 \\ 10(4) + 5(4) + t_3 &= 60 & \bar{t}_3 &= 0 \end{aligned}$$

由於 $\bar{t}_1 \neq 0$，其對應之原始決策變數 $\bar{x}_1$ 必等於 0，又因爲 $\bar{t}_2 = \bar{t}_3 = 0$，故 $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3 \neq 0$。

因爲對偶問題中決策變數 (z_1, z_2) 之最適值不等於 0，故其對應之原始問題的超額變數 (s_1, s_2) 必定等於 0，將此等認知，$\bar{x}_1 = \bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 0$ 代入原始問題之限制方程式，則

$$2(0) + 4x_2 + 10x_3 - 0 = 24 \qquad 5(0) + x_2 + 5x_3 - 0 = 8$$

聯立解之，可得 $\bar{x}_2 = 4$ 與 $\bar{x}_3 = 0.8$。因此原始問題之決策變數爲 $\bar{x}_1 = 0$，$\bar{x}_2 = 4$ 與 $\bar{x}_3 = 0.8$。

15.2 已知原始問題如下：

極小化 $c = 36x_1 + 30x_2 + 40x_3$

受制於 $2x_1 + 5x_2 + 8x_3 \geq 40$

$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 50$ $\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$

重新作問題 15.1 。

圖 (*a*)

極大化 $\Pi = 40z_1 + 50z_2$

受制於 $2z_1 + 6z_2 \leq 36$

$5z_1 + 3z_2 \leq 30$

$8z_1 + 2z_2 \leq 40$ $\quad z_1, z_2 \geq 0$

(*b*) 其對等之對偶問題的圖解如問題 13.10 所示：$\bar{z}_1 = 3$ ，$\bar{z}_2 = 5$ 且 $\bar{\Pi} = 370$ 。

(*c*) 由於 $\bar{\Pi} = 370$ ，故 $\bar{c} = 370$ 。

(*d*) I. $2x_1 + 5x_2 + 8x_3 - s_1 = 40$

$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - s_2 = 50$

II $2z_1 + 6z_2 + t_1 = 36$

$5z_1 + 3z_2 + t_2 = 30$

$8z_1 + 2z_2 + t_3 = 40$

將 $\bar{z}_1 = 3$ 與 $\bar{z}_2 = 5$ 代入 II 可得，

$2(3) + 6(5) + t_1 = 36$ $\quad t_1 = 0$

$5(3) + 3(5) + t_2 = 30$ $\quad t_2 = 0$

$8(3) + 2(5) + t_3 = 40$ $\quad t_3 = 6$

由於 $\bar{t}_1 = \bar{t}_2 = 0$ ，故 $\bar{x}_1$ ，$\bar{x}_2 \neq 0$ 。又因為 $\bar{t}_3 \neq 0$ ，故 $\bar{x}_3 = 0$ ，由於 $\bar{z}_1$ ，$\bar{z}_2 \neq 0$ ，故 $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 0$ 。代入 I ：

$2x_1 + 5x_2 + 8(0) - 0 = 40$ $\quad 6x_1 + 3x_2 + 2(0) - 0 = 50$

因此，$\bar{x}_1 = 5.42$ ，$\bar{x}_2 = 5.83$ 與 $\bar{x}_3 = 0$ 。

15.3 已知線性規劃問題如下：

極大化 $\Pi = 15x_1 + 20x_2 + 24x_3$

受制於 $3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 120$

$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 60$ $\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$

重新作問題 15.1 。

圖 (*a*) 極小化 $c = 120z_1 + 60z_2$

受制於 $3z_1 + z_2 \geq 15$

$z_1 + 5z_2 \geq 20$

$3z_1 + 2z_2 \geq 24$ $\quad z_1, z_2 \geq 0$

(*b*) 其對等之對偶問題的解參見問題 13.14 ：$\bar{z}_1 = 2$ ，$\bar{z}_2 = 9$ 且 $\bar{c} = 780$ 。

(*c*) 由於 $\bar{c} = 780$ ，故 $\bar{\Pi} = 780$ 。

(*d*)

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 &= 120 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + s_2 &= 60 \end{aligned} \qquad \text{II.}\quad \begin{aligned} 3z_1 + z_2 - t_1 &= 15 \\ z_1 + 5z_2 - t_2 &= 20 \\ 3z_1 + 2z_2 - t_3 &= 24 \end{aligned}$$

將 $\bar{z}_1 = 2$ 與 $\bar{z}_2 = 9$ 代入 II 可得，

$$\begin{aligned} 3(2) + 9 - t_1 &= 15 & \bar{t}_1 &= 0 \\ 2 + 5(9) - t_2 &= 20 & \bar{t}_2 &= 27 \\ 3(2) + 2(9) - t_3 &= 24 & \bar{t}_3 &= 0 \end{aligned}$$

由於 $\bar{t}_1 = \bar{t}_3 = 0$，故 $\bar{x}_1$，$\bar{x}_3 \neq 0$。因爲 $\bar{t}_2 \neq 0$，故 $\bar{x} = 0$。由於 $\bar{z}_1$，$\bar{z}_2 \neq 0$，故 $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 0$，代入 I，

$$3x_1 + 0 + 3x_3 + 0 = 120 \qquad x_1 + 5(0) + 2x_3 + 0 = 60$$

因此，$\bar{x}_1 = 20$，$\bar{x}_2 = 0$ 與 $\bar{x}_3 = 20$。

15.4 已知線性規劃問題如下所示：

極大化 $\Pi = 36x_1 + 28x_2 + 32x_3$

受制於

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 &\leq 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 4 \end{aligned} \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

重新作問題 15.1。

圖 (*a*) 極小化 $c = 3z_1 + 4z_2$

受制於

$$\begin{aligned} 2z_1 + 3z_2 &\geq 36 \\ 2z_1 + 2z_2 &\geq 28 \\ 8z_1 + 2z_2 &\geq 32 \end{aligned} \qquad z_1, z_2 \geq 0$$

(*b*) 其對等之對偶問題的解，參見問題 13.15：$\bar{z}_1 = 6$，$\bar{z}_2 = 8$ 且 $\bar{c} = 50$。

(*c*) 由於 $\bar{c} = 50$，故 $\bar{\Pi} = 50$。

(*d*)

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + s_1 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_2 &= 4 \end{aligned} \qquad \text{II.}\quad \begin{aligned} 2z_1 + 3z_2 - t_1 &= 36 \\ 2z_1 + 2z_2 - t_2 &= 28 \\ 8z_1 + 2z_2 - t_3 &= 32 \end{aligned}$$

將 $\bar{z}_1 = 6$ 與 $\bar{z}_2 = 8$ 代入 II。

$$\begin{aligned} 2(6) + 3(8) - t_1 &= 36 & \bar{t}_1 &= 0 \\ 2(6) + 2(8) - t_2 &= 28 & \bar{t}_2 &= 0 \\ 8(6) + 2(8) - t_3 &= 32 & \bar{t}_3 &= 32 \end{aligned}$$

由於 $\bar{t}_1 = \bar{t}_2 = 0$，故 $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2 \neq 0$；$\bar{x}_3 = 0$ 又因爲 $\bar{t}_3 \neq 0$，且 $\bar{z}_1$，$\bar{z}_2 \neq 0$，故 $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 0$。代入 I，

$$2x_1 + 2x_2 + 8(0) + 0 = 3 \qquad 3x_1 + 2x_2 + 2(0) + 0 = 4$$

因此，$\bar{x}_1 = 1$，$\bar{x}_2 = \frac{1}{2}$，與$\bar{x}_3 = 0$。

15.5 使用問題 15.1 - 15.4 之對偶問題求原始問題中資源限制式之影子價格或邊際值（MV），其中A與B分別代表限制式 1 與 2。

圖 在原始問題中資源A與B之影子價格可由其對偶問題中決策變數z_1與z_2之邊際值得知，因此，

問題 15.1，$\text{MV}_A = \bar{z}_1 = 4$且$\text{MV}_B = \bar{z}_2 = 4$。
問題 15.2，$\text{MV}_A = \bar{z}_1 = 3$且$\text{MV}_B = \bar{z}_2 = 5$。
問題 15.3，$\text{MV}_A = \bar{z}_1 = 2$且$\text{MV}_B = \bar{z}_2 = 9$。
問題 15.4，$\text{MV}_A = \bar{z}_1 = 6$且$\text{MV}_B = \bar{z}_2 = 8$。

簡形算則與對偶問題

15.6 對於下列所予之問題，(*a*) 寫出其對偶問題，(*b*) 以簡形算則求解，(*c*) 使用最終之簡形表求出原始問題中目標函數與決策變數之最適值。

極大化　$\Pi = 5x_1 + 3x_2$

受制於
$$6x_1 + 2x_2 \leq 36$$
$$5x_1 + 5x_2 \leq 40$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 28 \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

圖 (*a*) 極小化　$c = 36z_1 + 40z_2 + 28z_3$

受制於
$$6z_1 + 5z_2 + 2z_3 \geq 5$$
$$2z_1 + 5z_2 + 4z_3 \geq 3 \qquad z_1, z_2, z_3 \geq 0$$

(*b*) 其對偶問題之解正如問題 14.5 當作原始問題所得之解，將x_i轉化爲z_i及s_i轉化爲t_i；則其最終之簡形表爲，

最終簡形表：

z_1	z_2	z_3	t_1	t_2	A_1	A_2	常數
1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$
0	0	−6	−5	−3	$-M+5$	$-M+3$	34

(*c*) 在對偶問題最終簡形表中，其超額變數t_1與t_2指標之絕對值即爲原始問題中決策變數x_1與x_2之最適值，因此，$\bar{x}_1 = 5$，$\bar{x}_2 = 3$且$\overline{\Pi} = 34$。我們可以第十四章之例 1 檢查此答案是否正確，因爲在十四章例 1 中，我們乃直接對原始問題求解。

15.7 已知問題如下所示：

極小化　$c = 30x_1 + 50x_2$

受制於
$$6x_1 + 2x_2 \geq 30$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 24$$
$$5x_1 + 10x_2 \geq 60 \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

重新作問題 15.6 。

解 (*a*) 極大化 $\Pi = 30z_1 + 24z_2 + 60z_3$

受制於
$$6z_1 + 3z_2 + 5z_3 \leq 30$$
$$2z_1 + 2z_2 + 10z_3 \leq 50 \qquad z_1, z_2, z_3 \geq 0$$

(*b*) 其對偶問題之解正如問題 14.2 中原始問題之解，對其變數作必要之調整，則最終簡形表爲

最終簡形表：

z_1	z_2	z_3	t_1	t_2	常 數
$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{5}{2}$
$-\frac{3}{10}$	0	1	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{2}$
12	0	0	6	3	330

(*c*) 因此，$\bar{x}_1 = 6$ ，$\bar{x}_2 = 3$ 且 $\bar{C} = 330$ 。參見問題 13.16 ，該題是直接的原始問題以圖解方法求得。

15.8 已知線性規劃問題如下所示：

極小化 $C = 20x_1 + 30x_2 + 16x_3$

受制於
$$2.5x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 4 \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

重新作問題 15.6 。

解 (*a*) 極大化 $\Pi = 3z_1 + 4z_2$

受制於
$$2.5z_1 + z_2 \leq 20$$
$$3z_1 + 3z_2 \leq 30$$
$$z_1 + 2z_2 \leq 16 \qquad z_1, z_2 \geq 0$$

(*b*) 其對偶問題之解正如問題 14.1 由原始問題求得之解，對其對偶變數作必要之調整，則其最終簡形表爲，

最終簡形表：

z_1	z_2	t_1	t_2	t_3	常 數
0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	4
1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	4
0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	6
0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	36

(*c*) 因此，$\bar{x}_1 = 0$，$\bar{x}_2 = \frac{2}{3}$，$\bar{x}_3 = 1$，且 $\bar{c} = 36$。參見例 6，該例題乃有關此問題之最先之解法。

15.9 已知問題如下所示：

極大化 $\qquad \Pi = 36x_1 + 28x_2 + 32x_3$

受制於 $\qquad 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 60$

$\qquad 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 80 \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0$

重新作問題 15.6。

圖 (*a*) 極小化 $\qquad c = 60z_1 + 80z_2$

受制於 $\qquad 2z_1 + 3z_2 \geq 36$

$\qquad 2z_1 + 2z_2 \geq 28$

$\qquad 8z_1 + 2z_2 \geq 32 \qquad z_1, z_2 \geq 0$

(*b*) 其對偶問題之解正如問題 14.4 中由原始問題求得之解，經過必要之調整後，其最終簡形表爲，

最終簡形表：

z_1	z_2	t_1	t_2	t_3	A_1	A_2	A_3	常 數
0	1	−1	1	0	1	−1	0	8
0	0	6	−10	1	−6	10	−1	32
1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	−1	$\frac{1}{2}$	0	6
0	0	−20	−10	0	$-M+20$	$-M+10$	$-M$	1000

(*c*) 因此，$\bar{x}_1 = 20$，$\bar{x}_2 = 10$，$\bar{x}_3 = 0$ 且 $\bar{\Pi} = 1000$。

退 化

15.10 一線性規劃問題中，如果基底中有任一變數之值爲 0，則稱此線性規劃退化，事實上，此乃意謂著行向量爲線性相依，故將問題排除一單一解之可能。根據上述，就下列所予之問題，(*a*) 建立其對偶問題，(*b*) 以簡形法求解，(*c*) 求原始問題之最適解。

極小化 $\qquad c = 4x_1 + 2x_2 \qquad (15.5)$

受制於 $\qquad 4x_1 + x_2 \geq 20$

$\qquad 2x_1 + x_2 \geq 14$

$\qquad x_1 + 6x_2 \geq 18 \qquad x_1, x_2 \geq 0$

圖 (*a*) 極大化 $\qquad \Pi = 20z_1 + 14z_2 + 18z_3 \qquad (15.6)$

受制於 $\qquad 4z_1 + 2z_2 + z_3 \leq 4$

$\qquad z_1 + z_2 + 6z_3 \leq 2 \qquad z_1, z_2, z_3 \geq 0$

(*b*) 將諸不等限制式轉化爲方程式，並以矩陣表示之，

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{15.7}$$

建立最初之簡形表。

最初簡形表：

z_1	z_2	z_3	t_1	t_2	常 數
④	2	1	1	0	4
1	1	6	0	1	2
−20 ↑	−14	−18	0	0	0

第一次樞紐轉換，首先，列 1 乘以 $\frac{1}{4}$，然後，列 2 減列 1，並將 20 倍列 1 加至列 3。

第二表：

z_1	z_2	z_3	t_1	t_2	常 數
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	1
0	$\frac{1}{2}$	⑤/4	$-\frac{1}{4}$	1	1
0	−4	−13 ↑	5	0	20

再度地轉換樞紐，首先列 2 乘以 $\frac{4}{23}$；然後列 1 減 $\frac{1}{4}$ 倍列 2 且將 13 倍列 2 加至列 3，可導出第三表，

第三表：

z_1	z_2	z_3	t_1	t_2	常 數
1	⑪/23	0	$\frac{6}{23}$	$-\frac{1}{23}$	$\frac{11}{23}$
0	②/23	1	$-\frac{1}{23}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{4}{23}$
0	$-\frac{46}{23}$ ↑	0	$\frac{107}{23}$	$\frac{52}{23}$	$\frac{512}{23}$

第三度轉換樞紐，此時其各個置換比率相等：

$$\frac{22}{23}\left(\frac{23}{11}\right) = 2 = \frac{4}{23}\left(\frac{23}{2}\right)$$

當兩個或以上之置換比例相等，則此線性規劃將退化，亦即，並非基

底內之所有變數值均爲非 0 者，在置換比例相等之情況下，任一列均可被選爲樞紐列，但選取簡形表左方爲一單位矩陣之形式者較爲有用，在此，我們選取 $\left(\frac{2}{23}\right)$ 爲樞紐元素，如此將使首二行退化爲單位矩陣。然後，列 2 乘以 $\frac{23}{2}$；列 1 減 $\frac{11}{23}$ 倍列 2 且將 $\frac{66}{23}$ 倍列 2 加至列 3 則可導出最終之簡形表。

最終簡形表：

z_1	z_2	z_3	t_1	t_2	常 數
1	0	$-\frac{11}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0
0	1	$\frac{23}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	2
0	0	33	3	8	28

由此最終簡形表可知 $\bar{z}_1 = 0$，$\bar{z}_2 = 2$，$\bar{z}_3 = 0$，$\bar{t}_1 = 0$，$\bar{t}_2 = 0$ 與 $\bar{\Pi} = 28$，我們可進一步以 (15.6) 式之最初之對偶問題檢查此答案即：

$$\Pi = 20(0) + 14(2) + 18(0) = 28$$

將之轉化爲原始問題，則可知 $\bar{x}_1 = 3$，$\bar{x}_2 = 8$ 且 $\bar{c} = 28$，此亦可由 (15.5) 式檢查之，即：$c = 4(3) + 2(8) = 28$。

然而，因爲在此最終簡形表中之基底內有一個變數之值爲 0，故此問題事實上爲線性相依，而爲多個最適解之情況，應注意的是，係數矩陣之行 2 與常數行向量爲線性相依之關係。另外，在問題 14.7 中，我們是直接以原始問題求解，其中 $\bar{x}_1 = 6$，$\bar{x}_2 = 2$ 且 $\bar{c} = 28$；此亦可以 (15.5) 式檢查之，有關其圖形之解，請參見問題 13.19。

第十六章

積分：不定積分

16-1 積　分

本書第三至第六章，專門介紹微分，所謂微分乃指對函數變動率之測量，然而在經濟學中，我們往往需要顛倒微分之次序，亦即，已知某函數之變動率［即導數$f(x)$］，而求函數$F(x)$之過程，此稱爲**積分**（integration），而函數$F(x)$稱爲函數$f(x)$之積分或**反導數**（antiderivative）。

例題 16.1

函數$f(x)$積分之數學表示式如下：

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

在此，方程式之左邊讀作“函數f of x對於x之積分”，符號$\int$爲積分之符號，而$f(x)$爲**積分因子**（integrand），c爲**積分常數**，此外，$F(x)+c$爲不定積分，此乃因爲x之函數爲一不特定者。

16-2 積分法則

下列之積分法則乃由對應之微分法則反轉過來而求得，它們之正確性可以很容易地予以檢查，因爲積分式之導數必須等於積分因子，例 2 爲每一法則之例示，而積分常數之重要角色則如例 3 所示。

法則 1. 常數k之積分爲

$$\int k\,dx = kx + c$$

法則 2. 1 之積分式簡寫爲dx而非 1 dx，

$$\int dx = x + c$$

法則 3. 冪函數x^n之積分式，可由乘冪法則求得，其中$n \neq -1$，

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \qquad n \neq -1$$

法則 4. x^{-1}（或 $1/x$）之積分式爲

$$\int x^{-1}\,dx = \ln x + c \qquad x > 0$$

此法則中，必須加上 $x > 0$ 之條件，因爲只有正數才存在對數，有關負數之積分式則爲

$$\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + c \qquad x \neq 0$$

法則 5. 指數函數之積分式爲

$$\int a^{kx}\,dx = \frac{a^{kx}}{k \ln a} + c$$

法則 6. 自然指數函數之積分式爲

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + c \qquad \text{因爲} \quad \ln e = 1$$

法則 7. 一常數乘以一函數之積分式等於此常數乘以此函數之積分式

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

法則 8. 兩個或多個函數之和或差的積分式等於它們積分式之和或差

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

法則 9. 一函數之負號之積分式等於此函數積分式之負號

$$\int -f(x)\,dx = -\int f(x)\,dx$$

例題 16.2

有關積分法則之範例如下所示，可對每一積分式取導數檢查其是否等於積分因子。

(i) $\int 3\,dx = 3x + c$ （法則 1）

(ii) $\int x^2\,dx = \frac{1}{2+1}x^{2+1} + c = \frac{1}{3}x^3 + c$ （法則 3）

$$(iii)\quad \int 5x^4\,dx = 5\int x^4\,dx \qquad \text{(法則 7)}$$
$$= 5\left(\frac{1}{5}x^5 + c_1\right) \qquad \text{(法則 3)}$$
$$= x^5 + c$$

其中 c_1 與 c 爲任意之常數且 $5c_1 = c$ 。正因爲 c 爲一任意常數，故在先前之計算過程可將之忽略，而只在最後寫出答案時予以包含在內。

$$(iv)\quad \int (3x^3 - x + 1)\,dx = 3\int x^3\,dx - \int x\,dx + \int dx \qquad \text{(法則 7，8 與 9)}$$
$$= 3\left(\frac{1}{4}x^4\right) - \frac{1}{2}x^2 + x + c \qquad \text{(法則 2 與 3)}$$
$$= \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

$$(v)\quad \int 3x^{-1}\,dx = 3\int x^{-1}\,dx \qquad \text{(法則 7)}$$
$$= 3\ln x + c \qquad \text{(法則 4)}$$

$$(vi)\quad \int 2^{3x}\,dx = \frac{2^{3x}}{3\ln 2} + c \qquad \text{(法則 5)}$$

$$(vii)\quad \int 9e^{-3x}\,dx = \frac{9e^{-3x}}{-3} + c \qquad \text{(法則 6)}$$
$$= -3e^{-3x} + c$$

例題 16.3

某些函數，若只是常數項不同，則它們具有相同之導數，例如，函數族 $F(x) = 2x + k$，無論 k 值爲多少，其導數均爲 $f(x) = 2$ ，如果將此過程顚倒過來，則很清楚地，$\int 2\,dx$ 必定爲一函數不定數之反導數或不定積分 ，而它們所不同的只是常數

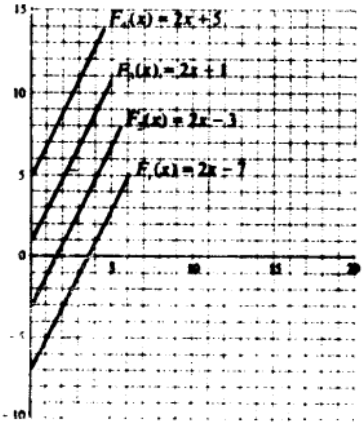


圖 16-1

項而已，因此，積分常數 c 事實上是代表任一原始函數中之常數，而此常數在求取其導數時，即被忽略不計。

有關不定積分族 $\int f(x)dx = F(x) + c$，其中 c 爲未定之特定值，其圖形如圖 16-1 所示，其曲線爲相互平行之平行線，斜率爲 $f(x)$，每一特定 c 值代表一特定之曲線；因此，c 值改變其曲線亦隨之移動，右圖 16-1 所示亦即爲不定積分式 $\int 2\,dx = 2x + c$，其中 $c = -7$，-3，1 與 5，如果 $c = 0$，則此曲線以原點爲起點。

16.3 初始條件與邊界條件

於許多問題中初始條件（initial condition）——當 $x = 0$ 時 $y = y_0$，或邊界條件（boundary condition）——當 $x = x_0$ 時 $y = y_0$，爲決定唯一之積分常數者。當我們賦予 c 一單一值時，其初始條件或邊界條件即可勾劃出一特定曲線，如例 3 所示。

例題 16.4

已知邊界條件爲，當 $x = 3$ 時 $y = 11$，則積分式 $y = \int 2\,dx$ 計算如下：

$$y = \int 2\,dx = 2x + c$$

當 $x = 3$ 時，以 $y = 11$ 代入，

$$11 = 2(3) + c \qquad c = 5$$

因此，$y = 2x + 5$，注意，即使 c 爲一特定者，$\int 2\,dx$ 仍爲一不定積分式，因爲 x 爲不特定者，因此積分式 $2x + 5$ 可假設爲一組可能值之不定數。

16.4 替代積分法

兩個可微分之 x 的函數之乘積或商，例如

$$\int 12x^2(x^3 + 2)\,dx$$

則無法經由上述簡單法則求其積分式，然而，如果此積分因子可以被分解爲一常數乘以一函數 u，且此函數之導數 du/dx，可以經由替代積分法求積分。其步驟如下：首先將積分因子 $f(x)$ 分解爲 u 之函數及其導數 du/dx，然後再對 x 求積分

$$\int f(x)\,dx = \int \left(u \frac{du}{dx}\right) dx$$

消去 dx's，

$$\int f(x)\,dx = \int u\,du = F(u) + c$$

此種積分之替代法正如微分中之連鎖律一般，恰爲一體之兩面。

例題 16.5

以替代法求 $\int 12x^2(x^3+2)\,dx$ 之積分例示如下，請你利用連鎖律以檢查所求得之答案是否正確。

(1) 首先確證此積分因子是否可以分解爲 u 與 du/dx 之乘積，關於 u 之選取，乃由獨立變數 x 次冪最高者令其爲 u，本例中，即令 $u = x^3 + 2$，因此 $du/dx = 3x^2$，然後求解 dx，$dx = du/3x^2$，則以 $u = x^3 + 2$ 與 $dx = du/3x^2$ 代入原來之積分因子。

$$\int 12x^2(x^3+2)\,dx = \int 12x^2 u\,\frac{du}{3x^2} = \int 4u\,du = 4\int u\,du \qquad \text{爲 } u \text{ 之常數倍數式}$$

(2) 以法則 3 求其積分，並暫時忽略原先計算式中之 c。

$$4\int u\,du = 4\left(\frac{1}{2}u^2\right) = 2u^2 + c$$

(3) 以 $u = x^3 + 2$ 代入，則

$$\int 12x^2(x^3+2)\,dx = 2u^2 + c = 2(x^3+2)^2 + c$$

本題之解法，亦請參見習題 16.7 - 16.18。

例題 16.6

求積分式 $\int 4x(x+1)^3\,dx$。

令 $u = x + 1$，則 $du/dx = 1$ 與 $dx = du/1 = du$。將 $u = x + 1$ 與 $dx = du$ 代入原先之積分因子。

$$\int 4x(x+1)^3\,dx = \int 4xu^3\,du = 4\int xu^3\,du$$

因爲 x 爲一無法再予分解之變數，故原先之積分因子無法被轉換爲 $u\,du/dx$ 之常數倍數式，此時，無法使用替代積分法，而必須採用部分積分法（參見 16.5 節）。

16.5 部份積分法

如果一積分因子爲 x 之可微分函數的乘積或商式，但無法被分解爲 $u\,du/dx$ 之常數倍數型式，則我們往往採用**部分積分**（integration by parts）法，此方法之原理乃根據對某乘積式求其微分之相反步驟而導出，根據 3.4 節之乘積法則，

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

取其導數之積分式，可得

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx$$

然後，先求右邊之積分式，則

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx \qquad (16.1)$$

對於更複雜形式之函數的積分，我們往往須藉助於積分表之使用，一般而言，積分表含括500種不同函數之積分公式，我們可以在一般的數學手册尋得。

例題16.7

以部分積分法求 $\int 4x(x+1)^3 dx$ 之積分，例示如下：

(1) 首先將積分因子分解成適合於公式(16.1)之兩個部分，在此，令 $f(x) = 4x$ 與 $g'(x) = (x+1)^3$，如果 $f(x) = 4x$，則 $f'(x) = 4$，同時，如果 $g'(x) = (x+1)^3$ 則 $g(x) = \int (x+1)^3 dx$，此時 $g(x)$ 可以乘冪法則（法則3）求其積分：

$$g(x) = \tfrac{1}{4}(x+1)^4 + c$$

其中 c 可以暫時予以忽略，直到最後階段再予寫出。

(2) 將 $f(x)$，$g(x)$ 與 $f(x)$ 之值代入（16.1）式；並注意，$g'(x)$ 並不出現於公式裡，

$$\int 4x(x+1)^3\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$
$$= 4x\left[\frac{1}{4}(x+1)^4\right] - \int \frac{1}{4}(x+1)^4 4\,dx = x(x+1)^4 - \int (x+1)^4\,dx$$

(3) 使用法則3求解其餘之積分式，

$$\int 4x(x+1)^3\,dx = x(x+1)^4 - \frac{1}{5}(x+1)^5 + c$$

例題16.8

求解 $\int 2xe^x$ 積分式，例示如下：

令 $f(x) = 2x$，$f'(x) = 2$，$g'(x) = e^x$，與 $g(x) = \int e^x dx = e^x$。代入(16.1)式，則

$$\int 2xe^x\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$
$$= 2xe^x - \int e^x 2\,dx = 2xe^x - 2\int e^x\,dx$$

運用法則 6 ，可得

$$\int 2xe^x\,dx = 2xe^x - 2e^x + c = 2e^x(x-1) + c$$

16.6 經濟學上之應用

淨投資（net investment）I，定義爲資本形成K在某特定期間 t 內之變動率，如果在此期間內，資本形成是連續之過程，則 $I(t) = dK(t)/dt = K'(t)$，因此，我們可由已知之投資變動率估算資本累積之水準，亦即，資本存量爲淨投資對於時間 t 之積分式；

$$K_t = \int I(t)\,dt = K(t) + c = K(t) + K_0$$

其中 c ＝原先之資本存量K_0 。

同理，我們可由已知之邊際成本利用積分式估算總成本，因爲邊際成本爲產出變動所引起總成本之變動量，即 $\mathrm{MC} = d\mathrm{TC}/dQ$ ，並且 ，只有可變動成本將隨著產量變動而變動。

$$\mathrm{TC} = \int \mathrm{MC}\,dQ = \mathrm{VC} + c = \mathrm{VC} + \mathrm{FC}$$

因爲 c ＝固定或原先之成本FC 。在經濟學中處理變數之時徑（time path）或判別變數是否隨著時間改變而逐漸趨近均衡值之分析謂之動態（dynamic）分析，有關這方面的應用，請參見問題 16.25 - 16.35 。

例題 16.9

已知淨投資爲 $I(t) = 140\,t^{3/4}$ ，且原先之資本存量 — 即 $t = 0$ 時，爲 150 ，試求資本K函數即其時間趨勢$K(t)$ ，

$$K = \int 140t^{3/4}\,dt = 140\int t^{3/4}\,dt$$

由乘冪法則知，

$$K = 140(\tfrac{4}{7}t^{7/4}) + c = 80t^{7/4} + c$$

但 $c = K_0 = 150$ 。因此，$K = 80t^{7/6} + 150$ 。

習題與解答

不定積分

16.1 試求取下列諸積分式，並求此積分式之導數是否等於積分因子以檢查你的答案是否正確。

圖 (*a*) $\int 3.5\,dx$

$$\int 3.5\,dx = 3.5x + c \quad \text{（法則 1）}$$

(*b*) $\int -\frac{1}{2}\,dx$

$$\int -\frac{1}{2}\,dx = -\int \frac{1}{2}\,dx = -\frac{1}{2}x + c \quad \text{（法則 9）}$$

(*c*) $\int dx$

$$\int dx = x + c \quad \text{（法則 2）}$$

(*d*) $\int x^5\,dx$

$$\int x^5\,dx = \frac{1}{6}x^6 + c \quad \text{（法則 3）}$$

(*e*) $\int 4x^3\,dx$

$$\int 4x^3\,dx = 4\int x^3\,dx \quad \text{（法則 7）}$$
$$= 4(\tfrac{1}{4}x^4) + c = x^4 + c \quad \text{（法則 3）}$$

(*f*) $\int x^{2/3}\,dx$

$$\int x^{2/3}\,dx = \frac{3}{5}x^{5/3} + c \quad \text{（法則 3）}$$

(*g*) $\int x^{-1/5}\,dx$

$$\int x^{-1/5}\,dx = \frac{5}{4}x^{4/5} + c \quad \text{（法則 3）}$$

(*h*) $\int 4x^{-2}\,dx$

$$\int 4x^{-2}\,dx = -4x^{-1} + c \quad \text{（法則 3）}$$

(i) $\int x^{-5/2}\,dx$

$$\int x^{-5/2}\,dx = -\frac{2}{3}x^{-3/2} + c \qquad (\text{法則 3})$$

16.2 對於下列諸問題重新作問題 16.1 :

答 (a) $\int \frac{dx}{x}$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c \qquad (\text{法則 4})$$

(b) $\int 5x^{-1}\,dx$

$$\int 5x^{-1}\,dx = 5\ln x + c \qquad (\text{法則 7 \& 4})$$

(c) $\int \frac{1}{3x}\,dx$

$$\int \frac{1}{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}\ln x + c \qquad (\text{法則 7 \& 4})$$

(d) $\int \sqrt{x}\,dx$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + c \qquad (\text{法則 3})$$

(e) $\int \frac{dx}{x^4}$

$$\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4}\,dx = -\frac{1}{3}x^{-3} + c \qquad (\text{法則 3})$$

(f) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-1/3}\,dx = \frac{3}{2}x^{2/3} + c \qquad (\text{法則 3})$$

(g) $\int (5x^3 + 2x^2 + 3x)\,dx$

$$\int (5x^3 + 2x^2 + 3x)\,dx = 5\int x^3\,dx + 2\int x^2\,dx + 3\int x\,dx \qquad (\text{法則 7 \& 8})$$

$$= 5\left(\frac{1}{4}x^4\right) + 2\left(\frac{1}{3}x^3\right) + 3\left(\frac{1}{2}x^2\right) + c \qquad (\text{法則 3})$$

$$= \tfrac{5}{4}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + c$$

(*h*) $\int (2x^6 - 3x^4)\,dx$

$$\int (2x^6 - 3x^4)\,dx = \frac{2}{7}x^7 - \frac{3}{5}x^5 + c \qquad \text{（法則 3，7，8 \& 9）}$$

16.3 求 $y = \int (x^{1/2} + 3x^{-1/2})\,dx$ 之積分，已知初始條件爲 $y = 0$ 當 $x = 0$。

圖
$$y = \int (x^{1/2} + 3x^{-1/2})\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 6x^{1/2} + c$$

將初始條件，當 $x = 0$ 時，$y = 0$，代入上式，則 $c = 0$。故，$y = \frac{2}{3}x^{3/2} + 6x^{1/2}$。

16.4 求積分式 $y = \int (2x^5 - 3x^{-1/4})\,dx$，已知初始條件爲，當 $x = 0$ 時，$y = 6$。

圖
$$y = \int (2x^5 - 3x^{-1/4})\,dx = \frac{1}{3}x^6 - 4x^{3/4} + c$$

將 $y = 6$ 與 $x = 0$，代入上式可得 $c = 6$。因此，$y = \frac{1}{3}x^6 - 4x^{3/4} + 6$。

16.5 求積分式 $y = \int (10x^4 - 3)\,dx$，已知邊界條件爲，當 $x = 1$ 時，$y = 21$。

$$y = \int (10x^4 - 3)\,dx = 2x^5 - 3x + c$$

圖 將 $y = 21$ 與 $x = 1$ 代入上式，可知 $21 = 2(1)^5 - 3(1) + c$，故 $c = 22$

$$y = 2x^5 - 3x + 22$$

16.6 對於下列諸式，重新作問題 16.1：

(*a*) $\int 2^{4x}\,dx$

$$\int 2^{4x}\,dx = \frac{2^{4x}}{4 \ln 2} + c \qquad \text{（法則 5）}$$

(*b*) $\int 8^x\,dx$

$$\int 8^x\,dx = \frac{8^x}{\ln 8} + c$$

(*c*) $\int e^{5x}\,dx$

$$\int e^{5x}\,dx = \frac{e^{5x}}{5} + c = \tfrac{1}{5}e^{5x} + c \qquad \text{（法則 6）}$$

(*d*) $\int 16e^{-4x}\,dx$

$$\int 16e^{-4x}\,dx = \frac{16e^{-4x}}{-4} + c = -4e^{-4x} + c$$

(*e*) $\int (6e^{3x} - 8e^{-2x})\,dx$

$$\int (6e^{3x} - 8e^{-2x})\,dx = \frac{6e^{3x}}{3} - \frac{8e^{-2x}}{-2} + c = 2e^{3x} + 4e^{-2x} + c$$

替代積分法

16.7 使用替代積分法，求積分式 $\int 10x(x^2+3)^4\,dx$，並設法檢查你所求得之答案。

解 令 $u = x^2 + 3$。則 $du/dx = 2x$ 與 $dx = du/2x$。將這些式子代入原先之積分因子，以使其化簡爲 $u\,du/dx$ 之函數型式，

$$\int 10x(x^2+3)^4\,dx = \int 10xu^4\frac{du}{2x} = 5\int u^4\,du$$

利用乘冪法則求其積分，
$$5\int u^4\,du = 5\left(\frac{1}{5}u^5\right) = u^5 + c$$

代入 $u = x^2 + 3$，則 $\int 10x(x^2+3)^4\,dx = u^5 + c = (x^2+3)^5 + c$。

16.8 已知 $\int x^4(2x^5-5)^4\,dx$，重新作問題 16.7。

解 令 $u = 2x^5 - 5$，則 $du/dx = 10x^4$，且 $dx = du/10x^4$，代入原先之積分因子

$$\int x^4(2x^5-5)^4\,dx = \int x^4u^4\frac{du}{10x^4} = \frac{1}{10}\int u^4\,du$$

求其積分，
$$\frac{1}{10}\int u^4\,du = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{5}u^5\right) = \frac{1}{50}u^5 + c$$

代入，可得
$$\int x^4(2x^5-5)^4\,dx = \frac{1}{50}u^5 + c = \frac{1}{50}(2x^5-5)^5 + c$$

16.9 已知 $\int (x-9)^{7/4}\,dx$，重新作問題 16.7。

解 令 $u = x - 9$。則 $du/dx = 1$ 且 $dx = du$。代入原先之積分因子。

$$\int (x-9)^{7/4}\,dx = \int u^{7/4}\,du$$

求其積分，即
$$\int u^{7/4}\,du = \frac{4}{11}u^{11/4} + c$$

代入 u，則
$$\int (x-9)^{7/4}\,dx = \frac{4}{11}(x-9)^{11/4} + c$$

當 $du/dx = 1$ 時，我們可利用乘冪法則，很快地由替代法求得其積分式。

16.10 已知 $\int (6x-11)^{-5}\,dx$，重新作問題 16.7。

解 令 $u = 6x - 11$。則 $du/dx = 6$ 且 $dx = du/6$。代入原先之積分因子

$$\int (6x-11)^{-5}\,dx = \int u^{-5}\frac{du}{6} = \frac{1}{6}\int u^{-5}\,du$$

求其積分，則
$$\frac{1}{6}\int u^{-5}\,du = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{-4}u^{-4}\right) = -\frac{1}{24}u^{-4} + c$$

代入 u，則
$$\int (6x-11)^{-5}\,dx = -\frac{1}{24}(6x-11)^{-4} + c$$

注意，本題中$du/dx = 6 \neq 1$，故我們無法直接使用乘冪法則。

16.11 已知 $\int \frac{x^2}{(4x^3+7)^2}\,dx$，試重新作問題 16.7。

圖

$$\int \frac{x^2}{(4x^3+7)^2}\,dx = \int x^2(4x^3+7)^{-2}\,dx$$

令$u = 4x^3 + 7$，則$du/dx = 12x^2$，且$dx = du/12x^2$，代入原先之積分因子

$$\int x^2u^{-2}\frac{du}{12x^2} = \frac{1}{12}\int u^{-2}\,du$$

求其積分，則

$$\frac{1}{12}\int u^{-2}\,du = -\frac{1}{12}u^{-1} + c$$

代入u，可知

$$\int \frac{x^2}{(4x^3+7)^2}\,dx = -\frac{1}{12(4x^3+7)} + c$$

16.12 已知 $\int \frac{6x^2+4x+10}{(x^3+x^2+5x)^3}\,dx$，重新作問題 16.7。

圖 令$u = x^3 + x^2 + 5x$。則$du/dx = 3x^2 + 2x + 5$且$dx = du/(3x^2 + 2x + 5)$。代入原先之積分因子，

$$\int (6x^2+4x+10)u^{-3}\frac{du}{3x^2+2x+5} = 2\int u^{-3}\,du$$

求其積分，則

$$2\int u^{-3}\,du = -u^{-2} + c$$

代入u，可得

$$\int \frac{6x^2+4x+10}{(x^3+x^2+5x)^3}\,dx = -\frac{1}{(x^3+x^2+5x)^2} + c$$

16.13 已知 $\int \frac{dx}{9x-5}$，試重新作問題 16.7。

$$\int \frac{dx}{9x-5} = \int (9x-5)^{-1}\,dx$$

圖 令$u = 9x - 5$，則$du/dx = 9$，且$dx = du/9$。代入原先之積分因子，

$$\int u^{-1}\frac{du}{9} = \frac{1}{9}\int u^{-1}\,du$$

以法則 4 求其積分，則$\frac{1}{9}\int u^{-1}\,du = \frac{1}{9}\ln|u| + c$。因爲$u$可能$\geq 0$，且因只有正數才存在對數，故我們取$u$之絕對值（參見法則 4），將$u$代回去，則

$$\int \frac{dx}{9x-5} = \frac{1}{9}\ln|9x-5| + c$$

16.14 已知 $\int \frac{3x^2+2}{4x^3+8x}\,dx$，試重新作問題 16.7。

圖 令 $u = 4x^3 + 8x$ ，則 $du/dx = 12x^2 + 8$ ，且 $dx = du/(12x^2 + 8)$ 。代入原先之積分因子

$$\int (3x^2+2)u^{-1}\frac{du}{12x^2+8} = \frac{1}{4}\int u^{-1}\,du$$

求其積分，則

$$\frac{1}{4}\int u^{-1}\,du = \frac{1}{4}\ln|u| + c$$

代回 u ，則

$$\int \frac{3x^2+2}{4x^3+8x}\,dx = \frac{1}{4}\ln|4x^3+8x| + c$$

16.15 使用替代法求積分式 $\int x^3 e^{x^4}dx$ ，並檢查你的答案是否正確。

圖 令 $u = x^4$ ，則 $du/dx = 4x^3$ 且 $dx = du/4x^3$ 。代入原先之積分因子，並注意此時 u 爲一指數。

$$\int x^3 e^u \frac{du}{4x^3} = \frac{1}{4}\int e^u\,du$$

使用法則 6 求其積分，

$$\frac{1}{4}\int e^u\,du = \frac{1}{4}e^u + c$$

代回 u ，則

$$\int x^3 e^{x^4}\,dx = \frac{1}{4}e^{x^4} + c$$

16.16 已知 $\int 24xe^{3x^2}dx$ ，重新作問題 16.15 。

圖 令 $u = 3x^2$ ，則 $du/dx = 6x$ ，且 $dx = du/6x$ ，代入原先之積分因子

$$\int 24xe^u \frac{du}{6x} = 4\int e^u\,du$$

求其積分，則

$$4\int e^u\,du = 4e^u + c$$

代回 u ，則

$$\int 24xe^{3x^2}\,dx = 4e^{3x^2} + c$$

16.17 已知 $\int 14e^{2x+7}dx$ ，試重新作問題 16.15 。

圖 令 $u = 2x + 7$ ；則 $du/dx = 2$ 且 $dx = du/2$ 。代入原先之積分因子，

$$\int 14e^u \frac{du}{2} = 7\int e^u\,du = 7e^u + c$$

代回 u ，則

$$\int 14e^{2x+7}\,dx = 7e^{2x+7} + c$$

16.18 已知 $\int 5xe^{5x^2+3}dx$ ，重新作問題 16.15 。

圖 令 $u = 5x^2 + 3$ ，則 $du/dx = 10x$ ，且 $dx = du/10x$ ，代入原先之積分因子

$$\int 5xe^u \frac{du}{10x} = \frac{1}{2}\int e^u\,du$$

求其積分，則

$$\frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + c$$

代回 u ，可得

$$\int 5xe^{5x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}e^{5x^2+3} + c$$

部分積分法

16.19 已知 $\int 15x(x+4)^{3/2}dx$，試以部分積分法，求此積分式，並以導數之求取檢查你所求得之答案是否正確。

圖 令 $f(x)=15x$，則 $f'(x)=15$。令 $g'(x)=(x+4)^{3/2}$，則 $g(x)=\int(x+4)^{3/2}dx=\frac{2}{5}(x+4)^{5/2}$。代入（16.1）式，則

$$\int 15x(x+4)^{3/2}\,dx = f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)\,dx$$

$$= 15x\left[\frac{2}{5}(x+4)^{5/2}\right]-\int\frac{2}{5}(x+4)^{5/2}15\,dx = 6x(x+4)^{5/2}-6\int(x+4)^{5/2}\,dx$$

計算剩下來之積分式，

$$\int 15x(x+4)^{3/2}\,dx = 6x(x+4)^{5/2}-\frac{12}{7}(x+4)^{7/2}+c$$

16.20 已知 $\int\frac{2x}{(x-8)^3}dx$，試重新作問題 16.19。

圖 令 $f(x)=2x$，則 $f'(x)=2$，且令 $g'(x)=(x-8)^{-3}$，則 $g(x)=\int(x-8)^{-3}dx=-\frac{1}{2}(x-8)^{-2}$。代入（16.1）式，

$$\int\frac{2x}{(x-8)^3}\,dx = 2x\left[-\frac{1}{2}(x-8)^{-2}\right]-\int-\frac{1}{2}(x-8)^{-2}2\,dx = -x(x-8)^{-2}+\int(x-8)^{-2}\,dx$$

最後一次積分，

$$\int\frac{2x}{(x-8)^3}\,dx = -x(x-8)^{-2}-(x-8)^{-1}+c$$

16.21 已知 $\int\frac{5x}{(x-1)^2}dx$，試重新作問題 16.19。

圖 令 $f(x)=5x$，則 $f'(x)=5$，且令 $g'(x)=(x-1)^{-2}$；則 $g(x)=\int(x-1)^{-2}dx=-(x-1)^{-1}$。代入（16.1）式，

$$\int\frac{5x}{(x-1)^2}\,dx = 5x[-(x-1)^{-1}]-\int-(x-1)^{-1}5\,dx = -5x(x-1)^{-1}+5\int(x-1)^{-1}\,dx$$

再度求取積分式，

$$\int\frac{5x}{(x-1)^2}\,dx = -5x(x-1)^{-1}+5\ln|x-1|+c$$

16.22 已知 $\int 6xe^{x+7}dx$，試重新作問題 16.19。

圖 令 $f(x)=6x$，則 $f'(x)=6$，且令 $g'(x)=e^{x+7}$，則 $g(x)=\int e^{x+7}dx=e^{x+7}$。使用公式（16.1），

$$\int 6xe^{x+7}\,dx = 6xe^{x+7}-\int e^{x+7}6\,dx = 6xe^{x+7}-6\int e^{x+7}\,dx$$

再一次積分之，則

$$\int 6xe^{x+7}\,dx = 6xe^{x+7} - 6e^{x+7} + c$$

16.23 使用部分積分法計算 $\int 16xe^{-(x+9)}\,dx$ 。

圖 令 $f(x) = 16x$ ，則 $f'(x) = 16$ ，再令 $g'(x) = e^{-(x+9)}$ ，則 $g(x) = \int e^{-(x+9)}\,dx = -e^{-(x+9)}$ ，使用（16.1）式，

$$\int 16xe^{-(x+9)}\,dx = -16xe^{-(x+9)} - \int -e^{-(x+9)}16\,dx = -16xe^{-(x+9)} + 16\int e^{-(x+9)}\,dx$$

再一次地求積分式，則

$$\int 16xe^{-(x+9)}\,dx = -16xe^{-(x+9)} - 16e^{-(x+9)} + c$$

16.24 已知 $\int x^2e^{2x}\,dx$ ，試重新作問題 16.23 。

圖 令 $f(x) = x^2$ ，則 $f'(x) = 2x$ ，再令 $g'(x) = e^{2x}$ ，則 $g(x) = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$ 。代入（16.1）式，

$$\int x^2e^{2x}\,dx = x^2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \int \frac{1}{2}e^{2x}(2x)\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}\,dx \qquad (16.2)$$

對其餘之積分項，再次地使用部分積分法，$f(x) = x$ ，$f'(x) = 1$ ，$g'(x) = e^{2x}$ ，且 $g(x) = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$ 。使用（16.1）式，

$$\int xe^{2x}\,dx = x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

最後，代入（16.2）式，可得

$$\int x^2e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

經濟學上之應用

16.25 已知淨投資爲 $I = 40t^{3/5}$ 而在 $t = 0$ 時之資本存量爲 75，試求資本函數 K。

$$K = \int I\,dt = \int 40t^{3/5}\,dt = 40\left(\frac{5}{8}t^{8/5}\right) + c = 25t^{8/5} + c$$

圖 代入 $t = 0$ 與 $K = 75$ ，

$$75 = 0 + c \qquad c = 75$$

則，$K = 25t^{8/5} + 75$ 。

16.26 已知淨投資爲 $I = 60t^{1/3}$ 而在 $t = 1$ 時，資本存量爲 85，求 K？

$$K = \int 60t^{1/3}\,dt = 45t^{4/3} + c$$

圖 在 $t = 1$ 時 $K = 85$ ，

$$85 = 45(1) + c \qquad c = 40$$

因此，$K = 45t^{4/3} + 40$ 。

16.27 已知邊際成本爲 $\mathrm{MC} = d\,\mathrm{TC}/dQ = 25 + 30Q - 9Q^2$ ，且固定成本爲 55 ，試求 (*a*) 總成本，(*b*) 平均成本，與 (*c*) 變動成本函數。

圖 (*a*) $$\mathrm{TC} = \int \mathrm{MC}\,dQ = \int (25 + 30Q - 9Q^2)\,dQ = 25Q + 15Q^2 - 3Q^3 + c$$

由於 $\mathrm{FC} = 55$ 在 $Q = 0$ 時，$\mathrm{TC} = \mathrm{FC} = 55$ 。因此，$c = \mathrm{FC} = 55$ 且 $\mathrm{TC} = 25Q + 15Q^2 - 3Q^3 + 55$ 。

(*b*) $$\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{TC}}{Q} = 25 + 15Q - 3Q^2 + \frac{55}{Q}$$

(*c*) $$\mathrm{VC} = \mathrm{TC} - \mathrm{FC} = 25Q + 15Q^2 - 3Q^3$$

16.28 已知 $\mathrm{MC} = d\,\mathrm{TC}/dQ = 32 + 18Q - 12Q^2$ ，$\mathrm{FC} = 43$ ，求下列諸函數 (*a*) TC ，(*b*) AC ，與 (*c*) VC 。

圖 (*a*) $$\mathrm{TC} = \int \mathrm{MC}\,dQ = \int (32 + 18Q - 12Q^2)\,dQ = 32Q + 9Q^2 - 4Q^3 + c$$

在 $Q = 0$ 時，$\mathrm{TC} = \mathrm{FC} = 43$ ，$\mathrm{TC} = 32Q + 9Q^2 - 4Q^3 + 43$ 。

(*b*) $$\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{TC}}{Q} = 32 + 9Q - 4Q^2 + \frac{43}{Q}$$

(*c*) $$\mathrm{VC} = \mathrm{TC} - \mathrm{FC} = 32Q + 9Q^2 - 4Q^3$$

16.29 已知邊際收益爲 $\mathrm{MR} = d\,\mathrm{TR}/dQ = 60 - 2Q - 2Q^2$ ，試求 (*a*) TR 函數，(*b*) 需求函數 $P = f(Q)$ 。

圖 (*a*) $$\mathrm{TR} = \int \mathrm{MR}\,dQ = \int (60 - 2Q - 2Q^2)\,dQ = 60Q - Q^2 - \tfrac{2}{3}Q^3 + c$$

在 $Q = 0$ 時 $\mathrm{TR} = 0$ 。因此 $c = 0$ ，故，$\mathrm{TR} = 60Q - Q^2 - \frac{2}{3}Q^3$ 。

(*b*) 因爲 $\mathrm{TR} = PQ$ ，因此，$P = \mathrm{TR}/Q$ ，此乃表示事實上需求函數與平均收益函數相同。因此，$P = \mathrm{AR} = \mathrm{TR}/Q = 60 - Q - \frac{2}{3}Q^2$ 。

16.30 已知 $\mathrm{MR} = 84 - 4Q - Q^2$ ，試求 (*a*) 總收益函數與 (*b*) 需求函數。

圖 (*a*) $$\mathrm{TR} = \int \mathrm{MR}\,dQ = \int (84 - 4Q - Q^2)\,dQ = 84Q - 2Q^2 - \tfrac{1}{3}Q^3 + c$$

在 $Q = 0$ 時，$\mathrm{TR} = 0$ 。因此，$c = 0$ ，故 $\mathrm{TR} = 84Q - 2Q^2 - \frac{1}{3}Q^3$ 。

(*b*) $$P = \mathrm{AR} = \frac{\mathrm{TR}}{Q} = 84 - 2Q - \tfrac{1}{3}Q^2$$

16.31 由於$C = f(Y)$，故邊際消費傾向爲 MPC $= dC/dY = f'(Y)$，如果MPC $= 0.8$，而當所得爲 0 時，消費爲 40，試求消費函數？

圖
$$C = \int f'(Y)\,dY = \int 0.8\,dY = 0.8Y + c$$

當$Y = 0$時，$C = 40$。故，$c = 40$且$C = 0.8Y + 40$。

16.32 已知$dC/dY = 0.6 + 0.1/\sqrt[3]{Y}$ = MPC且當$Y = 0$時，$C = 45$，試求消費函數？

圖
$$C = \int \left(0.6 + \frac{0.1}{\sqrt[3]{Y}}\right) dY = \int (0.6 + 0.1Y^{-1/3})\,dY = 0.6Y + 0.15Y^{2/3} + c$$

當$Y = 0$時，$C = 45$。故，$C = 0.6Y + 0.15Y^{2/3} + 45$。

16.33 已知邊際儲蓄傾向爲$dS/dY = 0.5 - 0.2Y^{-1/2}$，且當所得爲 25 時有負的儲蓄 3.5，亦即，$S = -3.5$當$Y = 25$，求儲蓄函數爲何？

圖
$$S = \int (0.5 - 0.2Y^{-1/2})\,dY = 0.5Y - 0.4Y^{1/2} + c$$

當$Y = 25$時，$S = -3.5$。

$$-3.5 = 0.5(25) - 0.4(\sqrt{25}) + c \qquad c = -14$$

因此，$S = 0.5Y - 0.4Y^{1/2} - 14$。

16.34 已知MC $= d$ TC$/dQ = 12e^{0.5Q}$且FC $= 36$。試求總成本。

圖
$$\text{TC} = \int 12e^{0.5Q}\,dQ = 12\frac{1}{0.5}e^{0.5Q} + c = 24e^{0.5Q} + c$$

由於FC $= 36$，TC $= 36$當$Q = 0$。代入上式，可知$36 = 24e^{0.5(0)} + c$。因爲$e^0 = 1$，故$36 = 24 + c$，則$c = 12$。因此，$\text{TC} = 24e^{0.5Q} + 12$。注意，$c$絕不會等於FC。

16.35 已知MC $= 16e^{0.4Q}$且FC $= 100$。試求 TC。

圖
$$\text{TC} = \int 16e^{0.4Q}\,dQ = 16\left(\frac{1}{0.4}\right)e^{0.4Q} + c = 40e^{0.4Q} + c$$

當$Q = 0$時，TC $= 100$。

$$100 = 40e^0 + c \qquad c = 60$$

故，$\text{TC} = 40e^{0.4Q} + 60$。

第十七章

積分：定積分

17-1 曲線下之面積

在一不規則曲線下之面積求法，並沒有適當之公式可應用，如圖 17-1 (*a*)所示 $y = f(x)$，當 $x = a$ 與 $x = b$ 間之面積之求法爲，如果區間 $[a, b]$ 可被劃分成 n 個子區間 $[x_1, x_2]$，$[x_2, x_3]$ 等等，並且每一個子區間可以其最小函數值爲高建立一矩形，如圖 17-1 (*b*)所示者，則這些子區域所構成諸矩形的面積總和爲 $\Sigma_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ 其將趨近於此曲線下 $[a, b]$ 區間內之面積（但偏低）。各子區間之距離愈小，（即 Δx_i 愈小）則所建立之矩形愈多，並且這些矩形面積之總和 $\Sigma_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ 也愈趨近此曲線下眞正面積之值。如果，子區間之個數增加至 $n \to \infty$，則每一個子區間將變得非常小（$\Delta x_i = dx_i = dx$），則此曲線在該區間下之面積可以數學式表示如下：

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

式中積分符號 $\int$ 可以取代 Σ，因爲 Σ 可眞正的代表有限項次之總和。

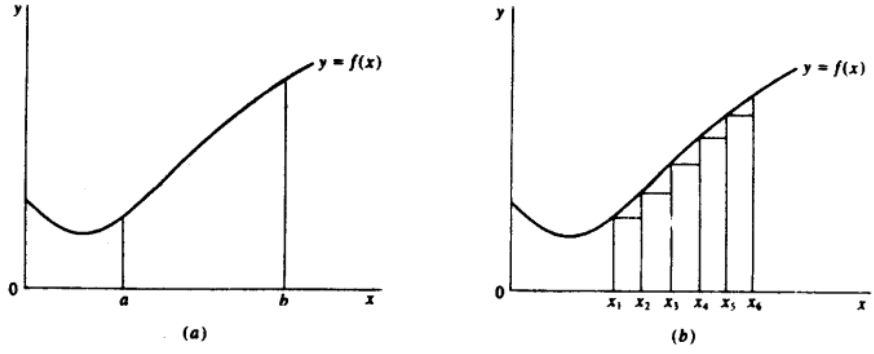


圖 17-1

17-2 定積分

一連續函數 $f(x)$ 在 a 至 b（$a < b$）區間之**定積分**（definite integral）之數學式爲 $\int_a^b f(x)dx$，讀作“f of $x\,dx$ 由 a 至 b 之積分”，其中 a 爲積分下限，b 爲

積分上限，極限（limit）在本書之意義指變數在已知範圍之末端邊緣，本節所述定積分不同於前一章之不定積分者（函數中變數無特定值，故其積分式亦無特定之數值），$f(x)$ 中，x 由 a 至 b 之定積分式有一數值，此值可由基本微積分中之不定積分定理計算而得（參見 17.3 節）。

17.3 微積分學之基本定理

微積分學之基本定理指：一連續函數在 a 至 b 之區間內的定積分值爲計算不定積分 $F(x)+c$ 之積分上限 b 之值減去不定積分 $F(x)+c$ 之下限 a 之值，因爲加項與減項之 c 可以相消，故積分常數 c 將不存在，以數學式表示如下：

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

其中符號 $]_a^b$，$]_a^b$ 或 $[\cdots]_a^b$ 表示 b 與 a 被分別代入 $F(x)$。

例題 17.1

已知

$$(1)\quad \int_1^4 10x\,dx \qquad (2)\quad \int_1^3 (4x^3+6x)\,dx$$

其定積分之計算如下所示：

(1)
$$\int_1^4 10x\,dx = 5x^2\Big|_1^4 = 5(4)^2 - 5(1) = 75$$

(2)
$$\int_1^3 (4x^3+6x)\,dx = [x^4+3x^2]_1^3 = [(3)^4+3(3)^2]-[(1)^4+3(1)^2] = 108-4 = 104$$

例題 17.2

使用定積分求圖 17-2 之曲線在 0 至 20 區間內之面積，例示如下：

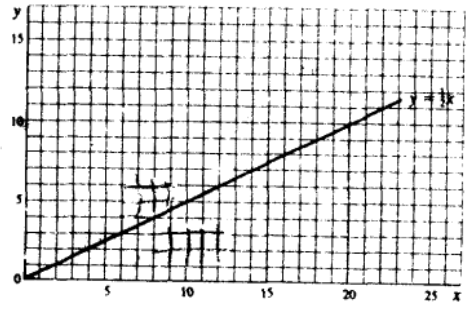


圖 17-2

$$A = \int_0^{20} \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{4}x^2\Big|_0^{20}$$

$$= \frac{1}{4}(20)^2 - \frac{1}{4}(0)^2 = 100$$

我們可使用幾何公式 $A = \frac{1}{2}xy$，檢查此答案。

$$A = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}(20)(10) = 100$$

17.4 定積分之性質

1. 將上、下限顛倒之，其定積分之符號將改變。

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{17.1}$$

2. 如果積分上限等於積分之下限，則此定積分值爲 0。

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0 \tag{17.2}$$

3. 定積分可以被分爲兩個以上子積分之總和。

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \qquad a \le b \le c \tag{17.3}$$

例題 17.3

計算下列諸式，並說明上述之定積分性質。

1. $\int_1^3 2x^3\,dx = -\int_3^1 2x^3\,dx$

$$\int_1^3 2x^3\,dx = \frac{1}{2}x^4\Big|_1^3 = \frac{1}{2}(3)^4 - \frac{1}{2}(1)^4 = 40$$

以上述性質 1 檢查此答案，

$$\int_3^1 2x^3\,dx = \frac{1}{2}x^4\Big|_3^1 = \frac{1}{2}(1)^4 - \frac{1}{2}(3)^4 = -40$$

2. $\int_5^5 (2x+3)\,dx = 0$

以上述性質 2 檢查此答案，

$$\int_5^5 (2x+3)\,dx = [x^2 + 3x]_5^5 = [(5)^2 + 3(5)] - [(5)^2 + 3(5)] = 0$$

3. $\int_0^4 6x\,dx = \int_0^3 6x\,dx + \int_3^4 6x\,dx$

$$\int_0^4 6x\,dx = 3x^2\Big|_0^4 = 3(4)^2 - 3(0)^2 = 48$$

$$\int_0^3 6x\,dx = 3x^2\Big|_0^3 = 3(3)^2 - 3(0)^2 = 27$$

$$\int_3^4 6x\,dx = 3x^2\Big|_3^4 = 3(4)^2 - 3(3)^2 = 21$$

以上述性質 3 檢查此答案，$48 = 27 + 21$

17.5 瑕積分

某定積分中若上限或下限有一爲無限值，則稱此定積分爲**瑕積分**（improper intergral），如

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \qquad 與 \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

爲瑕積分，因爲 ∞ 並不是一個數值，故無法將之代入 $F(x)$ 中之 x，然而，它們可以用其它形式之積分來定義之，如

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx \qquad 與 \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

如果上式中，極限存在的話，此瑕積分爲**收斂**（converge），它有一確定之值。反之，如果其極限不存在的話，則稱此瑕積分爲**發散**（diverge），其積分值爲無意義。

例題 17.4

下列瑕積分

$$(1)\ \int_1^{\infty} 3x^{-2}\,dx \qquad (2)\ \int_1^{\infty} \frac{5}{x}\,dx$$

之計算，例示如下：

(1) $$\int_1^{\infty} 3x^{-2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} 3x^{-2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-3}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-3}{b} - \frac{(-3)}{1}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-3}{b} + 3\right] = 3$$

因爲 $b \to \infty$ 時 $-3/b \to 0$。因此瑕積分爲收斂，其值爲 3，有時爲了簡便，極限之符號可予省略。

(2) $$\int_1^{\infty} \frac{5}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{5}{x}\,dx = [5\ln|x|]_1^b = 5\ln|b| - 5\ln|1| = 5\ln|b|$$

因爲 $\ln|1| = 0$。故當 $b \to \infty$ 時，$5\ln|b| \to \infty$。故此瑕積分爲發散而無確定之值。

例題 17.5

對於有限之積分上、下限，如果在積分區間中，積分因子變得無窮大，則此積分式亦可能爲瑕積分。此種積分之求法亦須使用本節所述之極限方法，例如積分式

$\int_0^{27} x^{-2/3}\,dx$ 爲瑕積分，因爲當 x 由右邊趨近於 0（即 $x \to 0^+$）時，$x^{-2/3} \to \infty$，計算如下：

$$\int_0^{27} x^{-2/3}\,dx = \lim_{a \to 0} \int_a^{27} x^{-2/3}\,dx = 3x^{1/3}\Big]_a^{27} = 3\sqrt[3]{27} - 3\sqrt[3]{a} = 9 - 3\sqrt[3]{a}$$

當 $a \to 0^+$，在此區間內積分式收斂於 9，參見問題 17.20-17.21。

17.6 現金流量之現值

於 8.3 節中，我們曾論及於未來將收到一筆金額其總和之現值，當利息是以複利方式計算時，其現值爲 $P = Se^{-rt}$，因此，未來所得川流（於 n 年內，每年所獲得之所得）爲下所示之積分

$$\begin{aligned} P_n &= \int_0^n Se^{-rt}\,dt = S\int_0^n e^{-rt}\,dt = S\left[-\frac{1}{r}e^{-rt}\right]_0^n = -\frac{S}{r}\left[e^{-rt}\right]_0^n \\ &= -\frac{S}{r}(e^{-rn} - e^{-r(0)}) = -\frac{S}{r}(e^{-rn} - 1) \\ &= \frac{S}{r}(1 - e^{-rn}) \end{aligned} \tag{17.4}$$

注意，上式與 8.4 節中有關將來所得川流以每年複利爲計息方式之現值求法的公式相似。

例題 17.6

當利率爲 5 %，利息是以連續複利方式計算，期間爲 3 年，則每年支付 \$1000，其現值利用（17.4）式之計算例示如下。

$$P_n = \frac{1000}{0.05}[1 - e^{-(0.05\times 3)}] = 20{,}000(1 - e^{-0.15}) = 20{,}000(1 - 0.8607) = \$2786$$

17.7 消費者與生產者剩餘

一需求函數 $P_1 = f_1(Q)$，如圖 17-3 (*a*)所示，表示消費對不同商品數量下所願意支付之價格，如果市場之均衡點爲（Q_0，P_0），則消費者將願意支付多於 P_0 之代價，而其所獲得之總利益以斜線區域所示，稱爲消費者剩餘（consumers' surplus），以數學式表示則爲，

$$\text{消費者剩餘} = \int_0^{Q_0} f_1(Q)\,dQ - Q_0P_0 \tag{17.5}$$

一供給函數 $P_1 = f_1(Q)$，如圖 17-3 (*b*)所示，表示在各種不同財貨價格下，生

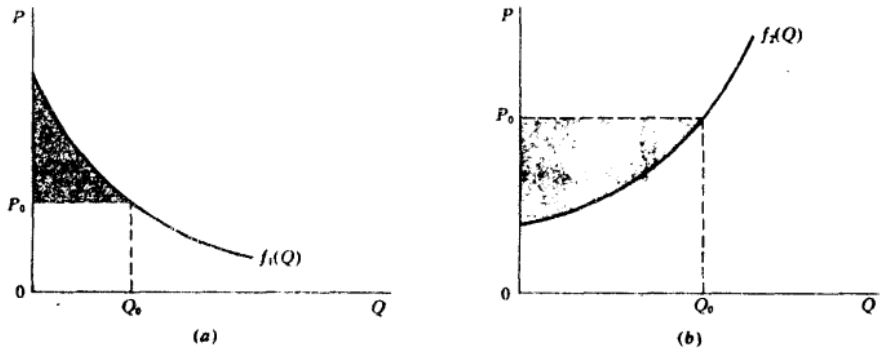


圖 17-3

產者願意提供之數量，如果市場之均衡點爲（Q_0，P_0），則此生產者爲提供 Q_0 之財貨，它所希望索取每單位價格低於 P_0，此時，生產者所獲得之總利得即爲斜率部分所示者，此稱爲生產者剩餘（producers' surplus），以數學式表示如下，

$$\text{生產者剩餘} = Q_0P_0 - \int_0^{Q_0} f_2(Q)\,dQ \tag{17.6}$$

例題 17.7

已知所予之需求函數爲 $P = 42 - 5Q - Q^2$，假設均衡價格爲 \$6，則消費者剩餘之計算如下所示：

當 $P_0 = 6$，

$$\begin{aligned} 42 - 5Q - Q^2 &= 6 \\ 36 - 5Q - Q^2 &= 0 \\ (Q+9)(-Q+4) &= 0 \end{aligned}$$

$Q_0 = 4$，因爲 $Q = -9$ 爲不可能者，代入（17.5）式

$$\begin{aligned} \text{消費者剩餘} &= \int_0^4 (42 - 5Q - Q^2)\,dQ - (4)(6) \\ &= \left[42Q - 2.5Q^2 - \tfrac{1}{3}Q^3\right]_0^4 - 24 \\ &= (168 - 40 - 21\tfrac{1}{3}) - (0) - 24 = 82\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

17.8 定積分與機率

某一事件將發生之機率 P 可以由一機率密度函數下對應之區域計算而得，一機率密度（probability density）或次數函數（frequency function）爲一連續函數 $f(x)$，而滿足下列條件者：

1. $f(x) \geq 0$，或謂，機率不可能爲負數。
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$，或謂，事件發生在整個 x 之範圍內其機率爲 1。
3. $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$，或謂，$x$ 值落在區間 $[a, b]$ 內之機率爲此值由 a 至 b 之定積分。

例題 17.8

已知每秒鐘汽車通過高速公路之次數函數爲 $f(t) = 2e^{-2t}$，$t \geq 0$，則在 0.25 秒內有一輛汽車通過之機率計算如下：

$$P = \int_0^{0.25} 2e^{-2t}\,dt = -e^{-2t}\Big|_0^{0.25} = (-e^{-0.5}) - (-e^{0}) = -0.606531 + 1 = 0.393469$$

習題與解答

定積分

17.1 計算下列諸定積分：

圖 (a) $\int_0^6 5x\,dx$

$$\int_0^6 5x\,dx = 2.5x^2\Big|_0^6 = 2.5(6)^2 - 2.5(0)^2 = 90$$

(b) $\int_1^{10} 3x^2\,dx$

$$\int_1^{10} 3x^2\,dx = x^3\Big|_1^{10} = (10)^3 - (1)^3 = 999$$

(c) $\int_1^{64} x^{-2/3}\,dx$

$$\int_1^{64} x^{-2/3}\,dx = 3x^{1/3}\Big|_1^{64} = 3\sqrt[3]{64} - 3\sqrt[3]{1} = 9$$

(d) $\int_1^3 (x^3 + x + 6)\,dx$

$$\int_1^3 (x^3 + x + 6)\,dx = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2 + 6x\Big|_1^3 = [\tfrac{1}{4}(3)^4 + \tfrac{1}{2}(3)^2 + 6(3)] - [\tfrac{1}{4}(1)^4 + \tfrac{1}{2}(1)^2 + 6(1)] = 36$$

(e) $\int_1^4 (x^{-1/2} + 3x^{1/2})\,dx$

$$\int_1^4 (x^{-1/2} + 3x^{1/2})\,dx = 2x^{1/2} + 2x^{3/2}\Big|_1^4 = (2\sqrt{4} + 2\sqrt{4^3}) - (2\sqrt{1} + 2\sqrt{1^3}) = 16$$

(f) $\int_0^3 4e^{2x}\,dx$

$$\int_0^3 4e^{2x}\,dx = 2e^{2x}\Big|_0^3 = 2[e^{2(3)} - e^{2(0)}]$$
$$= 2(403.4 - 1) = 804.8 \qquad \text{由附錄 III 查表而得}$$

(g) $\int_0^{10} 2e^{-2x}\,dx$

$$\int_0^{10} 2e^{-2x}\,dx = -e^{-2x}\Big|_0^{10} = -e^{-2(10)} - (-e^{-2(0)}) = -e^{-20} + e^0 = 1$$

代入法

17.2 使用代入法求下式之定積分：

$$\int_0^3 8x(2x^2 + 3)\,dx$$

圖 令 $u = 2x^2 + 3$，則 $du/dx = 4x$ 且 $dx = du/4x$。暫時忽略其積分極限，並視此積分爲不定積分，而將此代入原先之積分因子

$$\int 8x(2x^2 + 3)\,dx = \int 8xu\,\frac{du}{4x} = 2\int u\,du$$

對於 u 求積分，

$$2\int u\,du = 2\left(\frac{u^2}{2}\right) + c = u^2 + c \qquad (17.7)$$

最後，將 $u = 2x^2 + 3$ 代入（17.7）式，並注意 c 將被消去，則上式可被改寫爲以 x 項表示之定積分，再引進原先之上、下限。

$$\int_0^3 8x(2x^2 + 3)\,dx = (2x^2 + 3)^2\Big|_0^3 = [2(3)^2 + 3]^2 - [2(0)^2 + 3]^2 = 441 - 9 = 432$$

因爲在開始時之代入中，$u \neq x$，而等於 $2x^2 + 3$，故以 x 爲項之積分上、下限將異於以 u 爲項之積分上、下限，如果，我們需要的話可以將積分之上、下限改爲 x 之積分上、下限，同時，因爲我們令 $u = 2x^2 + 3$ 而 x 範圍由 0 至 3，故 u 之範圍乃由 u：$2(3)^2 + 3 = 21$ 與 u：$2(0)^2 + 3 = 3$，使用以此爲範圍之積分，如（17.7）式，u 的上、下限，則定積分值爲，

$$2\int_3^{21} u\,du = u^2\Big|_3^{21} = 441 - 9 = 432$$

17.3 已知 $\int_1^3 x^2(x^3 - 5)^2\,dx$，試重新作問題 17.2。

圖 令 $u = x^3 - 5$，則 $du/dx = 3x^2$，且 $dx = du/3x^2$，暫時忽略其上、下限而代入原先之積分因子，

$$\int x^2(x^3-5)^2\,dx = \int x^2u^2\frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3}\int u^2\,du$$

對於 u 求積分並將常數略而不計，

$$\frac{1}{3}\int u^2\,du = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}u^3\right] = \frac{1}{9}u^3$$

代入 $u = x^3 - 5$ 並引進 x 之上、下限，

$$\int_1^2 x^2(x^3-5)^2\,dx = \left[\frac{1}{9}(x^3-5)^3\right]_1^2$$
$$= \frac{1}{9}[(2)^3-5]^3 - \frac{1}{9}[(1)^3-5]^3 = \frac{1}{9}(27) - \frac{1}{9}(-64) = 10.11$$

因爲 $u = x^3 - 5$ 且 x 之上、下限爲 $x = 1$ 與 $x = 2$，代入 u 則可求得以 u 爲範圍之上、下限爲 $u = (1)^3 - 5 = -4$ 與 $u = (2)^3 - 5 = 3$。以此代入以 u 爲項次之積分式，則

$$\frac{1}{3}\int_{-4}^{3} u^2\,du = \left[\frac{1}{9}u^3\right]_{-4}^{3} = \frac{1}{9}(3)^3 - \frac{1}{9}(-4)^3 = 10.11$$

17.4 已知 $\int_0^2 \frac{3\lambda}{(x^3+1)^2}\,dx$，試重新作問題 17.2。

解 令 $u = x^3 + 1$。則 $du/dx = 3x^2$ 且 $dx = du/3x^2$。代入原先之積分因子，

$$\int \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}\,dx = \int 3x^2u^{-2}\frac{du}{3x^2} = \int u^{-2}\,du$$

對 u 求取積分式，並忽略其常數 c，

$$\int u^{-2}\,du = -u^{-1}$$

代入 $u = x^3 + 1$ 並引進原先之上、下限，則

$$\int_0^2 \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}\,dx = -(x^3+1)^{-1}\Big|_0^2 = \left(\frac{-1}{2^3+1}\right) - \left(\frac{-1}{0^3+1}\right) = -\frac{1}{9} + 1 = \frac{8}{9}$$

由於 $u = x^3 + 1$，且 x 之上、下限爲由 0 至 2，故 u 之上、下限爲 $u = (0)^3 + 1 = 1$ 與 $u = (2)^3 + 1 = 9$。因此，

$$\int_1^9 u^{-2}\,du = -u^{-1}\Big|_1^9 = \left(-\frac{1}{9}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{8}{9}$$

17.5 以代入法求下列定積分式：

$$\int_0^3 \frac{6x}{x^2+1}\,dx$$

圖 令 $u = x^2 + 1$ ，則 $du/dx = 2x$ ，且 $dx = du/2x$ 。代入原先之積分因子，則

$$\int \frac{6x}{x^2+1}\,dx = \int 6xu^{-1}\frac{du}{2x} = 3\int u^{-1}\,du$$

以 u 爲變數，求其積分式，

$$3\int u^{-1}\,du = 3\ln u$$

代入 $u = x^2 + 1$ ，

$$\int_0^3 \frac{6x}{x^2+1}\,dx = 3\ln|x^2+1|\Big|_0^3$$
$$= 3\ln|3^2+1| - 3\ln|0^2+1| = 3\ln 10 - 3\ln 1$$
$$= 3\ln 10 = 6.9078$$

因爲 $\ln 1 = 0$ 。

故 u 之上、下限爲 $u = (0)^2 + 1 = 1$ 與 $u = (3)^2 + 1 = 10$ ，以 u 爲變數求其積分，

$$3\int_1^{10} u^{-1}\,du = 3\ln u\Big|_1^{10} = 3\ln 10 - 3\ln 1 = 3\ln 10 = 6.9079$$

17.6 已知 $\int_1^2 4xe^{x^2+2}\,dx$ ，重新作問題 17.5 。

圖 令 $u = x^2 + 2$ 。則 $du/dx = 2x$ 且 $dx = du/2x$ 。代入原先之積分因子

$$\int 4xe^{x^2+2}\,dx = \int 4xe^u\frac{du}{2x} = 2\int e^u\,du$$

以 u 爲變數求其積分並忽略常數 c ，

$$2\int e^u\,du = 2e^u$$

代入 $u = x^2 + 2$ ，

$$\int_1^2 4xe^{x^2+2}\,dx = 2e^{x^2+2}\Big|_1^2 = 2(e^{(2)^2+2} - e^{(1)^2+2}) = 2(e^6 - e^3)$$
$$= 2(403.4 - 20.09) = 766.62 \qquad \text{參照附錄 III}$$

由於 $u = x^2 + 2$ ，故 u 之上、下限爲 $u = (1)^2 + 2 = 3$ 與 $u = (2)^2 + 2 = 6$ 。

$$2\int_3^6 e^u\,du = 2e^u\Big|_3^6 = 2(e^6 - e^3) = 766.62$$

17.7 已知 $\int_0^1 3x^2 e^{2x^3+1}\,dx$，試重新作問題 17.5。

解 令 $u = 2x^3 + 1$，則 $du/dx = 6x^2$，且 $dx = du/6x^2$。代入原先之積分因子

$$\int 3x^2 e^{2x^3+1}\,dx = \int 3x^2 e^u \frac{du}{6x^2} = \frac{1}{2}\int e^u\,du$$

對 u 求取積分式，則

$$\frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u$$

代入 $u = 2x^3 + 1$，

$$\int_0^1 3x^2 e^{2x^3+1}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x^3+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^3 - e^1) = \frac{1}{2}(20.09 - 2.718) = 8.68$$

由於 $u = 2x^3 + 1$，故 u 之上、下限爲 $u = 2(0)^3 + 1 = 1$ 與 $u = 2(1)^3 + 1 = 3$。因此，

$$\frac{1}{2}\int_1^3 e^u\,du = \frac{1}{2}e^u\Big|_1^3 = \frac{1}{2}(e^3 - e^1) = 8.68$$

部分積分法

17.8 使用部分積分法求下式之定積分：

$$\int_2^5 \frac{3x}{(x+1)^2}\,dx$$

解 令 $f(x) = 3x$；則 $f'(x) = 3$。令 $g'(x) = (x+1)^{-2}$；則 $g(x) = \int (x+1)^{-2}dx = -(x+1)^{-1}$，代入 (16.1) 式，

$$\begin{aligned}\int \frac{3x}{(x+1)^2}\,dx &= 3x[-(x+1)^{-1}] - \int -(x+1)^{-1}3\,dx \\ &= -3x(x+1)^{-1} + 3\int (x+1)^{-1}\,dx\end{aligned}$$

再度求積分並忽略常數 c，

$$\int \frac{3x}{(x+1)^2}\,dx = -3x(x+1)^{-1} + 3\ln|x+1|$$

應用極限之觀念，則

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{3x}{(x+1)^2}\,dx &= [-3x(x+1)^{-1} + 3\ln|x+1|]_2^5 \\ &= \left[-\frac{3(5)}{5+1} + 3\ln|5+1|\right] - \left[-\frac{3(2)}{2+1} + 3\ln|2+1|\right] \\ &= -\frac{5}{2} + 3\ln 6 + 2 - 3\ln 3 \\ &= 3(\ln 6 - \ln 3) - \tfrac{1}{2} = 3(1.7918 - 1.0986) - 0.5 = 1.5796\end{aligned}$$

17.9 已知 $\int_1^3 \frac{4x}{(x+2)^3}\,dx$ ，試重新作問題 17.8 。

圖 令 $f(x)=4x$ ，$f'(x)=4$ ，$g'(x)=(x+2)^{-3}$，且 $g(x)=\int (x+2)^{-3}dx$ $=-\frac{1}{2}(x+2)^{-2}$ ，代入（16.1）式，則

$$\int \frac{4x}{(x+2)^3}\,dx = 4x\left[-\frac{1}{2}(x+2)^{-2}\right] - \int -\frac{1}{2}(x+2)^{-2}4\,dx$$
$$= -2x(x+2)^{-2} + 2\int (x+2)^{-2}\,dx$$

求其積分，

$$\int \frac{4x}{(x+2)^3}\,dx = -2x(x+2)^{-2} - 2(x+2)^{-1}$$

應用極限之觀念，則

$$\int_1^3 \frac{4x}{(x+2)^3}\,dx = [-2x(x+2)^{-2} - 2(x+2)^{-1}]_1^3$$
$$= [-2(3)(3+2)^{-2} - 2(3+2)^{-1}] - [-2(1)(1+2)^{-2} - 2(1+2)^{-1}]$$
$$= -\tfrac{6}{25} - \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{9} + \tfrac{2}{3} = \tfrac{56}{225}$$

17.10 已知 $\int_1^3 5xe^{x+2}\,dx$ ，試重新作問題 17.8 。

圖 令 $f(x)=5x$ ，$f'(x)=5$ ，$g'(x)=e^{x+2}$ ，與 $g(x)=\int e^{x+2}dx=e^{x+2}$ ，應用（16.1）式，

$$\int 5xe^{x+2}\,dx = 5xe^{x+2} - \int e^{x+2}5\,dx = 5xe^{x+2} - 5\int e^{x+2}\,dx$$

求其積分，

$$\int 5xe^{x+2}\,dx = 5xe^{x+2} - 5e^{x+2}$$

應用極限之觀念，則

$$\int_1^3 5xe^{x+2}\,dx = [5xe^{x+2} - 5e^{x+2}]_1^3 = (15e^5 - 5e^5) - (5e^3 - 5e^3) = 10e^5 = 10(148.4) = 1484$$

定積分之性質

17.11 試證 $\int_{-4}^{4}(8x^3+9x^2)\,dx = \int_{-4}^{0}(8x^3+9x^2)\,dx + \int_{0}^{4}(8x^3+9x^2)\,dx.$

圖

$$\int_{-4}^{4}(8x^3+9x^2)\,dx = 2x^4+3x^3\Big|_{-4}^{4} = 704-320 = 384$$
$$\int_{-4}^{0}(8x^3+9x^2)\,dx = 2x^4+3x^3\Big|_{-4}^{0} = 0-320 = -320$$
$$\int_{0}^{4}(8x^3+9x^2)\,dx = 2x^4+3x^3\Big|_{0}^{4} = 704-0 = 704$$

檢查此答案，$-320+704=384$

17.12 試證 $\int_0^{16}(x^{-1/2}+3x)\,dx=\int_0^4(x^{-1/2}+3x)\,dx+\int_4^9(x^{-1/2}+3x)\,dx+\int_9^{16}(x^{-1/2}+3x)\,dx.$

圖

$$\int_0^{16}(x^{-1/2}+3x)\,dx=2x^{1/2}+1.5x^2\Big|_0^{16}=392-0=392$$

$$\int_0^4(x^{-1/2}+3x)\,dx=2x^{1/2}+1.5x^2\Big|_0^4=28-0=28$$

$$\int_4^9(x^{-1/2}+3x)\,dx=2x^{1/2}+1.5x^2\Big|_4^9=127.5-28=99.5$$

$$\int_9^{16}(x^{-1/2}+3x)\,dx=2x^{1/2}+1.5x^2\Big|_9^{16}=392-127.5=264.5$$

檢查此答案，$28+99.5+264.5=392$

17.13 試證 $$\int_0^3\frac{6x}{x^2+1}\,dx=\int_0^1\frac{6x}{x^2+1}\,dx+\int_1^2\frac{6x}{x^2+1}\,dx+\int_2^3\frac{6x}{x^2+1}\,dx$$

圖 由問題 17.5 知，

$$\int_0^3\frac{6x}{x^2+1}\,dx=3\ln|x^2+1|\Big|_0^3=3\ln 10$$

$$\int_0^1\frac{6x}{x^2+1}\,dx=3\ln|x^2+1|\Big|_0^1=3\ln 2-0=3\ln 2$$

$$\int_1^2\frac{6x}{x^2+1}\,dx=3\ln|x^2+1|\Big|_1^2=3\ln 5-3\ln 2$$

$$\int_2^3\frac{6x}{x^2+1}\,dx=3\ln|x^2+1|\Big|_2^3=3\ln 10-3\ln 5$$

檢查此答案，$3\ln 2+3\ln 5-3\ln 2+3\ln 10-3\ln 5=3\ln 10$

17.14 試證 $$\int_1^3 5xe^{x+2}\,dx=\int_1^2 5xe^{x+2}\,dx+\int_2^3 5xe^{x+2}\,dx.$$

圖 由問題 17.10 可知，

$$\int_1^3 5xe^{x+2}\,dx=[5xe^{x+2}-5e^{x+2}]_1^3=10e^5$$

$$\int_1^2 5xe^{x+2}\,dx=[5xe^{x+2}-5e^{x+2}]_1^2=(10e^4-5e^4)-(5e^3-5e^3)=5e^4$$

$$\int_2^3 5xe^{x+2}\,dx=[5xe^{x+2}-5e^{x+2}]_2^3=(15e^5-5e^5)-(10e^4-5e^4)=10e^5-5e^4$$

檢查此答案，$5e^4+10e^5-5e^4=10e^5$

瑕積分與收斂

17.15 (*a*) 試說明何以下式之積分式爲瑕積分，(*b*) 檢驗其是否爲收斂，收斂值爲何？

$$\int_1^\infty\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

圖 (*a*) 此爲一瑕積分之範例，因爲其上限爲一無限值。

(*b*) $$\int_1^\infty \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

令 $u = x^2 + 1$，$du/dx = 2x$，與 $dx = du/2x$，代入原先之積分因子

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int 2xu^{-2}\frac{du}{2x} = \int u^{-2}\,du$$

對 u 求取積分，並忽略常數 c，則

$$\int u^{-2}\,du = -u^{-1}$$

代入 $u = x^2 + 1$ 並納入 x 之上、下限，則

$$\int_1^\infty \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx = -(x^2+1)^{-1}\Big|_1^b$$
$$= \frac{-1}{b^2+1} + \frac{1}{(1)^2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{b^2+1}$$

當 $b\to\infty$，$1/(b^2+1)\to 0$。此積分式爲收斂，其值爲 $\frac{1}{2}$。

17.16 已知 $\int_1^\infty \frac{dx}{x+7}$，試重新作問題 17.5。

圖 (*a*) 此式爲一瑕積分，因爲其中一積分極限爲無限值。

(*b*) $$\int_1^\infty \frac{dx}{x+7} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x+7} = \ln|x+7|\Big|_1^b = \ln|b+7| - \ln|1+7|$$

當 $b\to\infty$，$\ln|b+7|\to\infty$。此積分式爲發散，故其值爲無意義。

17.17 已知 $\int_{-\infty}^0 e^{3x}\,dx$，試重新作問題 17.15。

圖 (*a*) 其下限爲無限值。

(*b*) $$\int_{-\infty}^0 e^{3x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\Big|_a^0$$
$$= \frac{1}{3}e^{3(0)} - \frac{1}{3}e^{3a} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{3a}$$

當 $a\to-\infty$，$\frac{1}{3}e^{3a}\to 0$。此積分式爲收斂，其值爲 $\frac{1}{3}$

17.18 (*a*) 試說明下式積分式爲瑕積分，(*b*) 檢驗是否爲收斂，若是的話，其值爲何？

$$\int_{-\infty}^0 (5-x)^{-2}\,dx$$

圖 (*a*) 其下限爲無限值，

(*b*) $$\int_{-\infty}^0 (5-x)^{-2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 (5-x)^{-2}\,dx$$

令 $u = 5 - x$，$du/dx = -1$，與 $dx = -du$，代入原先之積分因子

$$\int (5-x)^{-2}\,dx = \int u^{-2}(-du) = -\int u^{-2}\,du$$

對 u 求取積分式，則

$$-\int u^{-2}\,du = u^{-1}$$

代入 $u = 5-x$，並納入 x 之上、下限，則

$$\int_{-\infty}^{0}(5-x)^{-2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}(5-x)^{-2}\,dx = (5-x)^{-1}\Big|_{a}^{0}$$
$$= \frac{1}{5-0} - \frac{1}{5-a} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5-a}$$

當 $a \to -\infty$，$1/(5-a) \to 0$。此積分式爲收斂，其值爲 $\frac{1}{5}$。

17.19 已知 $\int_{-\infty}^{0} 2xe^{x}\,dx$，試重新作問題 17.18。

圖 (*a*) 其下限爲無限值。

(*b*)
$$\int_{-\infty}^{0} 2xe^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} 2xe^{x}\,dx$$

使用部分積分法，令 $f(x) = 2x$，$f'(x) = 2$，$g'(x) = e^{x}$，與 $g(x) = \int e^{x}\,dx = e^{x}$，代入（16.1）式，則

$$\int 2xe^{x}\,dx = 2xe^{x} - \int e^{x}2\,dx$$

再度求其積分，

$$\int 2xe^{x}\,dx = 2xe^{x} - 2e^{x}$$

納入其上、下限，則

$$\int_{-\infty}^{0} 2xe^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} 2xe^{x}\,dx = 2xe^{x} - 2e^{x}\Big|_{a}^{0}$$
$$= [2(0)e^{0} - 2e^{0}] - [2ae^{a} - 2e^{a}]$$
$$= -2 - 2ae^{a} + 2e^{a} \qquad \text{因爲 } e^{0} = 1$$

當 $a \to -\infty$，$e^{a} \to 0$。因此，此積分式爲收斂，其值爲 -2。

17.20 已知 $\int_{0}^{6}\frac{dx}{x-6}$，試重新作問題 17.18。

圖 (*a*) 此亦爲一瑕積分，因爲當 x 由左趨近於 6（$x \to 6^{-}$），其積分因子 $\to -\infty$

(*b*)
$$\int_{0}^{6}\frac{dx}{x-6} = \lim_{b\to 6}\int_{0}^{b}\frac{dx}{x-6} = \ln|x-6|\Big|_{0}^{b}$$
$$= \ln|b-6| - \ln|0-6|$$

當 $b \to 6^-$，$|b-6| \to 0$ 且 $\ln 0$ 不存在，因此，此積分式爲發散，其值不存在。

17.21 已知 $\int_0^8 (8-x)^{-1/2}\,dx$，試重新作問題 17.18。

圖 (*a*) 當 $x \to 8^-$，積分因子趨近於無限值。

(*b*)
$$\int_0^8 (8-x)^{-1/2}\,dx = \lim_{b\to 8}\int_0^b (8-x)^{-1/2}\,dx = -2(8-x)^{1/2}\Big|_0^b \quad \text{（參見問題 17.18）}$$
$$= (-2\sqrt{8-b}) - (-2\sqrt{8-0}) = 2\sqrt{8} - 2\sqrt{8-b}$$

當 $b \to 8^-$，$-2\sqrt{8-b} \to 0$。此積分式爲收斂，其值爲 $2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$。

消費者與生產者剩餘

17.22 已知需求函數爲 $P = 45 - 0.5Q$，當 $P_0 = 32.5$ 與 $Q_0 = 25$，求消費者剩餘 CS？

圖 使用（17.5）式，

$$CS = \int_0^{25} (45 - 0.5Q)\,dQ - (32.5)(25) = [45Q - 0.25Q^2]_0^{25} - 812.5$$
$$= [45(25) - 0.25(25)^2] - [0] - 812.5 = 156.25$$

17.23 已知供給函數爲 $P = (Q+3)^2$，當 $P_0 = 81$ 與 $Q_0 = 6$ 求生產者剩餘 PS？

圖 由（17.6）式知，

$$PS = (81)(6) - \int_0^6 (Q+3)^2\,dQ = 486 - \left[\frac{1}{3}(Q+3)^3\right]_0^6$$
$$= 486 - \left[\frac{1}{3}(6+3)^3 - \frac{1}{3}(0+3)^3\right] = 252$$

17.24 已知需求函數爲 $P_d = 25 - Q^2$ 而供給函數爲 $P_s = 2Q + 1$。假設市場爲純粹競爭型態，試求 (*a*) 消費者剩餘與 (*b*) 生產者剩餘。

圖 當市場達到均衡時，$s = d$。因此，

$$2Q + 1 = 25 - Q^2 \qquad Q^2 + 2Q - 24 = 0$$
$$(Q+6)(Q-4) = 0 \qquad Q_0 = 4 \qquad P_0 = 9$$

因爲 Q_0 不可能等於 -6，故

(*a*)
$$CS = \int_0^4 (25 - Q^2)\,dQ - (9)(4) = \left[25Q - \frac{1}{3}Q^3\right]_0^4 - 36$$
$$= \left[25(4) - \frac{1}{3}(4)^3\right] - [0] - 36 = 42.67$$

(*b*)
$$PS = (9)(4) - \int_0^4 (2Q+1)\,dQ$$
$$= 36 - [Q^2 + Q]_0^4 = 16$$

17.25 已知需求函數爲 $P_d = 113 - Q^2$ 而供給函數爲 $P_s = (Q+1)^2$ 在純粹競爭下，試求 (*a*) CS 與 (*b*) PS。

圖 將供給函數展開，並令供給與需求相等，則

$$Q^2 + 2Q + 1 = 113 - Q^2 \qquad 2(Q^2 + Q - 56) = 0$$
$$(Q + 8)(Q - 7) = 0 \qquad Q_0 = 7 \qquad P_0 = 64$$

(a) $$\text{CS} = \int_0^7 (113 - Q^2)\,dQ - (64)(7) = \left[113Q - \frac{1}{3}Q^3\right]_0^7 - 448 = 228.67$$

(b) $$\text{PS} = (64)(7) - \int_0^7 (Q + 1)^2\,dQ = 448 - \left[\frac{1}{3}(Q + 1)^3\right]_0^7 = 448 - (170.67 - 0.33) = 277.67$$

17.26 在獨佔市場的情況下，商品銷售量與市場之商品價格決定於此商品之需求函數，如果某追求利潤極大之獨佔者面對之需求函數爲 $P = 274 - Q^2$ 而其 $\text{MC} = 4 + 3Q$，求消費者剩餘？

圖 已知 $P = 274 - Q^2$，

$$\text{TR} = PQ = (274 - Q^2)Q = 274Q - Q^3$$

故 $$\text{MR} = \frac{d\text{TR}}{dQ} = 274 - 3Q^2$$

此獨佔者將在MR＝MC時，獲得最大利潤。因此，

$$274 - 3Q^2 = 4 + 3Q \qquad 3(Q^2 + Q - 90) = 0$$
$$(Q + 10)(Q - 9) = 0 \qquad Q_0 = 9 \qquad P_0 = 193$$

故 $$\text{CS} = \int_0^9 (274 - Q^2)\,dQ - (193)(9) = \left[274Q - \frac{1}{3}Q^3\right]_0^9 - 1737 = 486$$

次數函數與機率

17.27 於一大型連鎖飯店中，每秒內旅客進出之次數函數已知爲 $f(t) = \frac{4}{81}t^3$，$0 \le t \le 3$，則在第 1 與 2 秒間有旅客進出之機率爲何？

$$P = \int_1^2 \frac{4}{81}t^3\,dt = \frac{1}{81}t^4\Big|_1^2 = \frac{1}{81}(16) - \frac{1}{81}(1) = 0.1852$$

17.28 於某一天中完成簽證手續之比例已知其機率密度函數爲 $f(x) = 12(x^2 - x^3)dx$，$0 \le x \le 1$，則下列之機率各爲何，(a) 在當天有 50 %或少於 50 % 完成簽證手續，(b) 50 %或多於 50 %完成簽證手續者。

圖 (a)

$$P = \int_0^{0.5} 12(x^2 - x^3)\,dx = 12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{0.5}$$
$$= 12\left[\left(\frac{0.125}{3} - \frac{0.0625}{4}\right) - 0\right] = 0.3125$$

(b)

$$P = \int_{0.5}^1 12(x^2 - x^3)\,dx = 12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{0.5}^1$$
$$= 12\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{0.125}{3} - \frac{0.0625}{4}\right)\right] = 0.6875$$

正如所預期者，$P_a + P_b = 0.3125 + 0.6875 = 1$。

其它經濟學上之運用

17.29 已知 $I(t) = 9t^{1/2}$，試求 (a) 8 年與 (b) 第 5 年至第 8 年，即（區間爲 [4, 8]），之資本形成爲何？

圖 (a)

$$K = \int_0^8 9t^{1/2}\,dt = 6t^{3/2}\Big|_0^8 = 6(8)^{3/2} - 0 = 96\sqrt{2} = 135.76$$

(b)

$$K = \int_4^8 9t^{1/2}\,dt = 6t^{3/2}\Big|_4^8 = 6(8)^{3/2} - 6(4)^{3/2} = 135.76 - 48 = 87.76$$

第十八章
微分方程式

18.1 定義與觀念

微分方程式（differential equations）爲包含導數（或微分式）之方程式，它們代表跨越時間之連續函數的變動率，我們研究微分方程式的目標是求得一函數（不含導數或微分式者），使它能滿足此微分方程式，此一函數稱爲此方程式之解或積分。

一微分方程式之階次（order）是指此方程式中，最高階導數之階次，而其次方（degree）則指此最高階導數之次方，參見例 1 。

例題18.1

試指出下列諸微分方程式之階次與次方：

1. $\frac{dy}{dx} = 2x + 6.$ 一階，一次。
2. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - 5x^5 = 0.$ 一階，四次。
3. $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + x^2 = 0.$ 二階，一次。
4. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^7 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^5 = 75y.$ 三階，五次。

例題18.2

已知所予微分方程式 $f''(y) = 7$ ，求其連續積分如下，

$$f'(y) = \int 7\,dx = 7x + c_1$$

及

$$f(y) = \int (7x + c_1)\,dx = 3.5x^2 + c_1x + c_2$$

此爲**一般解**（general solution），因爲 c_1 與 c_2 爲未特定值。

18.2 一階線性微分方程式之一般公式

一階線性微分方程式，dy/dt 其中 y 之次方必須不超過一次，且沒有乘積 $y(dy/dt)$ 項，此方程式如

$$\frac{dy}{dt} + vy = z$$

其中 v 與 z 可爲時間之函數或常數，則其一般解之公式爲，

$$y(t) = e^{-\int v\,dt}\left(A + \int ze^{\int v\,dt}\,dt\right) \tag{18.1}$$

其中 A 爲任意常數，如果初始條件爲已知，則 A 之值乃告確定，此時其解稱爲**定解**（definite solution），又上式之解被分爲兩部分，其中 $e^{-\int v\,dt}A$ 稱爲**補助函數**（complementary function）；而 $e^{-\int v\,dt}\int ze^{\int v\,dt}\,dt$ 則稱爲**特解**（particular integral），此特解 y_p 等於 $y(t)$ 之**永久均衡水準**（intertemporal equilibrium level）；而補助解 y_c 則代表與**均衡之差異**（deviation from the equilibrium），如果 $y(t)$ 爲一穩定均衡，則當 t 趨近無窮大時 y_c 必須趨近於 0（亦即，e^{kt} 中之 k 必定爲負值）。此外，一微分方程式之解將可由微分予以檢驗是否正確。

例題 18.3

微分方程式 $\frac{dy}{dt} + 4y = 12$ 之一般解計算如下，因爲 $v = 4$ 與 $z = 12$，將之代入（18.1）式，可得

$$y(t) = e^{-\int 4\,dt}\left(A + \int 12e^{\int 4\,dt}\,dt\right)$$

由 16.2 節知，$\int 4\,dt = 4t + c$。當我們使用（18.1）式時，c 永遠被忽略而被附帶加總於 A，因此，

$$y(t) = e^{-4t}\left(A + \int 12e^{4t}\,dt\right) \tag{18.2}$$

求其餘之積分式，$\int 12e^{4t}\,dt = 3e^{4t} + c$。再度將常數 c 略而不計，且將左式代入（18.2）式，則

$$y(t) = e^{-4t}(A + 3e^{4t}) = Ae^{-4t} + 3 \tag{18.3}$$

因爲 $e^{-4t}e^{4t} = e^0 = 1$。當 $t \to \infty$，$y_c = Ae^{-4t} \to 0$ 且 $y(t)$ 趨近於 $y_p = 3$，此爲永久均衡之水準，故 $y(t)$ 爲動態穩定。

檢查此一般解，首先取（18.3）式之導數，

$$\frac{dy}{dt} = -4Ae^{-4t}$$

由原先之問題可知，

$$\frac{dy}{dt}+4y=12 \qquad \frac{dy}{dt}=12-4y$$

由(18.3)式 $y=Ae^{-4t}+3$ 代入，可得

$$\frac{dy}{dt}=12-4(Ae^{-4t}+3)=-4Ae^{-4t}$$

例題18.4

已知 $\frac{dy}{dt}+3t^2y=t^2$ 其中 $v=3t^2$ 與 $z=t^2$，求一般解。首先，代入(18.1)式，可得

$$y(t)=e^{-\int 3t^2\,dt}\left(A+\int t^2e^{\int 3t^2\,dt}\,dt\right) \tag{18.4}$$

對指數求其積分，$\int 3t^2dt=t^3$，代入(18.4)式，則

$$y(t)=e^{-t^3}\left(A+\int t^2e^{t^3}\,dt\right) \tag{18.5}$$

以代入法求(18.5)式之剩餘的積分式，令 $u=t^3$，$du/dt=3t^2$，且 $dt=du/3t^2$

$$\int t^2e^{t^3}\,dt=\int t^2e^u\frac{du}{3t^2}=\frac{1}{3}\int e^u\,du=\frac{1}{3}e^u=\frac{1}{3}e^{t^3}$$

最後，代入(18.5)式，

$$y(t)=e^{-t^3}(A+\tfrac{1}{3}e^{t^3})=Ae^{-t^3}+\tfrac{1}{3} \tag{18.6}$$

當 $t\to\infty$，$y_c=Ae^{-t^3}\to 0$ 且 $y(t)$ 趨近於 $\frac{1}{3}$。故此均衡爲動態穩定。

微分(18.6)式以檢查上述之一般解，$dy/dt=-3t^2Ae^{-t^3}$，由原先之問題知

$$\frac{dy}{dt}+3t^2y=t^2 \qquad \frac{dy}{dt}=t^2-3t^2y$$

以(18.6)式之 y 代入，則

$$\frac{dy}{dt}=t^2-3t^2(Ae^{-t^3}+\tfrac{1}{3})=-3t^2Ae^{-t^3}$$

例題18.5

假設於例4中，$y(0)=1$，則其定解計算如下：由(18.6)式知 $y=Ae^{t^3}+\frac{1}{3}$，

則當 $t=0$ 時，$y(0)=1$，因此 $1=A+\frac{1}{3}$，又因爲 $e^0=1$，故 $A=\frac{2}{3}$，代入(18.6)式可得定解爲 $y=\frac{2}{3}e^{t^3}+\frac{1}{3}$。

18.3 恰當方程式

如果一兩變數之函數 $F(y,t)$，而 $M=\partial F/\partial y$ 與 $N=\partial F/\partial t$，則其全微分爲

$$dF(y,t)=M\,dy+N\,dt \tag{18.7}$$

因爲 M 與 N 爲偏導數，故上式稱爲**偏微分方程式**(partial differential equation)，如果令上式等於 0，即 $M\,dy+N\,dt=0$，則稱爲**恰當方程式**(exact equation)，因爲此時式之左邊恰好等於原始函數 $F(y,t)$ 之微分，就此一恰當方程式而言，$\partial M/\partial t$ 必定等於 $\partial N/\partial y$，亦即，$\partial^2F/\partial y\partial t=\partial^2F/\partial t\,\partial y$。

求解一恰當方程式必須先將某一變數固定，而對於另一變數連續求其積分[此可稱之爲**偏積分**(partial integration)其與偏微分呈相反之關係]，參見例 6。

例題 18.6

求解下式非線性恰當方程式

$$(6yt+9y^2)\,dy+(3y^2+8t)\,dt=0 \tag{18.8}$$

(1) 首先檢查此式是否爲恰當方程式，在此 $M=6yt+9y^2$ 而 $N=3y^2+8t$，因此，$\partial M/\partial t=6y$ 而 $\partial N/\partial y=6y$，如果 $\partial M/\partial t\neq\partial N/\partial y$，則不爲恰當方程式。

(2) 因爲 $M=\partial F/\partial y$ 爲一偏導數，故首先由 M 對 y 求偏積分，且加入一新的函數 $Z(t)$，其中每一個 t 之加項將被原先對 y 之微分消去，應注意的是，在偏積分中以 ∂y 取代 dy。

$$F(y,t)=\int(6yt+9y^2)\partial y+Z(t)=3y^2t+3y^3+Z(t) \tag{18.9}$$

如此，除了未知之 t 的加項 $Z(t)$ 外，我們可求得原始之函數。

(3) 將(18.9)式對 t 微分以求 $\partial F/\partial t$（前面稱爲 N 者），故

$$\frac{\partial F}{\partial t}=3y^2+Z'(t) \tag{18.10}$$

因爲 $\partial F/\partial t=N$ 並由(18.8)式知 $N=3y^2+8t$，將 $\partial F/\partial t=3y^2+8t$ 代入(18.10)式可得，

$$3y^2+8t=3y^2+Z'(t)\qquad Z'(t)=8t$$

(4) 其次就 $Z'(t)$ 對 t 求積分以求得未知之 t 項，

$$Z(t) = \int Z'(t)\,dt = \int 8t\,dt = 4t^2 \qquad (18.11)$$

(5) 將（18.11）式代入（18.9）式，並加上一積分常數 c ，即

$$F(y,t) = 3y^2t + 3y^3 + 4t^2 + c$$

我們可經由微分而輕易地檢查此答案是否正確。

18.4 積分因式

事實上，並非所有微分方程式均爲恰當方程式，但是，我們可經由積分之因式分解（integrating factor）將某些微分方程式分解爲恰當方程式，此即爲乘（倍）式原理而使方程式成爲可積分者。

例題18.7

檢查非線性之微分方程式 $5ytdy + (5y^2 + 8t)dt = 0$ ，以說明其不爲恰當方程式。由於 $M = 5y$ 而 $N = 5y^2 + 8t$ ，故 $\partial M/\partial t = 5y \neq \partial N/\partial y = 10y$ ，此時將該式乘以積分因式 t ，而使之成爲恰當者：$5yt^2dy + (15y^2t + 8t^2)dt = 0$ ，如此則 $\partial M/\partial t = 10yt = \partial N/\partial y$ ，故此式可按上述之方法求解，參見問題 18.22 。

當我們使用積分因式分解時，欲檢查其答案是否正確，則須對此答案取全微分，然後再除以此積分因式。

18.5 積分因式分解之法則

下列兩法則可幫助我們尋得一非線性一階微分方程式之積分因式（如果此積分因式存在的話），假設 $\partial M/\partial t \neq \partial N/\partial y$ ，

法則 1. 如果 $\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial y}\right] = f(y)$ ，則 $e^{\int f(y)\,dy}$ 爲一積分因式。

法則 2. 如果 $\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial t}\right] = g(t)$ ，則 $e^{\int g(t)\,dt}$ 爲一積分因式。

例題18.8

爲說明上述法則，我們求例 7 之積分因式如下，其中

$$5yt\,dy + (5y^2 + 8t)\,dt = 0 \qquad M = 5yt \qquad N = 5y^2 + 8t \qquad \partial M/\partial t = 5y \neq \partial N/\partial y = 10y$$

應用法則 1 ，

$$\frac{1}{5y^2 + 8t}(5y - 10y) = \frac{-5y}{5y^2 + 8t}$$

此式並非只含 y 之函數故無法用法則 1 提供其積分因式。再應用法則 2 ，

$$\frac{1}{5yt}(10y-5y)=\frac{5y}{5yt}=\frac{1}{t}$$

此函數只含 t 之變數，因此其積分因式爲 $e^{\int(1/t)\,dt}=e^{\ln t}=t$。。

18.6 變數之分割

一階一次非線性微分方程式之解相當複雜（一階一次微分方程式是指此方程式中最高階之導數爲一階導數 dy/dt，而此導數之次方不大於 1 者，而稱爲非線性者則指此微分方程式包含 y 與 dy/dt 之乘積，或 y 之次方大於 1 ）。如果此方程式爲恰當者或可經由積分因式分解而化爲恰當方程式，則例 6 所述之方法可予採用，然而，如果此方程式可以改寫爲**分割變數**（separated variables）之形式，如 $M(y)dy+N(t)dy=0$，其中 M 與 N 分別只爲 y 與 t 之函數，則此方程式可以普通之積分求解。

例題 18.9

下列之計算式乃說明將變數分割以求解非線性微分方程式

$$\frac{dy}{dt}=y^2t \tag{18.12}$$

首先，將各項重新整理，$dy/y^2=t\,dt$。因此 $M=1/y^2$ 與 $N=t$。兩邊取積分，則

$$\int y^{-2}\,dy=\int t\,dt$$

$$-y^{-1}+c_1=\frac{t^2}{2}+c_2$$

$$-\frac{1}{y}=\frac{t^2+2c_2-2c_1}{2}$$

令 $c=2c_2-2c_1$，則

$$y=\frac{-2}{t^2+c} \tag{18.13}$$

因爲積分常數 c 在未求得特解前均爲一任意常數，亦即，在此之前它將被視爲一般性者而不必賦予某特定之值，故 e^c 與 $\ln c$ 均可用來代表此常數。

此解之檢查步驟如下：對 $y=-2(t^2+c)^{-1}$ 取導數（經由連鎖律）

$$\frac{dy}{dt}=(-1)(-2)(t^2+c)^{-2}(2t)=\frac{4t}{(t^2+c)^2}$$

由（18.12）式知，$dy/dt=y^2t$。將（18.13）式代入（18.12）式，

$$\frac{dy}{dt}=\left(\frac{-2}{t^2+c}\right)^2 t=\frac{4t}{(t^2+c)^2}$$

例題 18.10

已知所予非線性微分方程式爲

$$t^2\,dy+y^3\,dt=0 \tag{18.14}$$

其中$M\neq f(y)$且$N\neq f(t)$，但是，(18.14)式乘以$(1/t^2y^3)$以分割其變數，則

$$\frac{1}{y^3}dy+\frac{1}{t^2}dt=0 \tag{18.14a}$$

對上式取積分，即

$$\int y^{-3}\,dy+\int t^{-2}\,dt=-\frac{1}{2}y^{-2}-t^{-1}+c$$

故

$$F(y,t)=-\tfrac{1}{2}y^{-2}-t^{-1}+c$$

有關較複雜之函數，其答案仍與此形式類似，本題檢查的方法仍然是取其微分再與(18.14*a*)式比較，又(18.14*a*)式乘以y^3t^2可化簡爲(18.14)式，關於不同形式答案之表示法請參見問題 18.20-18.22 與 18.29-18.31 。

18.7 貝努力方程式

貝努力方程式（Bernoulli equation）是指一非線性微分方程式具下列特殊形式者

$$\frac{dy}{dt}+ay=by^n \tag{18.15}$$

其中a與b爲常數或t之函數，$n\neq 0$與$n\neq 1$，令$w=y^{1-n}$，則(18.15)式可被轉換爲下式之線性方程式：

$$\frac{dw}{dt}+(1-n)aw=(1-n)b \tag{18.15a}$$

此式可由(18.1)式求得其解，此時$v=(1-n)a$與$z=(1-n)b$。參見問題 18.48。

例題 18.11

貝努力方程式$\dfrac{dy}{dt}-y=ty^2$之解如下所示：

在此，$n=2$，故$w=y^{1-2}=y^{-1}$；$a=-1$，$b=t$；與$(1-n)=-1$，代入(18.15*a*)式，則

$$\frac{dw}{dt} + w = -t$$

使用 (18.1) 式，其中 $v = 1$ 與 $z = -t$ ，

$$w(t) = e^{-\int 1\,dt}\left(A + \int -te^{\int 1\,dt}\,dt\right) = e^{-t}\left(A + \int -te^{t}\,dt\right)$$

使用部分積分法，可得 $w(t) = e^{-t}(A - te^{t} + e^{t}) = Ae^{-t} - t + 1$

因爲 $w(t) = y(t)$ ，則 $y(t) = (Ae^{-t} - t + 1)^{-1}$

18-8 經濟學上之應用

微分方程式在經濟學問題中提供許多功能，它們可被用來判斷個體經濟中市場均衡模型的動態穩定條件，並求出在各種不同總體經濟條件下之成長時徑 (time path) ，又如果已知一函數之成長率，則可用微分方程式求得此函數成長之類型；並且由已知之點彈性，可估計其需求函數（參見例 12 與問題 18.39 - 18.50）。於 16.6 節中，我們曾應用微分方程來估計一已知投資函數之資本形成函數，及分別由邊際成本與邊際收益函數估計總成本與總收益函數。

例題18.12

已知所予之需求函數 $Q_d = c + bP$ 與供給函數 $Q_s = g + hP$ ，則其均衡價格爲

$$\bar{P} = \frac{c - g}{h - b} \tag{18.16}$$

假設市場中價格之變動率 (dP/dt) 爲超額需求 (excess demand) —— $(Q_d - Q_s)$ 之正的線性函數，即

$$\frac{dP}{dt} = m(Q_d - Q_s) \quad m = \text{常 數} > 0 \tag{18.17}$$

此市場上價格之動態穩定條件 [亦即，當 $t \to \infty$ 時 $P(t)$ 將收斂於 $\bar{P}$ 之條件] 的計算例示如下。

首先將已知 Q_d 與 Q_s 之參數代入 (18.17) 式，

$$\frac{dP}{dt} = m[(c + bP) - (g + hP)] = m(c + bP - g - hP)$$

調整各項使之符合 18.2 節所述之一般化陳式，$\frac{dP}{dt} + m(h - b)P = m(c - g)$ 。令

$v = m(h-b)$ 與 $z = m(c-g)$，並使用（18.1）式，

$$P(t) = e^{-\int v\,dt}\left(A + \int ze^{\int v\,dt}\,dt\right) = e^{-vt}\left(A + \int ze^{vt}\,dt\right)$$
$$= e^{-vt}\left(A + \frac{ze^{vt}}{v}\right) = Ae^{-vt} + \frac{z}{v} \qquad (18.18)$$

當 $t = 0$，$P(0) = A + z/v$ 且 $A = P(0) - z/v$。

代入（18.18）式，

$$P(t) = \left[P(0) - \frac{z}{v}\right]e^{-vt} + \frac{z}{v}$$

最後，代入 $v = m(h-b)$ 與 $z = m(c-g)$，

$$P(t) = \left[P(0) - \frac{c-g}{h-b}\right]e^{-m(h-b)t} + \frac{c-g}{h-b}$$

再使用（18.16）式，可求得其時徑爲

$$P(t) = [P(0) - \bar{P}]e^{-m(h-b)t} + \bar{P} \qquad (18.19)$$

因爲 $P(0)$，$\bar{P}$，$m > 0$，故上式右邊第一項當 $t \to \infty$ 時將逐漸向 0 收斂，因此，$P(t)$ 將收斂於 $\bar{P}$ 之條件是 $h - b > 0$，在正常負斜率需求（$b < 0$）與正斜率供給（$h > 0$）的情況下，必可滿足此動態穩定之條件，另外，如果市場需求爲正斜率或供給函數爲負斜率時，只要 $h > b$，亦可滿足動態穩定之條件。

習題與解答

階次與次數

18.1 指出下列諸微分方程式之階次與次數：

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = 12x$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$

(c) $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^4 + \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^6 = 4 - y$

(d) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \dfrac{d^4y}{dx^4} - 75y = 0$

(e) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + x^2y\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) - 4y^4 = 0$

圖 (a) 二階，一次。(b) 一階，一次。(c) 三階，四次。(d) 四階，一次。(e) 三階，一次。

一階，一次線性微分方程式

18.2 (*a*) 使用一般解之公式，求解下式，(*b*) 檢查你的答案。

$$\frac{dy}{dt} + 5y = 0 \tag{18.20}$$

解 (*a*) 在此 $v = 5$ 與 $z = 0$。代入 (18.1) 式，

$$y(t) = e^{-\int 5\,dt}\left(A + \int 0e^{\int 5\,dt}\,dt\right)$$

對指數式積分之，即 $\int 5\,dt = 5t + c$，其中 c 可予以忽略，因爲它被含括於總和 A 中，故 $y(t) = e^{-5t}(A + \int 0\,dt)$，$\int 0\,dt = k$，$k$ 爲一常數，亦被含括於 A，因此，

$$y(t) = e^{-5t}(A) = Ae^{-5t} \tag{18.21}$$

(*b*) 對 (18.21) 式取導數，即 $dy/dt = -5Ae^{-5t}$，又由 (18.20) 式知，$dy/dt = -5y$。將 (18.21) 式之 y 代入可得，

$$\frac{dy}{dt} = -5(Ae^{-5t}) = -5Ae^{-5t}$$

18.3 已知

$$\frac{dy}{dt} = 3y \qquad y(0) = 2 \tag{18.22}$$

試重新作問題 18.2。

解 (*a*) 重新整理各項，使上式爲一般化陳式，

$$\frac{dy}{dt} - 3y = 0$$

在此 $v = -3$ 與 $z = 0$。代入 (18.1) 式，

$$y(t) = e^{-\int -3\,dt}\left(A + \int 0e^{\int -3\,dt}\,dt\right)$$

代入 $\int -3\,dt = -3t$，即 $y(t) = e^{3t}(A + \int 0\,dt) = Ae^{3t}$。當 $t = 0$ 時，$y = 2$。因此，$2 = Ae^{3(0)}$，$A = 2$ 代入可得，

$$y(t) = 2e^{3t} \tag{18.23}$$

(*b*) 對 (18.23) 取導數，即 $dy/dt = 6e^{3t}$，並由 (18.22) 式知，$dy/dt = 3y$。以 (18.23) 式之 y 代入，則 $dy/dt = 3(2e^{3t}) = 6e^{3t}$

18.4 已知如(18.24)式，重新作問題18.2。

$$\frac{dy}{dt} = 15 \tag{18.24}$$

解 (*a*) 在此 $v = 0$ 與 $z = 15$，故，

$$y(t) = e^{-\int 0\,dt}\left(A + \int 15e^{\int 0\,dt}\,dt\right)$$

其中 $\int 0\,dt = k$ 爲一常數，代入，並記住 e^k 亦爲一常數，

$$y(t) = e^{-k}\left(A + \int 15e^{k}\,dt\right)$$
$$= e^{-k}(A + 15te^{k}) = Ae^{-k} + 15t = 15t + A \tag{18.25}$$

其中 A 爲一任意常數，等於 Ae^{-k} 或 c，當導數爲一常數時，其積分解如例2所示者。

(*b*) 對(18.25)式取導數，即 $dy/dt = 15$。由(18.24)式知，$dy/dt = 15$。

18.5 已知所予如(18.26)式，重新作問題18.2。

$$\frac{dy}{dt} - 6y = 18 \tag{18.26}$$

解 (*a*) 在此 $v = -6$，$z = 18$ 與 $\int -6\,dt = -6t$，代入(18.1)式，

$$y(t) = e^{6t}\left(A + \int 18e^{-6t}\,dt\right)$$

其中 $\int 18e^{-6t}\,dt = -3e^{-6t}$，因此，

$$y(t) = e^{6t}(A - 3e^{-6t}) = Ae^{6t} - 3 \tag{18.27}$$

(*b*) 對(1　27)式取導數，即 $dy/dt = 6Ae^{6t}$。由(18.26)式知，$dy/dt = 18 + 6y$。以(18.27)式之 y 代入，則 $dy/dt = 18 + 6(Ae^{6t} - 3) = 6Ae^{6t}$。

18.6 已知所予如(18.28)式，重新作問題18.2。

$$\frac{dy}{dt} + 4y = -20 \qquad y(0) = 10 \tag{18.28}$$

解 (*a*) 在此 $v = 4$，$z = -20$，與 $\int 4\,dt = 4t$。因此

$$y(t) = e^{-4t}\left(A + \int -20e^{4t}\,dt\right)$$

其中 $\int -20e^{4t}\,dt = -5e^{4t}$ 。代入上式，則 $y(t) = e^{-4t}(A - 5e^{4t}) = Ae^{-4t} - 5$ 。當 $t = 0$ 時，$y = 10$ 。因此，$10 = Ae^{-4(0)} - 5$ ，且 $A = 15$ 。代入上式，則

$$y(t) = 15e^{-4t} - 5 = 5(3e^{-4t} - 1) \tag{18.29}$$

(*b*) (18.29) 式之導數爲 $dy/dt = -60e^{-4t}$ 。由 (18.28) 式知，$dy/dt = -20 - 4y$ ，以 (18.29) 式之 y 代入，則 $dy/dt = -20 - 4(15e^{-4t} - 5) = -60e^{-4t}$ 。

18.7 已知所予如 (18.30) 式，重新作問題 18.2 。

$$\frac{dy}{dt} + 4ty = 6t \tag{18.30}$$

圖 (*a*) $v = 4t$ ，$z = 6t$ ，與 $\int 4t\,dt = 2t^2$ 。因此，

$$y(t) = e^{-2t^2}\left(A + \int 6te^{2t^2}\,dt\right) \tag{18.31}$$

使用代入法求上式積分式，令 $u = 2t^2$ ，$du/dt = 4t$ ，與 $dt = du/4t$ 。因此，

$$\int 6te^{2t^2}\,dt = \int 6te^{u}\frac{du}{4t} = 1.5\int e^{u}\,du = 1.5e^{2t^2}$$

代入 (18.31) 式可得，

$$y(t) = e^{-2t^2}(A + 1.5e^{2t^2}) = Ae^{-2t^2} + 1.5 \tag{18.32}$$

(*b*) (18.32) 式之導數爲 $dy/dt = -4tAe^{-2t^2}$ 。由 (18.30) 式知，$dy/dt = 6t - 4ty$ 。以 (18.32) 式之 y 代入，可得 $dy/dt = 6t - 4t(Ae^{-2t^2} + 1.5) = -4tAe^{-2t^2}$ 。

18.8 (*a*) 以一般解之公式求下列方程式，(*b*) 並檢查你的答案。

$$2\frac{dy}{dt} - 2t^2y = 9t^2 \qquad y(0) = -2.5 \tag{18.33}$$

圖 (*a*) 將此式除以 2 ，則 $dy/dt - t^2y = 4.5t^2$ 。因此，$v = -t^2$ ，$z = 4.5t^2$ ，與 $\int -t^2\,dt = -\frac{1}{3}t^3$ 。代入公式，則

$$y(t) = e^{(1/3)t^3}\left(A + \int 4.5t^2e^{-(1/3)t^3}\,dt\right) \tag{18.34}$$

令 $u = -\frac{1}{3}t^3$ ，$du/dt = -t^2$ ，與 $dt = -du/t^2$ 。因此，

$$\int 4.5t^2e^{-(1/3)t^3}\,dt = \int 4.5t^2e^{u}\frac{du}{-t^2} = -4.5\int e^u\,du = -4.5e^{-(1/3)t^3}$$

代入（18.34）式，

$$y(t) = e^{(1/3)t^3}(A - 4.5e^{-(1/3)t^3}) = Ae^{(1/3)t^3} - 4.5$$

當 $t = 0$，$-2.5 = A - 4.5$；$A = 2$。因此，

$$y(t) = 2e^{(1/3)t^3} - 4.5 \qquad (18.35)$$

(*b*) 對（18.35）式取導數，即，$dy/dt = 2t^2e^{(1/3)t^3}$。由（18.33）式知，，$dy/dt = 4.5t^2 + t^2y$。以（18.35）式代入，則 $dy/dt = 4.5t^2 + t^2(2e^{(1/3)t^3} - 4.5) = 2t^2e^{(1/3)t^3}$

18.9 已知所予如（18.36）式，重新作問題 18.8。

$$\frac{dy}{dt} - 2ty = e^{t^2} \qquad (18.36)$$

圖 (*a*) $v = -2t$，$z = e^{t^2}$，與 $\int -2t\,dt = -t^2$。因此，

$$y(t) = e^{t^2}\left(A + \int e^{t^2}e^{-t^2}\,dt\right) = e^{t^2}\left(A + \int e^0\,dt\right)$$

其中 $e^0 = 1$ 且 $\int 1\,dt = t$。代回上式，則

$$y(t) = e^{t^2}(A + t) \qquad (18.37$$

(*b*) 以乘積法則求（18.37）式之導數，即 $dy/dt = 2te^{t^2}(A + t) + e^{t^2}(1) = 2tAe^{t^2} + 2t^2e^{t^2} + e^{t^2}$。由（18.36）式知，$dy/dt = e^{t^2} + 2ty$。以（18.37）式代入可得，

$$\frac{dy}{dt} = e^{t^2} + 2t[e^{t^2}(A + t)] = e^{t^2} + 2tAe^{t^2} + 2t^2e^{t^2}.$$

18.10 已知所予如（18.38）式，重新作問題 18.8。

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 6t \qquad y(0) = \frac{1}{3} \qquad (18.38)$$

圖 (*a*) $v = 3$，$z = 6t$ 與 $\int 3\,dt = 3t$。則，

$$y(t) = e^{-3t}\left(A + \int 6te^{3t}\,dt\right) \qquad (18.39)$$

使用部分積分法求上式之積分式，令 $f(t) = 6t$，則 $f'(t) = 6$；令 $g'(t) = e^{3t}$，則 $g(t) = \int e^{3t}\,dt = \frac{1}{3}e^{3t}$。代入（16.1）式，

$$\int 6te^{3t}\,dt = 6t\left(\frac{1}{3}e^{3t}\right) - \int \frac{1}{3}e^{3t}6\,dt$$

$$= 2te^{3t} - 2\int e^{3t}\,dt = 2te^{3t} - \frac{2}{3}e^{3t}$$

代回（18.39）式，則

$$y(t) = e^{-3t}(A + 2te^{3t} - \tfrac{2}{3}e^{3t}) = Ae^{-3t} + 2t - \tfrac{2}{3}$$

當 $t = 0$，$\frac{1}{3} = Ae^{-3(0)} + 2(0) - \frac{2}{3}$，$A = 1$。因此，

$$y(t) = e^{-3t} + 2t - \tfrac{2}{3} \qquad (18.40)$$

(*b*) 對（18.40）式取導數，即 $dy/dt = -3e^{-3t} + 2$。由（18.38）式知，$dy/dt = 6t - 3y$。直接代入（18.40）式，則 $dy/dt = 6t - 3(e^{-3t} + 2t - \frac{2}{3}) = -3e^{-3t} + 2$。

18.11 已知所予如（18.41）式，重新作問題 18.8。

$$\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t} = 0 \qquad y(3) = 12 \qquad (18.41)$$

解 (*a*) $v = -1/t$，$z = 0$，與 $\int -(1/t)dt = -\ln t$。因此，

$$y(t) = e^{\ln t}\left(A + \int 0\,dt\right) = At$$

因此 $e^{\ln t} = t$，當 $t = 3$ 時，$12 = A(3)$；$A = 4$。因此，

$$y(t) = 4t \qquad (18.42)$$

(*b*)（18.42）式之導數爲 $dy/dt = 4$，由（18.41）式知，$dy/dt = y/t$。以（18.42）式代入可得，$dy/dt = 4t/t = 4$。

18.12 已知所予如（18.43）式，重新作問題 18.8。

$$\frac{dy}{dt} = -y \qquad y(3) = 20 \qquad (18.43)$$

解 (*a*) 重新整理各項，則 $dy/dt + y = 0$。因此，$v = 1$，$z = 0$，與 $\int 1\,dt = t$，故

$$y(t) = e^{-t}\left(A + \int 0\,dt\right) = Ae^{-t}$$

當 $t = 3$，$20 = Ae^{-3}$，由附錄 III 查表知，$20 = A(0.05)$；$A = 400$。因此，

$$y(t) = 400e^{-t} \qquad (18.44)$$

(*b*) 對（18.44）式取導數，即 $dy/dt = -400e^{-t}$。以（18.43）式，$dy/dt = -y$。以（18.44）式代入可得，$dy/dt = -(400e^{-t}) = -400e^{-t}$。

恰當方程式

18.13 求解下列恰當方程式，並檢查你的答案。

$$(4y + 8t^2)\,dy + (16yt - 3)\,dt = 0$$

解 正如例 6 所討論者，其步驟如下：

1. 首先檢查是否爲恰當方程式。令 $M = (4y + 8t^2)$ 與 $N = (16yt - 3)$，$\partial M/\partial t = 16t = \partial N/\partial y$，故此式爲恰當方程式。
2. M 對 y 取偏積分並加上 $Z(t)$ 求其 $F(y, t)$。

$$F(y,t) = \int (4y + 8t^2)\,\partial y + Z(t) = 2y^2 + 8t^2y + Z(t) \tag{18.45}$$

3. $F(y, t)$ 對 t 取偏微分而等於上述之 N，即

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 16ty + Z'(t)$$

但 $\partial F/\partial t = N = 16yt - 3$，故

$$16ty + Z'(t) = 16yt - 3 \qquad Z'(t) = -3$$

4. $Z'(t)$ 對 t 積分之而求得 $Z(t)$，即

$$Z(t) = \int Z'(t)\,dt = \int -3\,dt = -3t \tag{18.46}$$

5. 將（18.46）式代入（18.45）式並加上一積分常數，即

$$F(y,t) = 2y^2 + 8t^2y - 3t + c$$

18.14 已知 $(12y + 7t + 6)dy + (7y + 4t - 9)dt = 0$，重新作問題 18.13。

解 1. $\partial M/\partial t = 7 = \partial N/\partial y$. 故此式爲恰當方程式。

2. $$F(y,t) = \int (12y + 7t + 6)\,\partial y + Z(t) = 6y^2 + 7yt + 6y + Z(t)$$

3. $\partial F/\partial t = 7y + Z'(t)$. 但 $\partial F/\partial t = N = 7y + 4t - 9$. 故

$$7y + Z'(t) = 7y + 4t - 9 \qquad Z'(t) = 4t - 9$$

4. $$Z(t) = \int (4t - 9)\,dt = 2t^2 - 9t$$

5. $$F(y,t) = 6y^2 + 7yt + 6y + 2t^2 - 9t + c$$

18.15 已知 $(12y^2t^2 + 10y)\,dy + (8y^3t)\,dt = 0$。試重新作問題 18.13。

圖 1. $\partial M/\partial t = 24y^2t = \partial N/\partial y$. 故此式爲恰當方程式，.

2. $$F(y,t) = \int (12y^2t^2 + 10y)\,\partial y + Z(t) = 4y^3t^2 + 5y^2 + Z(t)$$

3. $\partial F/\partial t = 8y^3t + Z'(t)$. 但 $N = 8y^3t$, 故

$$8y^3t = 8y^3t + Z'(t) \qquad Z'(t) = 0$$

4. $Z(t) = \int 0\,dt = k$, k 包含於 c 之下。

5. $$F(y,t) = 4y^3t^2 + 5y^2 + c$$

18.16 已知 $8tyy' = -(3t^2 + 4y^2)$，試重新作問題 8.13。

圖 重新整理各項，即

$$8ty\,dy = -(3t^2 + 4y^2)\,dt \qquad 8ty\,dy + (3t^2 + 4y^2)\,dt = 0$$

1. $\partial M/\partial t = 8y = \partial N/\partial y$. 故此式爲恰當方程式，

2. $$F(y,t) = \int 8ty\,\partial y + Z(t) = 4ty^2 + Z(t)$$

3. $\partial F/\partial t = 4y^2 + Z'(t)$. 但 $\partial F/\partial t = N = 3t^2 + 4y^2$, 故

$$4y^2 + Z'(t) = 3t^2 + 4y^2 \qquad Z'(t) = 3t^2$$

4. $$Z(t) = \int 3t^2\,dt = t^3$$

5. $$F(y,t) = t^3 + 4ty^2 + c$$

18.17 已知 $60ty^2y' = -(12t^3 + 20y^3)$，試重新作問題 18.13。

圖 重新整理各項，則 $60ty^2\,dy + (12t^3 + 20y^3)\,dt = 0$

1. $\partial M/\partial t = 60y^2 = \partial N/\partial y$. 故此式爲恰當方程式

2. $$F(y,t) = \int 60ty^2\,\partial y + Z(t) = 20ty^3 + Z(t)$$

3. $\partial F/\partial t = 20y^3 + Z'(t)$. 但 $\partial F/\partial t = N = 12t^3 + 20y^3$, 故

$$20y^3 + Z'(t) = 12t^3 + 20y^3 \qquad Z'(t) = 12t^3$$

4. $$Z(t) = \int 12t^3\,dt = 3t^4$$

5. $$F(y,t) = 3t^4 + 20ty^3 + c$$

積分因式

18.18 使用括弧內之積分因式求解下列微分方程式，並檢查你的答案（記得，對你的答案取全微分後，將之除以積分因式。）

$$6t\,dy + 12y\,dt = 0 \qquad (t)$$

圖 1. $\partial M/\partial t = 6 \neq \partial N/\partial y = 12$. 但整個乘以積分因式 t 則爲，

$$6t^2\,dy + 12yt\,dt = 0$$

其中 $\partial M/\partial t = 12t = \partial N/\partial y$. 由此新的函數開始求解，

2. $$F(y,t) = \int 6t^2\,\partial y + Z(t) = 6t^2y + Z(t)$$

3. $\partial F/\partial t = 12ty + Z'(t)$. 但 $\partial F/\partial t = N = 12ty$, 故 $Z'(t) = 0$.

4. $Z(t) = \int 0\,dt = k$, 此常數將被包含於 c 。

5. $$F(y,t) = 6t^2y + c$$

18.19 已知

$$t^2\,dy + 3yt\,dt = 0 \qquad (t)$$

試重新作問題 18.18 。

圖 1. $\partial M/\partial t = 2t \neq \partial N/\partial y = 3t$. 上式乘以 t ，則

$$t^3\,dy + 3yt^2\,dt = 0$$

其中 $\partial M/\partial t = 3t^2 = \partial N/\partial y$. 則新的函數爲恰當方程式，

2. $$F(y,t) = \int t^3\,\partial y + Z(t) = t^3y + Z(t)$$

3. $\partial F/\partial t = 3t^2y + Z'(t)$. 但 $\partial F/\partial t = N = 3t^2y$, 故 $Z'(t) = 0$ 且 $F(y,t) = t^3y + c$.

18.20 已知

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} \qquad \left(\frac{1}{ty}\right)$$

試重新作問題 18.18 。

重新整理各項，使之變爲 $t\,dy = y\,dt$ $\qquad$ $t\,dy - y\,dt = 0$

圖 1. $\partial M/\partial t = 1 \neq \partial N/\partial y = -1$ 。乘以 $(1/ty)$ ，

$$\frac{dy}{y} - \frac{dt}{t} = 0$$

其中 $\partial M/\partial t = 0 = \partial N/\partial y$ ，因爲 M 與 N 均不含其欲取偏微分之變數，因此，新的函數爲恰當方程式。

2. $$F(y,t) = \int \frac{1}{y}\,\partial y + Z(t) = \ln y + Z(t)$$

3. $\partial F/\partial t = Z'(t)$. 但 $\partial F/\partial t = N = -(1/t)$, 故 $Z'(t) = -1/t$.

4. $$Z(t) = \int -\frac{1}{t}\,dt = -\ln t$$

5. $F(y,t) = \ln y - \ln t + c$ ，此式可以各種不同方式表現，因爲 c 爲一任意常數，我們可寫成 $\ln y - \ln t = c$ ，使用 logs 有關之定律（參見 7.8 節）知 $\ln y - \ln t = \ln(y/t)$ 。因此，$\ln(y/t) = c$ ，最後，兩邊取 e 之指數，並記住 $e^{\ln x} = x$ ，則

$$e^{(\ln y/t)} = e^c$$

$$\frac{y}{t} = e^c \qquad 或 \qquad y = te^c$$

關於 c 之不同處理方式，參見問題 18.29 - 18.35 。

18.21 已知

$$4t\,dy + (16y - t^3)\,dt = 0 \qquad (t^3)$$

試重新作問題 18.18 。

圖 1. $\partial M/\partial t = 4 \neq \partial N/\partial y = 16$ 。上式乘以 t^3 ，則 $4t^4dy + (16t^3y - t^6)dt = 0$ 其中 $\partial M/\partial t = 16t^3 = \partial N/\partial y$ 。故此新的方程爲恰當方程式，

2. $$F(y,t) = \int 4t^4\,\partial y + Z(t) = 4t^4y + Z(t)$$

3. $\partial F/\partial t = 16t^3y + Z'(t)$. 但 $\partial F/\partial t = N = 16t^3y - t^5$, 故

$$16t^3y + Z'(t) = 16t^3y - t^5 \qquad Z'(t) = -t^5$$

4. $$Z(t) = \int -t^5\,dt = -\frac{1}{6}t^6$$

$$F(y,t) = 4t^4y - \frac{1}{6}t^6 + c = 24t^4y - t^6 + c$$

5. $$24t^4y - t^6 = c$$

18.22 已知

$$5yt\,dy + (5y^2 + 8t)\,dt = 0 \qquad (t)$$

試重新作問題 18.18 。

解 1. $\partial M/\partial t = 5y \neq \partial N/\partial y = 10y$ 。正如例 7 所述，上式乘以 t ，則 $5yt^2dy + (5y^2t + 8t^2)dt = 0$ ，其中 $\partial M/\partial t = 10yt = \partial N/\partial y$ 。

2. $$F(y,t) = \int 5yt^2\,\partial y + Z(t) = 2.5y^2t^2 + Z(t)$$

3. $\partial F/\partial t = 5y^2t + Z'(t)$. 但 $\partial F/\partial t = N = 5y^2t + 8t^2$, 又

$$5y^2t + Z'(t) = 5y^2t + 8t^2 \qquad Z'(t) = 8t^2$$

4. $$Z(t) = \int 8t^2\,dt = \frac{8}{3}t^3$$

5. $$F(y,t) = 2.5y^2t^2 + \frac{8}{3}t^3 + c = 7.5y^2t^2 + 8t^3 + c$$

求積分因式

18.23 (*a*) 求下列微分方程式之積分因式。(*b*) 使用 13.3 節所述之 5 個步驟求此方程式，

$$(7y + 3t^2)\,dy + 4ty\,dt = 0 \qquad (18.47)$$

圖 (a) $\partial M/\partial t = 8t \neq \partial N/\partial y = 4t$ 。應用 18.5 節之法則 1 ，因爲$M = 7y + 4t^2$ 且$N = 4ty$ ，

$$\frac{1}{4ty}(8t - 4t) = \frac{4t}{4ty} = \frac{1}{y} = f(y)$$

故其積分因式爲

$$e^{\int (1/y)\,dy} = e^{\ln y} = y$$

(b) (18.47) 式乘以積分因式 y ，即 $(7y^2 + 4yt^2)dy + 4ty^2dt = 0$ 。

1. $\partial M/\partial t = 8yt = \partial N/\partial y$. 因此，
2. $$F(y,t) = \int (7y^2 + 4yt^2)\partial y + Z(t) = \tfrac{7}{3}y^3 + 2y^2t^2 + Z(t)$$
3. $$\frac{\partial F}{\partial t} = 4y^2t + Z'(t)$$
4. $\partial F/\partial t = N = 4y^2t$, 故 $Z'(t) = 0$ 則 $Z(t)$ 爲一常數，因此，
5. $$F(y,t) = \tfrac{7}{3}y^3 + 2y^2t^2 + c = 7y^3 + 6y^2t^2 + c$$

18.24 已如所予如 (18.48) 式，重新作問題 18.23 。

$$y^2t\,dy + \tfrac{1}{2}y^4\,dt = 0 \qquad (18.48)$$

解 (a) $\partial M/\partial t = y^2 \neq \partial N/\partial y = 2y^3$. 應用法則 1 ，

$$\frac{1}{(1/2)y^4}(y^2 - 2y^3) = \frac{2}{y^4}(-y^3) = -\frac{2}{y} = f(y)$$

因此積分因式爲 $e^{\int -2y^{-1}\,dy} = e^{-2\ln y} = e^{\ln y^{-2}} = y^{-2}$

(b) (18.48) 式乘以 y^{-2} ，即 $ytdy + \frac{1}{2}y^2dt = 0$ 。

1. $\partial M/\partial t = y = \partial N/\partial y$. 因此，
2. $$F(y,t) = \int yt\,\partial y + Z(t) = \tfrac{1}{2}y^2t + Z(t)$$
3. $$\frac{\partial F}{\partial t} = \tfrac{1}{2}y^2 + Z'(t)$$

$\partial F/\partial t = N = \frac{1}{2}y^2$, 故 $Z'(t) = 0$ ，則 $Z(t)$ 爲一常數，因此，

$$F(y,t) = \tfrac{1}{2}y^2t + c$$

5. 如所予如 (18.49) 式，重新作問題 18.23 。

$$4t\,dy + (16y - t^2)\,dt = 0 \qquad (18.49)$$

解 (a) $M = 4t$, $N = 16y - t^2$. 因 $\partial M/\partial t = 4 \neq \partial N/\partial y = 16$. 應用法則 1 ，

$$\frac{1}{16y - t^2}(4 - 16) = \frac{-12}{16y - t^2} \neq f(y)$$

再應用法則 2 ，

$$\frac{1}{4t}(16-4)=\frac{3}{t}=g(t)$$

因此， $e^{\int 3(t^{-1})\,dt}=e^{3\ln t}=e^{\ln t^3}=t^3$

(*b*) (18.49) 式乘以 t^3 ，則 $4t^4dy+(16yt^3-t^7)dt=0$ 。其解已如問題 18.21 所示。

18.26 已知所予如 (18.50) 式，重新作問題 18.23 。

$$t^2\,dy+3yt\,dt=0 \tag{18.50}$$

圖 (*a*) 在此 $M=t^2$, $N=3yt$, 與 $\partial M/\partial t=2t\neq\partial N/\partial y=3t$. 應用法則 1 ，

$$\frac{1}{3yt}(2t-3t)=\frac{-t}{3yt}=\frac{-1}{3y}=f(y)$$

因此， $e^{\int(-1/3y)\,dy}=e^{-(1/3)\ln y}=e^{\ln y^{-1/3}}=y^{-1/3}$

因此， $y^{-1/3}$ 爲此方程式之積分因式，由於問題 18.19 中已知 t 爲已知之積分因式，現在讓我們檢查一下 $y^{-1/3}$ ，

(*b*) (18.50) 式乘以 $y^{-1/3}$ ，則 $t^2y^{-1/3}dy+3ty^{2/3}dt=0$ 。

1. $\partial M/\partial t=2ty^{-1/3}=\partial N/\partial y$. 因此，
2. $$F(y,t)=\int t^2y^{-1/3}\,\partial y+Z(t)=1.5t^2y^{2/3}+Z(t)$$
3. $$\frac{\partial F}{\partial t}=3ty^{2/3}+Z'(t)$$
4. $\partial F/\partial t=N=3ty^{2/3}$, 故 $Z'(t)=0$ 則 $Z(t)$ 爲一常數，因此，
5. $$F_1(y,t)=1.5t^2y^{2/3}+c \tag{18.51}$$

在此 F_1 乃用來與下一題之 F_2 函數有所區別之函數符號。

18.27 試檢驗問題 18.26 中， t 是否可能爲一積分因式，

圖 由原先之方程應用法則 1 ，可知，

$$\frac{1}{t^2}(3t-2t)=\frac{t}{t^2}=\frac{1}{t}$$

故 $e^{\int(1/t)\,dt}=e^{\ln t}=t$

因此 t 亦爲一積分因式（正如問題 18.19 所述），問題 18.19 之解爲 $F_2(y,t)=t^3y+c$ ，此與 (18.51) 式不同，但同樣是正確答案，讀者可自行檢查之。

18.28 已知所予如 (18.52) 式，重新作問題 18.23 。

$$(y-t)\,dy-dt=0 \tag{18.52}$$

圖 (*a*) $M=y-t$, $N=-1$, 與 $\partial M/\partial t=-1\neq\partial N/\partial y=0$ 。應用法則 1 ，

$$\frac{1}{-1}(-1-0)=1=f(y)$$

因此 $$e^{\int 1\,dy}=e^{y}$$

(*b*) (18.52) 式乘以 e^{y} ，則

$$(y-t)e^{y}\,dy-e^{y}\,dt=0 \tag{18.53}$$

1. $\partial M/\partial t=-e^{y}=\partial N/\partial y$ 。因此，

2. $$F(y,t)=\int(y-t)e^{y}\,\partial y+Z(t) \tag{18.54}$$

以部分積分法求積分式，令

$$f(y)=y-t \qquad f'(y)=1 \qquad g'(y)=e^{y} \qquad g(y)=\int e^{y}\,dy=e^{y}$$

代入 (16.1) 式，則

$$\int(y-t)e^{y}\,\partial y=(y-t)e^{y}-\int e^{y}1\,dy=(y-t)e^{y}-e^{y}$$

代入 (18.45) 式，則 $F(y,t)=(y-t)e^{y}-e^{y}+Z(t)$ 。

3. $$\frac{\partial F}{\partial t}=-e^{y}+Z'(t)$$

4. $\partial F/\partial t=N=-e^{y}$ 故 $Z'(t)=0$ 則 $Z(t)$ 爲一常數，因此，

5. $$F(y,t)=(y-t)e^{y}-e^{y}+c \qquad \text{或} \qquad (y-1)e^{y}-te^{y}+c$$

變數之分割

18.29 使用 18.6 節所討論之變數分割方法求解下列微分方程式，

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-5t}{y}$$

圖 將變數分離之，

$$y\,dy=-5t\,dt \qquad y\,dy+5t\,dt=0$$

分別對每一項積分之，

$$\frac{y^{2}}{2}+\frac{5t^{2}}{2}=c_{1}$$

$$y^{2}+5t^{2}=2c_{1}$$

令 $c=2c_{1}$ ，則 $$y^{2}+5t^{2}=c$$

18.30 已知

(*a*) $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{t^{5}}{y^{4}}$ (*b*) $t^{2}\,dy-y^{2}\,dt=0$

試重新作問題 18.29 。

答

$$y^5\,dy - t^5\,dt = 0 \qquad \frac{dy}{y^2} - \frac{c}{y^2} =$$

積分之可得，$\frac{y^6}{5} - \frac{t^6}{6} = c_1$　　積分之可得，$-\frac{1}{y} + \frac{1}{y} = c$

$6y^6 - 5t^6 = 30c$　　$y - t = cty$

令 $c = 30c_1$ 。　$6y^6 - 5t^6 = c$

18.31 已知 $t\,dy + y\,dt = 0$ ，試重新作問題 18.29 。

圖

$$\frac{dy}{y} + \frac{dt}{t} = 0$$

積分之可得，$\ln y + \ln t = \ln c$　（為任意常數）

由 logs 之法則可知，$\ln yt = \ln c$　　$yt = c$

18.32 已知 $(t+5)dy - (y+9)dt = 0$ ，試重新作問題 18.29 。

圖

$$\frac{dy}{y+9} - \frac{dt}{t+5} = 0$$

積分之可得，$\ln(y+9) - \ln(t+5) = \ln c$

由 logs 之法則可知，$\ln\frac{y+9}{t+5} = \ln c$

$$\frac{y+9}{t+5} = c \qquad 或 \qquad y+9 = c(t+5)$$

18.33 使用變數分割之方法，求解微分方程式 $dy = 3t^2y\,dt$ 。

圖

$$\frac{dy}{y} - 3t^2\,dt = 0$$

積分可得，$\ln y - t^3 = \ln c$.

將兩邊以 e 之指數表示之，即

$$e^{\ln y - t^3} = e^{\ln c}$$
$$e^{\ln y}e^{-t^3} = e^{\ln c}$$
$$ye^{-t^3} = c$$
$$y = ce^{t^3}$$

18.34 已知 $y^3(t^3+1)dy + t^2(y^3-5)dt = 0$ ，試重新作問題 18.33 。

$$\frac{y^3}{(y^3-5)}dy + \frac{t^2}{(t^3+1)}dt = 0$$

圖　利用代入法求積分式，可得

$$\tfrac{1}{3}\ln(y^3-5) + \tfrac{1}{3}\ln(t^3+1) = \ln c$$
$$\ln[(y^3-5)(t^3+1)] = \ln c \qquad (y^3-5)(t^3+1) = c$$

18.35 已知

$$3\,dy + \frac{t}{t^2-1}\,dt = 0$$

重新作問題 18.33 。

圖

$$3y + \tfrac{1}{2}\ln(t^2-1) = c$$

積分之可得，

將上式左邊以 e 之指數形式表示，並忽略 c ，因爲 c 爲一任意常數，它可能爲 c 或 e^c 。

$$e^{3y+(1/2)\ln(t^2-1)} = c$$

$$e^{3y}e^{\ln(t^2-1)^{1/2}} = c \qquad e^{3y}(t^2-1)^{1/2} = c$$

貝努力方程式

18.36 求解下列貝努力方程式

$$\frac{dy}{dt} + y = ty^3$$

圖 使用 18.7 節所討論之方法，在此，$n=3$ ，$w = y^{1-3} = y^{-2}$ ，$a=1$ ，$b=t$ ，而 $(1-n) = -2$ 。代入（18.15a）式，則

$$\frac{dw}{dt} - 2w = -2t$$

使用（18.1）式，其中 $v=-2$ 與 $z=-2t$ ，

$$w(t) = e^{-\int -2\,dt}\left(A + \int -2te^{\int -2\,dt}\,dt\right) = e^{2t}\left(A + \int -2te^{-2t}\,dt\right)$$

以部分積分法可求得，$w(t) = e^{2t}(A + te^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}) = Ae^{2t} + t + \frac{1}{2}$

因爲 $w = y^{-2}$ ，$y = w^{-1/2}$ 。因此，$y = (Ae^{2t} + t + \frac{1}{2})^{-1/2}$

18.37 已知

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = y^4$$

試重新作問題 18.36 。

圖 在此，$n=4$ ，$w = y^{1-4} = y^{-3}$ ，$a = 1/t$ ，$b=1$ ，而 $(1-n) = -3$ 。代入（18.15a）式，則

$$\frac{dw}{dt} - \frac{3w}{t} = -3$$

使用（18.1）式，其中 $v = -3/t$ 與 $z=-3$ ，

$$w(t) = e^{-\int -(3/t)\,dt}\left(A + \int -3e^{\int -(3/t)\,dt}\,dt\right)$$

$$= e^{3\ln t}\left(A + \int -3e^{-3\ln t}\,dt\right) = t^3\left(A + \int -3t^{-3}\,dt\right)$$

$$= t^3(A + 1.5t^{-2}) = At^3 + 1.5t$$

因爲 $w(t) = y(t)^{-2}$ ， $y(t) = w(t)^{-1/3} = (At^3 + 1.5t)^{-1/3}$

18.38 已知

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}(t+1)y^3$$

試重新作問題 18.36 。

圖 在此 $n = 3$ ， $w = y^{1-3} = y^{-2}$ ， $a = \frac{1}{2}$ ， $b = \frac{1}{2}(t+1)$ ，而 $(1-n) = -2$ 。代入 (18.15a) 式，則

$$\frac{dw}{dt} - w = -(t+1)$$

使用 (18.1) 式，其中 $v = -1$ 與 $z = -(t+1)$ ，

$$w(t) = e^{-\int -1\,dt}\left(A + \int -(t+1)e^{\int -1\,dt}\,dt\right) = e^t\left(A - \int (t+1)e^{-t}\,dt\right)$$

$$= e^t[A + (t+1)e^{-t} + e^{-t}] = Ae^t + t + 1 + 1 = Ae^t + t + 2$$

因爲 $w = y^{-2}$ ， $y = w^{-1/2} = (Ae^t + t + 2)^{-1/2}$

微分方程式在經濟學上之應用

18.39 求需求函數 $Q = f(P)$ ，如果點彈性 ϵ ，爲 -1 ， $P > 0$ 。

$$\epsilon = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = -1 \qquad \frac{dQ}{dP} = -\frac{Q}{P}$$

圖 首先分割變數，

$$\frac{dQ}{Q} + \frac{dP}{P} = 0$$

積分之可得， $\ln Q + \ln P = \ln c$

$$QP = c \qquad Q = \frac{c}{P}$$

18.40 如果 $\epsilon = -k$ ， k 爲常數，求需求函數 $Q = f(P)$ 。

$$\epsilon = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = -k \qquad \frac{dQ}{dP} = -\frac{kQ}{P}$$

圖 分割其變數，

$$\frac{dQ}{Q}+\frac{k}{P}dP=0$$

$$\ln Q+k\ln P=c$$

$$QP^k=c \qquad Q=cP^{-k}$$

18.41 如果 $\epsilon=-(5P-2P^2)/Q$，且當 $P=10$ 時 $Q=500$，求需求函數 $Q=f(P)$。

$$\epsilon=\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}=\frac{-(5P+2P^2)}{Q}$$

$$\frac{dQ}{dP}=\frac{-(5P+2P^2)}{Q}\frac{Q}{P}=-(5+2P)$$

解 分割其變數，

$$dQ+(5+2P)\,dP=0$$

積分之可得，　$Q+5P+P^2=c$　　$Q=-P^2-5P+c$

當 $P=10$ 且 $Q=500$，則

$$500=-100-50+c \qquad c=650$$

故，$Q=650-5P-P^2$。參見第四章例 6。

18.42 原先貨幣總額 $P(0)$，利率爲 i，且計息方式爲連續複利法，試導出 t 年後 P 之總值的公式。

解 由於 i 是被連續複利計算，故

$$\frac{dP}{dt}=iP$$

分割其變數

$$\frac{dP}{P}-i\,dt=0$$

積分之可得，　$\ln P-it=c$

將左式以 e 之指數形式表示之，

$$e^{\ln P-it}=c$$

$$Pe^{-it}=c \qquad P=ce^{it}$$

當 $t=0$，$P=P(0)$。因此 $P(0)=ce^0$，$c=P(0)$，而 $P=P(0)e^{it}$。

18.43 求二部門所得決定模型之穩定條件，其中 $\hat{C}$，$\hat{I}$，$\hat{Y}$ 分別表示消費，投資，所得與其均衡值 C_e，I_e，Y_e 之差異，亦即，$\hat{C}=C(t)-C_e$ 等等，式中 $\hat{C}$ 讀作 C hat；又所得之變動與超額需求 $(C+I-Y)$ 成比例關係；並且

$$\hat{C}(t)=g\hat{Y}(t) \qquad \hat{I}(t)=b\hat{Y}(t) \qquad \frac{d\hat{Y}(t)}{dt}=a(\hat{C}+\hat{I}-\hat{Y}) \qquad 0<a,b,g<1$$

圖 將首二個方程式代入第三個方程式，

$$\frac{d\hat{Y}}{dt} = a(g + b - 1)\hat{Y}$$

分割其變數，然後求其積分式，則

$$\frac{d\hat{Y}}{\hat{Y}} = a(g + b - 1)\,dt$$

$$\ln \hat{Y} = a(g + b - 1)t + c$$

$$e^{\ln \hat{Y}} = e^{a(g+b-1)t+c}$$

令常數 $e^c = c$ ，

$$\hat{Y} = ce^{a(g+b-1)t}$$

當 $t = 0$ ，$\hat{Y} = Y(0) - Y_e = c$ 。代入上式，則 $\hat{Y} = [Y(0) - Y_e]e^{a(g+b-1)t}$ 。因爲 $\hat{Y} = Y(t) - Y_e$ ，$Y(t) = Y_e + \hat{Y}$ 。因此，

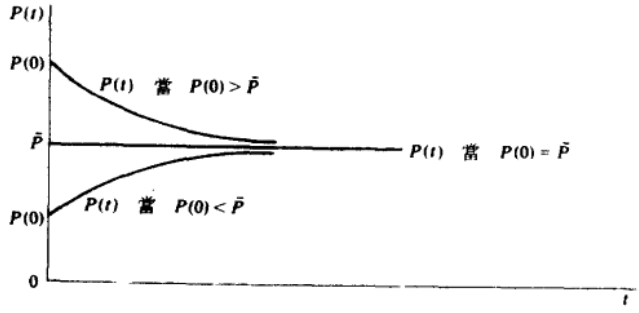
$$Y(t) = Y_e + [Y(0) - Y_e]e^{a(g+b-1)t}$$

當 $t \to \infty$ ，只要 $g + b < 1$ ，$Y(t) \to Y_e$ 。亦即，邊際消費傾向 g 與邊際投資傾向 b 之總和小於 1 。

18.44 於例 12 中，我們知道 $P(t) = [P(0) - \overline{P}]e^{-a(h-b)t} + \overline{P}$ 。(a)解釋下列各種情形下之時徑(1)原先之價格 $P(0) = \overline{P}$，(2) $P(0) > \overline{P}$，與(3) $P(0) < \overline{P}$，(b) 劃出其圖形。

圖 (a) (1)如果原先之價格等於均衡價格，即 $P(0) = \overline{P}$ ，則右邊第一項將消失，故 $P(t) = \overline{P}$，其時徑爲一水平線，並且調整是即刻進行的，參見圖 18-1 。

(2)如果 $P(0) > \overline{P}$，則右邊第一項爲正，因此 $P(t) > \overline{P}$，並且當 $t \to \infty$ ，右邊第一項 $\to 0$ ，故 $P(t)$ 將由上趨近於 $\overline{P}$ 。



■ 18-1

(3)如果$P(0) < \overline{P}$，則右邊第一項爲負，因此，$P(t) < \overline{P}$，並且當$t \to \infty$，右邊第一項$\to 0$，故$P(t)$將由下趨近於$\overline{P}$。

(*b*) 參見圖 18-1 。

18.45 投資活動之變動將同時影響一經濟體系之總合需求與生產能力，於杜馬（Domar）模型中乃討論當一經濟體系充分利用其生產能量時，其經濟成長之時徑問題。如果邊際儲蓄傾向（s）與邊際資本／產出率（capital/output ratio）k爲固定之常數，求欲達到理想之成長率時其投資函數爲何？

圖 總合需求的變動等於投資的變動乘以乘數$1/s$，即

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{s}\frac{dI}{dt} \tag{18.55}$$

而生產能量之變動等於資本存量之變動乘以邊際資本／產出率之倒數，即

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{k}\frac{dK}{dt} = \frac{1}{k}I \qquad \text{又因爲} \qquad \frac{dK}{dt} = I \tag{18.56}$$

生產能量充分利用時，(18.55)式等於(18.56)式，即

$$\frac{1}{s}\frac{dI}{dt} = \frac{1}{k}I \qquad \frac{1}{s}dI = \frac{1}{k}I\,dt$$

分割其變數，

$$\frac{dI}{I} - \frac{s}{k}dt = 0$$

積分之可得，

$$\ln I - \frac{s}{k}t = c$$

$$Ie^{-(s/k)t} = c \qquad I = ce^{(s/k)t}$$

當$t = 0$，$I(0) = c$，故$I = I(0)e^{(s/k)t}$。

故投資必定以一固定之比例成長，此固定之成長率爲s/k；即儲蓄率除以資本／產出率。

18.46 與上題不同的是，**梭羅**（Solow）的成長模型指資本與勞動均充分就業之均衡成長路徑（growth path），其基本假設如下：

圖 1. 產出爲資本與勞動之線性齊次函數，且爲固定規模報酬之生產函數，即

$$Y = f(K,L) \tag{18.57}$$

2. 產出之一固定比例被用來投資與儲蓄，即

$$\frac{dK}{dt} \equiv \dot{K} = sY \tag{18.58}$$

3. 勞動供給以一固定比例r成長，即

$$L = L_0 e^{rt} \tag{18.59}$$

根據上面所述，建立一單獨以變數K/L爲項之微分方程式如下：

首先將（18.57）式之Y代入（18.58）式，則

$$\frac{dK}{dt} = sf(K,L) \tag{18.60}$$

再將（18.59）式之L代入（18.60）式，

$$\frac{dK}{dt} = sf(K,L_0 e^{rt}) \tag{18.61}$$

（18.61）式表示，資本形成之時徑必須等於充分就業勞動力之成長率，爲了將上式轉換爲K/L之函數，令$z = K/L$，則$K = zL$，再使用（18.59）式，則

$$K = zL_0 e^{rt} \tag{18.62}$$

對（18.62）式取導數，其中因爲z爲t之函數，故我們在此乃使用乘積律以求此導數，

$$\frac{dK}{dt} = z(rL_0 e^{rt}) + (L_0 e^{rt})\frac{dz}{dt} = \left(zr + \frac{dz}{dt}\right)L_0 e^{rt} \tag{18.63}$$

（18.61）式與（18.63）式相等，則

$$sf(K,L_0 e^{rt}) = \left(zr + \frac{dz}{dt}\right)L_0 e^{rt} \tag{18.64}$$

由於（18.64）式之左邊爲一線性齊次生產函數，故我們可將兩投入各除以$L_0 e^{rt}$，並且函數本身乘以$L_0 e^{rt}$而不會改變函數值，因此，

$$sf(K,L_0 e^{rt}) = sL_0 e^{rt} f\left(\frac{K}{L_0 e^{rt}}, 1\right) \tag{18.65}$$

將（18.65）式代入（18.64）式，並且兩邊各除以$L_0 e^{rt}$，則

$$sf\left(\frac{K}{L_0 e^{rt}}, 1\right) = zr + \frac{dz}{dt} \tag{18.66}$$

最後，以z取代$K/L_0 e^{rt}$，並且兩邊各減去zr，則

$$\frac{dz}{dt} = sf(z,1) - zr \tag{18.67}$$

此爲以單一變數 z 爲各項之微分方程式，而 r 與 s 爲其參數，其中 $z = K/L$，r = 勞動力之成長率，且 S = 儲蓄比例。

18.47 假設 (18.57) 式之生產函數，進一步設定爲嚴格C-D生產函數，試求所有資源均充分就業時其資本/勞動比率之成長時徑，亦即，已知所予之新條件下求解微分方程式 (18.67)式。

圖 嚴格之C-D生產函數之形式爲 $Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha} = L(K/L)^{\alpha}$ 因爲 $L^{1-\alpha} = L/L^{\alpha}$。代入 $z = K/L$，則

$$Y = Lz^{\alpha} \tag{18.68}$$

於前述未特定之線性齊次生產函數 (18.57) 式，$Y = f(K, L)$ 中，每一投入除以 L 並將乘數乘以 L，如 (18.65) 式所示，如此其函數值不會改變。

$$Y = f(K,L) = Lf\left(\frac{K}{L},1\right) = Lf(z,1) \tag{18.69}$$

因爲我們現在假設一嚴格 $C-D$ 生產函數，故 (18.68) 式等於 (18.69) 式

$$\begin{aligned} Lz^{\alpha} &= Lf(z,1) \\ z^{\alpha} &= f(z,1) \end{aligned} \tag{18.70}$$

將 (18.70) 式代入 (18.67) 式可得，

$$\frac{dz}{dt} = sz^{\alpha} - zr \qquad \frac{dz}{dt} + rz = sz^{\alpha} \tag{18.71}$$

此爲貝努力方程式，其中 $n = \alpha$，故 $w = z^{1-\alpha}$，$a = r$，與 $b = s$。代入 (18.15a) 式，

$$\frac{dw}{dt} + (1-\alpha)rw = (1-\alpha)s$$

使用 (18.1) 式，其中 $v = (1-\alpha)r$ 與 $z = (1-\alpha)s$。

$$\begin{aligned} w(t) &= e^{-\int(1-\alpha)r\,dt}\left(A + \int (1-\alpha)se^{\int(1-\alpha)r\,dt}\,dt\right) \\ &= e^{-(1-\alpha)rt}\left(A + \int (1-\alpha)se^{(1-\alpha)rt}\,dt\right) \\ &= e^{-(1-\alpha)rt}\left[A + \frac{(1-\alpha)s}{(1-\alpha)r}e^{(1-\alpha)rt}\right] = Ae^{-(1-\alpha)rt} + \frac{s}{r} \end{aligned}$$

當 $t = 0$，$w(0) = A + s/r$ 而 $A = w(0) - s/r$。因此，

$$w(t) = \left[w(0) - \frac{s}{r}\right]e^{-(1-\alpha)rt} + \frac{s}{r}$$

因此 $w(t) = z^{1-\alpha}$。 $z^{1-\alpha} = \left[z[0]^{1-\alpha} - \frac{s}{r}\right]e^{-(1-\alpha)rt} + \frac{s}{r}$

由於 $0 < \alpha < 1$ 且 $(1-\alpha)$ 與 $r > 0$，故當 $t \to \infty$，$z^{1-\alpha} \to s/r$；且 $z \to (s/r)^{1/(1-\alpha)}$，亦即，$z$，資本/勞動比例，趨近於 $(s/r)^{1/(1-\alpha)}$ 之均衡值。由此可知，於Solow模型裡均衡的資本/勞力比例水準將隨著儲蓄

率（s）作同方向變動，但却與勞力成長率（r）作反方向變動。

18.48 令$w = y^{1-n}$，試證如下所示之貝努力方程式

$$\frac{dy}{dt} + ay = by^n \tag{18.72}$$

可被轉換爲線性微分方程式

$$\frac{dw}{dt} + (1-n)aw = (1-n)b \tag{18.73}$$

證 （18.72）式除以y^n，

$$y^{-n}\frac{dy}{dt} + ay^{1-n} = b \tag{18.74}$$

令$w = y^{1-n}$取其導數使之能代入（18.74）式，

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dy}\frac{dy}{dt}$$

$$= (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dt} \qquad y^{-n}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1-n}\frac{dw}{dt} \tag{18.75}$$

代（18.75）式且將$w = y^{1-n}$代入（18.74）式，並乘以（$1-n$），

$$\frac{dw}{dt} + (1-n)aw = (1-n)b \qquad \text{證畢。} \tag{18.76}$$

18.49 假設貨幣需求只有交易之動機，因此函數形式爲，

$$M_d = kP(t)Q \tag{18.77}$$

其中k爲常數，P爲物價水準，Q爲實質產出，此外假設$M_s = M$且由貨幣機構外生決定，如果通貨膨脹（inflation）或物價變動率爲財貨之超額需求之比例，並且由**瓦拉斯定律**（Walras' law）知，財貨之超額需求事實上與貨幣之超額供給是一體之兩面，因此

$$\frac{dP(t)}{dt} = b(M_s - M_d) \tag{18.78}$$

現在，求其穩定條件，當實質產出（Q）固定不變。

證 將（18.77）式代入（18.78）式，

$$\frac{dP(t)}{dt} = bM_s - bkP(t)Q \tag{18.79}$$

如果我們令

$$\dot{P} = P(t) - P_e \tag{18.80}$$

其中$\dot{P}$爲與均衡物價水準P_e之差異，然後對（18.80）式取導數，即

$$\frac{d\hat{P}}{dt} = \frac{dP(t)}{dt} - \frac{dP_e}{dt}$$

但是在均衡時，$dP_e/dt = 0$。因此，

$$\frac{d\hat{P}}{dt} = \frac{dP(t)}{dt} \tag{18.81}$$

代入(18.79)式，

$$\frac{d\hat{P}}{dt} = bM_s - bkP(t)Q \tag{18.82}$$

於均衡時，$M_s = M_d = kP_eQ$。因此，$M_s - kP_eQ = 0$ 且 $b(M_s - kP_eQ) = 0$。將(18.82)式減去此式可得，

$$\frac{d\hat{P}}{dt} = bM_s - bkP(t)Q - bM_s + bkP_eQ = -bkQ[P(t) - P_e] = -bkQ\hat{P} \tag{18.83}$$

此爲一微分方程式，分割其變數使之變爲，

$$\frac{d\hat{P}}{\hat{P}} = -bkQ\,dt$$

積分之，則 $\ln \hat{P} = -kbQt + c$，$\hat{P} = Ae^{-bkQt}$，其中 $= e^c = A$。

因爲 b，k，$Q > 0$。故當 $t \to \infty$，$\hat{P} \to 0$，則此體系爲穩定者。爲求得 $P(t)$ 至 $\hat{P}$ 之時徑，請參見問題 18.42 的結論，其中 $Y(t)$ 乃由 $\hat{Y}$ 導出。

18.50 如果預期通貨膨脹爲目前通貨膨脹之正的函數，即

$$\left[\frac{dP(t)}{dt}\right]_E = h\frac{dP(t)}{dt} \tag{18.84}$$

並且對通貨膨脹之預期將減低人們握有貨幣之慾望，故

$$M_d = kP(t)Q - g\left[\frac{dP(t)}{dt}\right]_E \tag{18.85}$$

檢查其穩定條件，在此假設預期通貨膨脹率與超額貨幣供給成比例關係，如(18.78)式所示。

圖 將(18.84)式代入(18.85)式，

$$M_d = kP(t)Q - gh\frac{dP(t)}{dt} \tag{18.86}$$

再將(18.86)式代入(18.78)式，

$$\frac{dP(t)}{dt} = bM_s - b\left[kP(t)Q - gh\frac{dP(t)}{dt}\right]$$

上述步驟再重新由（18.80）式至（18.83）式進行一次，則

$$\frac{d\hat{P}}{dt} = bM_s - bkP(t)Q + bgh\frac{dP(t)}{dt} - bM_s + bkP_eQ = -bkQ\hat{P} + bgh\frac{dP(t)}{dt} \qquad (18.87)$$

將（18.81）式之$dP(t)/dt$代入（18.87）式，

$$\frac{d\hat{P}}{dt} = -bkQ\hat{P} + bgh\frac{d\hat{P}}{dt} = \frac{-bkQ\hat{P}}{1-bgh}$$

分割其變數使之變爲，

$$\frac{d\hat{P}}{\hat{P}} = \frac{-bkQ}{1-bgh}dt$$

積分之可得，$\ln\hat{P} = -bkQt/(1-bgh)$

$$\hat{P} = Ae^{-bkQt/(1-bgh)}$$

因爲b，k，$Q>0$，故當$t\to\infty$，$\hat{P}\to 0$，如果$bgh<1$。因此，即使h大於1，即人們預期通貨膨脹將加遽，此經濟體系不必然不穩定，只要b與g足夠小的話，仍可能爲穩定的情況。

第十九章

差分方程式

19.1 定義與概念

差分方程式（difference equation）代表一依變數與遲延自變數（lagged independent variable）之關係式，此遲延變數乃於斷續之時間區間內發生變動，例如，$I_t = f(Y_{t-1})$ 其中 I 與 Y 均爲每一年年底之數量，一差分方程式之階次決定於遲延期數最大者，例如，一階差分方程式代表遲延一期；二階則表遲延兩期等等，當 t 由 t 變動至 $t+1$ 時期內 y 之變動稱爲 y 之一階差分，可寫成

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \Delta y_t = y_{t+1} - y_t \tag{19.1}$$

其中 Δ 爲取代 d/dt 之一運算子，而 d/dt 乃是被用來測度於微分方程式中之連續變動，一差分方程式之解乃定義每一 t 值下之 y 值，它並不包含差分之表示式。

例題19.1

試指出下列各差分方程式之階次，

$I_t = a(Y_{t-1} - Y_{t-2})$	2 階
$Q_s = a + bP_{t-1}$	1 階
$y_{t+3} - 9y_{t+2} + 2y_{t+1} + 6y_t = 8$	3 階
$\Delta y_t = 5y_t$	1 階

將（19.1）式之 Δy_t 代入上式，可得

$$y_{t+1} - y_t = 5y_t \qquad y_{t+1} = 6y_t \qquad \text{1 階}$$

例題19.2

已知所予之差分方程式中 y 之初始值爲 y_0，

$$y_{t+1} = by_t \tag{19.2}$$

其解例示如下，連續地以 $t = 0, 1, 2, 3$ 等等代入（19.2）式，

$$y_1 = by_0 \qquad y_3 = by_2 = b(b^2y_0) = b^3y_0$$
$$y_2 = by_1 = b(by_0) = b^2y_0 \qquad y_4 = by_3 = b(b^3y_0) = b^4y_0$$

因此，在每一期數 t 中，

$$y_t = b^t y_0$$

此方法稱爲重複法（iterative method），因爲 y_0 爲一常數，故我們應特別注意當 t 變動時 b 用以決定 y 值之角色。

19.2 一階線性差分方程式之一般公式

已知一階差分方程式爲線性（亦即，自變數之次方不超一次或者不包含交叉乘積項者），如

$$y_t = by_{t-1} + a \tag{19.3}$$

其中 b 與 a 均爲常數，則其定解之一般公式爲，

$$y_t = \left(y_0 - \frac{a}{1-b}\right)b^t + \frac{a}{1-b} \qquad \text{當} \quad b \neq 1 \tag{19.4}$$

$$y_t = y_0 + at \qquad \text{當} \quad b = 1 \tag{19.4a}$$

如果其初始條件未知，則任意常數 A 可用來代表（19.14）式之 $[y_0 - a/(1-b)]$ 與代表（19.4a）式之 y_0，此稱爲一般解。

例題 19.3

已知所予差分方程式 $y_t = -7y_{t-1} + 16$ 且 $y_0 = 5$。此方程式中，$b = -7$ 而 $a = 16$。因爲 $b \neq 1$，則使用（19.4）式，可知其解如下：

$$y_t = \left(5 - \frac{16}{1+7}\right)(-7)^t + \frac{16}{1+7} = 3(-7)^t + 2 \tag{19.5}$$

檢查此答案如下，以 $t = 0$ 與 $t = 1$ 分別代入（19.5）式，即

$$y_0 = 3(-7)^0 + 2 = 5 \quad \text{因爲 } (-7)^0 = 1$$
$$y_1 = 3(-7)^1 + 2 = -19$$

將 $y_1 = -19$ 與 $y_0 = 5$ 分別代入原先方程式之 y_t 與 y_{t-1}，則

$$-19 = -7(5) + 16 = -35 + 16$$

19.3 穩定條件

（19.4）式可以一般式表示如下，

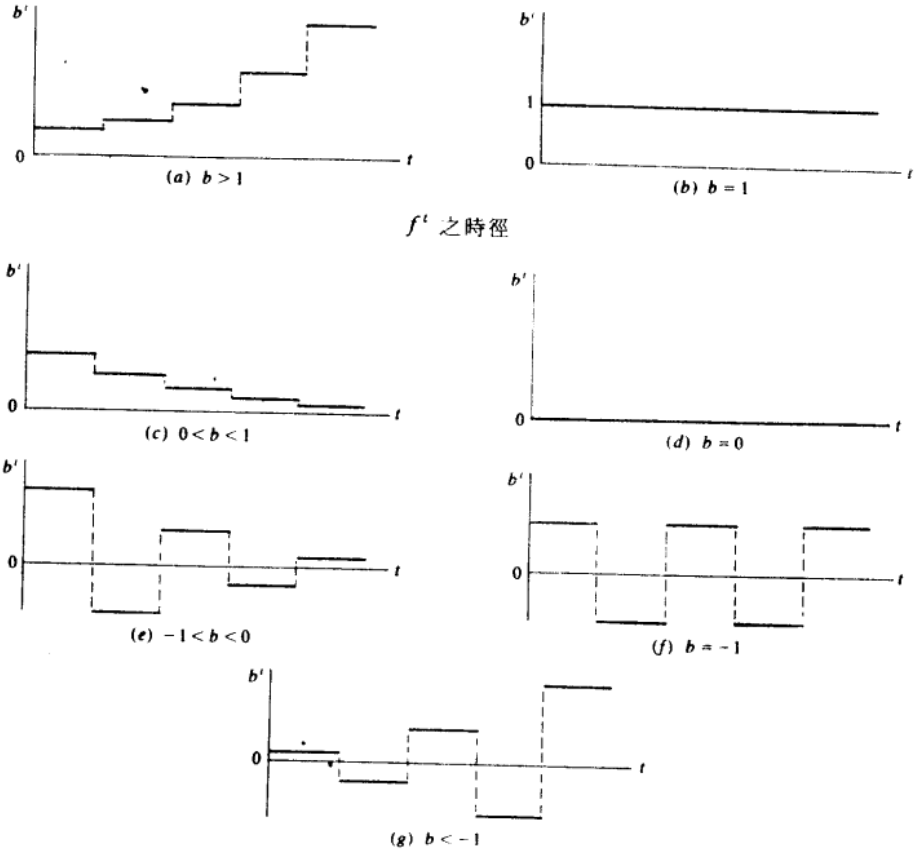
$$y_t = Ab^t + c \tag{19.6}$$

其中 $A = [y_0 - a/(1-b)]$ 而 $c = a/(1-b)$，Ab^t 稱爲輔助函數；c 爲特解。特解乃指 y 之永久均衡水準；而輔助函數則指與均衡水準之差異，因此，當 $t \to \infty$ 時

只有輔助函數 $Ab^t \to \infty$，(19.6)式才將是動態穩定，此動態穩定之條件滿足與否完全視基底 b 而定。若暫時假設 $A = 1$ 與 $c = 0$，則由於 b 值之不同，指數式 b^t 將產生七種不同之時徑，如例 4 所示，亦即，如果 $|b| > 1$，其時徑將爲爆發型(explode)而且將愈來愈遠離均衡值，如果 $|b| < 1$，則時徑將爲收斂型(damped)其值將趨近於均衡。又如果 $b < 0$，時徑將會在正、負間擺動(oscillate)；如果 $b > 0$，其時徑則不會擺動。此外，如果 $A \neq 1$，則常數之值將使 b^t 之量增大(scale up)或縮小(scale down)，但並不致於改變其移動之基本型態，如果 $A = -1$，則對於時徑態勢中一水平線 b^t 成爲兩相對映之趨勢線。最後，如果 $c \neq 0$，則只影響其時徑趨勢圖之縱軸截距，亦即使得縱軸截距上升或下降。

例題 19.4

方程式 $y_t = b^t$，其中 b 之範圍由 $-\infty$ 至 ∞，其七種不同時徑之圖形例示說明如下：



f^t 之時徑

■ 19-1 b^t 之時徑

(1) 如果 $b > 1$，則 t 增加時 b^t 將以遞增之比率增加，因此，將愈來愈遠離圖形上之水平線軸，如圖 19-1 (*a*) 所示者，其爲一階梯函數，在每一個斷續之區間發生變動，而非連續函數，假設 $b = 3$ 則當 t 由 0 增至 4 時 $b^t = 1, 3, 9, 27, 81$。

(2) 如果 $b = 1$，$b^t = 1$（對於每一 t 值），此即如圖 19-1 (*b*) 所示。

(3) 如果 $0 < b < 1$，b 爲正分數（fraction）則當 t 增加時，b^t 遞減，因而愈來愈靠近水平線軸，但 b^t 之值永遠爲正，如圖 19-1 (*c*) 所示，假設 $b = \frac{1}{3}$，則當 t 由 0 增至 4 時，$b^t = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$。

(4) 如果 $b = 0$，則對每一 t 值而言，$b^t = 0$，參見圖 19-1 (*d*)。

(5) 如果 $-1 < b < 0$，b 爲負分數；則當 t 遞增時，b^t 之值爲正、負交錯，並且愈來愈接近橫軸，參見圖 19-1 (*e*)，假設 $b = -\frac{1}{3}$，則當 t 由 0 增至 4 時，$b^t = 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}$。

(6) 如果 $b = -1$，則 b^t 將在 +1 與 −1 間上下擺動，參見圖 19-1 (*f*)。

(7) 如果 $b < -1$，則 b^t 亦將正、負交替擺動，唯愈來愈遠離橫軸，如圖 19-1 (*g*) 所示，假設 $b = -3$ 則當 t 由 0 增至 4 時，$b^t = 1, -3, 9, -27, 81$。

簡言之，如果

$\|b\| > 1$	時徑爲爆發型
$\|b\| < 1$	時徑爲收斂型
$b > 0$	時徑爲非擺動型
$b < 0$	時徑爲擺動型

例題 19.5

方程式 $y_t = 6(-\frac{1}{4})^t + 6$，因爲 $b = -\frac{1}{4} < 0$。故其時徑爲擺動型，又因爲 $|b| < 1$。故其時徑爲收斂型。

當 $y_t = 5(6)^t + 9$ 而 $b = 6 > 0$，故不發生擺動，又由於 $|b| > 1$，故其時徑爲爆發型。

19.4 遲延所得決定模型

於 2.3 節簡單的所得決定模型，並無遲延所得之變數，然而，於此我們假設，消費爲前一期所得之函數，亦即

$$C_t = C_0 + cY_{t-1} \qquad Y_t = C_t + I_t$$

其中 $I_t = I_0$。因此，$Y_t = C_0 + cY_{t-1} + I_0$。重新整理各項使之合於 (19.3) 式，

$$Y_t = cY_{t-1} + C_0 + I_0 \tag{19.7}$$

其中 $b = c$ 且 $a = C_0 + I_0$。代入 (19.4) 式，又因爲邊際消費傾向 C 不等於 1，並假

設當 $t = 0$ 時，$Y_t = Y_0$，則

$$Y_t = \left(Y_0 - \frac{C_0 + I_0}{1 - c}\right)(c)^t + \frac{C_0 + I_0}{1 - c} \tag{19.8}$$

因而時徑之穩定性決定於 c 值，由經濟理論知，$0 < \text{MPC} < 1$，故 $|c| < 1$ 則其時徑爲收斂型，又因 $c > 0$，故不爲擺動型。其均衡爲穩定者，當 $t \to \infty$，$Y_t \to (C_0 + I_0)/(1 - c)$，此乃爲永久之均衡所得水準。

例題 19.6

已知 $Y_t = C_t + I_t$，$C_t = 200 + 0.9Y_{t-1}$，$I_t = 100$，且 $Y_0 = 4500$。試求解 Y_t，

$$Y_t = 200 + 0.9Y_{t-1} + 100 = 0.9Y_{t-1} + 300 \tag{19.9}$$

使用 (19.4) 式可得，

$$Y_t = \left(4500 - \frac{300}{1 - 0.9}\right)(0.9)^t + \frac{300}{1 - 0.9} = 1500(0.9)^t + 3000 \tag{19.10}$$

由於 $|0.9| < 1$，故其時徑收斂；且由於 $0.9 > 0$，故沒有擺動。因此，Y_t 爲動態穩定，當 $t \to \infty$ 則上式右邊第一項爲零，而 Y_t 趨近於永久均衡所得水準：$300/(1 - 0.9) = 3000$。

檢查此答案，首先分別令 (19.1) 式中 $t = 0$ 與 $t = 1$，因此

$$Y_0 = 1500(0.9)^0 + 3000 = 4500$$
$$Y_1 = 1500(0.9)^1 + 3000 = 4350$$

於 (19.9) 式中，以 $Y_1 = 4350$ 代入 Y_t 且以 $Y_0 = 4500$ 代入 Y_{t-1}，

$$4350 - 0.9(4500) = 300$$
$$4350 - 4050 = 300$$

19.5 蛛網模型

有很多產品，諸如農產品，它們從種植後一直到運至市場出售共要一年之時間，故目前所提供之財貨，乃以去年之價格出售，以下對此種情形探討其穩定性之問題。如果

$$Q_{dt} = c + bP_t \qquad \text{與} \qquad Q_{st} = g + hP_{t-1}$$

則均衡時，

$$c + bP_t = g + hP_{t-1} \tag{19.11}$$

$$bP_t = hP_{t-1} + (g - c) \tag{19.12}$$

將（19.12）式除以 b 使之合於（19.3）式，

$$P_t = \frac{h}{b}P_{t-1} + \frac{g-c}{b}$$

因爲 $b < 0$ 且 $h > 0$ 此乃正常之需求與供給函數之情況，$h/b \neq 1$。使用（19.4）式，則

$$\begin{aligned} P_t &= \left[P_0 - \frac{(g-c)/b}{1-(h/b)}\right]\left(\frac{h}{b}\right)^t + \frac{(g-c)/b}{1-(h/b)} \\ &= \left(P_0 - \frac{g-c}{b-h}\right)\left(\frac{h}{b}\right)^t + \frac{g-c}{b-h} \end{aligned} \tag{19.13}$$

當此模型處於均衡時，$P_t = P_{t-1}$。在（19.11）式中，以 P_e 代入 P_t 及 P_{t-1}，則

$$P_e = \frac{g-c}{b-h} \tag{19.13a}$$

代入（19.13）式可得，

$$P_t = (P_0 - P_e)(h/b)^t + P_e$$

由於在正常的供給與需求函數下，$b < 0$ 且 $h > 0$，因此 $h/b < 0$ 故其時徑爲擺動型。其中

若 $|h| > |b|$，$|h/b| > 1$，P_t 時徑爲爆發性。

若 $|h| = |b|$，$h/b = -1$，時徑爲單式擺動型。

若 $|h| < |b|$，$|h/b| < 1$，其時徑收斂，且 P_t 將趨近於 P_e。

簡言之，穩定性條件是供給曲線必較需求曲線平坦。

例題 19.7

已知 $Q_{dt} = 86 - 0.8P_t$ 且 $Q_{dt} = -10 + 0.2P_{t-1}$，則任一時期之市場價格 P_t 與均衡價格之求解例示如下：首先由供需相等可知，

$$86 - 0.8P_t = -10 + 0.2P_{t-1} \qquad -0.8P_t = 0.2P_{t-1} - 96$$

上式除以 -0.8 使之合於（19.3）式，$P_t = -0.25P_{t-1} + 120$。使用（19.4）式，

$$P_t = \left(P_0 - \frac{120}{1+0.25}\right)(-0.25)^t + \frac{120}{1+0.25} = (P_0 - 96)(-0.25)^t + 96$$

我們可將適當值代入（19.13）式以檢查此答案是否正確，由（19.13a）式知，$P_e = (-10-86)/(-0.8-0.2) = (-96)/(-1) = 96$。

由於基底 $b = -0.25$ ，即 b 爲負數且小於 1 ，故 P_t 之時徑爲擺動收斂型，而均衡價格爲穩定者，即當 $t \to \infty$ 時 P_t 將收斂於 $P_e = 96$ 。

19.6 哈樂得模型

哈樂得模型(Harrod Model)乃試圖解釋經濟體系中成長之動態學，此模型假設

$$S_t = sY_t$$

其中 s 等於MPS且APS爲一常數。同時此模型亦假設存在**加速原理**(acceleration principle)，亦即，投資與在時間之經過中所得變動率成比例關係，即

$$I_t = a(Y_t - Y_{t-1})$$

其中 a 等於邊際與平均資本－產出率亦爲一常數，則在均衡時，$I_t = S_t$ ，因此，

$$a(Y_t - Y_{t-1}) = sY_t \qquad (a-s)Y_t = aY_{t-1}$$

上式除以 $(a-s)$ 使之合於(19.3)式，$Y_t = [a/(a-s)]Y_{t-1}$ 。使用(19.4)式，又因爲 $a/(a-s) \neq 1$ ，故

$$Y_t = (Y_0 - 0)\left(\frac{a}{a-s}\right)^t + 0 = \left(\frac{a}{a-s}\right)^t Y_0 \tag{19.14}$$

因而 Y_t 時徑之穩定性決定於 $a/(a-s)$ ，因爲 a ＝資本－產出率，正常情況下 $a > 1$ ，又因爲 s ＝ MPS ，一般而言，$0 < s < 1$ ，故基底 $a/(a-s)$ 一般而言將大於 0 且大於 1 ，因此，Y_t 爲爆發型但非擺動型，因而所得將無限擴張，亦即，沒有界限。

例題19.8

Harrod模型之保證成長率(warranted rate of growth)（即，經濟體系中 Y_t 之時徑必定位於存在於每年儲蓄與投資之均衡上），求解，例示如下：

由(19.14)式知，Y_t 將無限增加，第一期之所得爲 $a/(a-s)$ 乘以前一期之所得，即

$$Y_1 = \left(\frac{a}{a-s}\right)Y_0 \tag{19.15}$$

各期間之成長率(G)定義爲

$$G = \frac{Y_1 - Y_0}{Y_0}$$

由(19.15)式代入上式，則

$$G = \frac{[a/(a-s)]Y_0 - Y_0}{Y_0} = \frac{[a/(a-s)-1]Y_0}{Y_0}$$
$$= \frac{a}{a-s} - 1 = \frac{a}{a-s} - \frac{a-s}{a-s} = \frac{s}{a-s}$$

因此，其保證成長率爲，

$$G_w = \frac{s}{a-s} \qquad (19.16)$$

例題19.9

假設於上述哈樂得模型中邊際儲蓄傾向爲0.12而資本－產出率爲2.12，則由(19.14)式求Y_t如下，

$$Y_t = \left[\frac{2.12}{2.12-0.12}\right]^t Y_0 = (1.06)^t Y_0$$

由(19.16)式知其保證成長率爲，

$$G_w = \frac{0.12}{2.12-0.12} = \frac{0.12}{2} = 0.06$$

習題與解答

使用一般公式求解一階線性差分方程式

19.1 (*a*)求解下列所予之差分方程式，(*b*)利用$t=0$與$t=1$時檢查你的答案，(*c*)試評論所求得時徑之性質。

$$y_t = 6y_{t-1}$$

圖 (*a*)在此$b=6$與$a=0$。使用(19.4)式可知，但$b \neq 1$，

$$y_t = (y_0 - 0)(6)^t + 0 = y_0(6)^t = A(6)^t \qquad (19.17)$$

其中A爲一般經常使用的不特定常數，在此乃用來取代y_0，

(*b*)估算$t=0$，$t=1$之(19.17)式，

$$y_0 = A(6)^0 = A \qquad y_1 = A(6) = 6A$$

以$y_0 = A$代入y_{t-1}並以$y_1 = 6A$代入y_t，因而可知$6A = 6(A)$。

(*c*)由於基底$b=6$其爲正且大於1，亦即，$b>0$且$|b|>1$，故其時徑爲非擺動之爆發型。

19.2 已知 $y_t = \frac{1}{8}\, y_{t-1}$ ，試重新作問題 19.1 。

圖 (*a*) 使用（19.4）式，則

$$y_t = (y_0 - 0)(\tfrac{1}{8})^t + 0 = y_0(\tfrac{1}{8})^t = A(\tfrac{1}{8})^t$$

(*b*) 當 $t = 0$ ，$y_0 = A(\frac{1}{8})^0 = A$ 。當 $t = 1$ ，$y_1 = A(\frac{1}{8}) = \frac{1}{8}A$ 。以 $y_0 = A$ 代入 y_{t-1} 並以 $y_1 = \frac{1}{8}A$ ，代入 y_t ，則 $\frac{1}{8}A = \frac{1}{8}(A)$ 。

(*c*) 由於 $b = \frac{1}{8}$ ，$b > 0$ 且 $|b| < 1$ 。故其時徑爲非擺動之收斂型。

19.3 已知 $y_t = -\frac{1}{4}y_{t-1} + 60$ 且 $y_0 = 8$ ，試重新作問題 19.1 。

圖 (*a*)
$$y_t = \left(8 - \frac{60}{1 + 1/4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^t + \frac{60}{1 + 1/4} = -40(-\tfrac{1}{4})^t + 48$$

(*b*) 當 $t = 0$ ，$y_0 = -40(-\frac{1}{4})^0 + 48 = 8$ 。當 $t = 1$ ，$y_1 = -40(-\frac{1}{4}) + 48 = 58$ 。代入原先之方程式，可知 $58 = -\frac{1}{4}(8) + 60 = 58$ 。

(*c*) 由於 $b = -\frac{1}{4}$ ，$b < 0$ 且 $|b| < 1$ 。其時徑爲擺動收斂型。

19.4 已知 $x_t + 3x_{t-1} + 8 = 0$ 且 $x_0 = 16$ ，試重新作問題 19.1 。

圖 (*a*) 重新整理各項，使之合於（19.3）式，

$$x_t = -3x_{t-1} - 8$$

因此，$b = -3$ 與 $a = -8$ 。代入（19.4）式，

$$x_t = \left(16 + \frac{8}{1+3}\right)(-3)^t - \frac{8}{1+3} = 18(-3)^t - 2$$

(*b*) 當 $t = 0$ ，$x_0 = 18(-3)^0 - 2 = 16$ 。當 $t = 1$ ，$x_1 = 18(-3) - 2 = -56$ 。代入原先之方程式，可知 $-56 + 3(16) + 8 = 0$ 。

(*c*) 由於 $b = -3$ ，$b < 0$ 且 $|b| > 1$ 。其時徑爲擺動爆發型。

19.5 已知 $y_t - y_{t-1} = 17$ ，試重新作問題 19.1 。

圖 (*a*) 重新整理之，$y_t = y_{t-1} + 17$ 。在此，$b = 1$ ，使用（19.4）式，因此，$y_t = y_0 + 17t = A + 17t$ 。

(*b*) 當 $t = 0$ ，$y_0 = A$ ，當 $t = 1$ ，$y_t = A + 17$ 。代入原先之方程式，可得，$(A + 17) - (A) = 17$ 。

(*c*) 在此，$b = 1$ 故 $b > 0$ 而 y_t 將不致於上下擺動，但由於 $|b| = 1$ ，$1 \not< |b| \not< 1$ ，此乃爲一特例，又由於 $a \neq 0$ ，故除非 $y_0 = A = 0$ ，其時徑爲發散（divergent），因爲其輔助函數 A 在 $t \to \infty$ 時不會趨近於 0 ，因此，y_t 趨近於 $A + at$ ，但 at 並非其特解。關於 $b = 1$ 且 $a = 0$ 之情況，請參閱問題 19.17 。

19.6 已知 $g_t = g_{t-1} - 25$ 且 $g_0 = 40$ ，試重新作問題 19.1 。

圖 (*a*) 使用 (19.4*a*) 式，則 $g_t = 40 - 25t$ 。

(*b*) 當 $t = 0$ ，$g_0 = 40$ 。當 $t = 1$ ，$g_1 = 15$ 。代入原先之方程式 ，可得 $15 = 40 - 25$ 。

(*c*) 由於 $b = 1$ ，$a \neq 0$ 而 $A = g_0 \neq 0$ ，其時徑爲非擺動之發散型。

19.7 已知 $2y_t = y_{t-1} - 18$ ，試重新作問題 19.1 。

圖 (*a*) 上式除以 2 使之合於 (19.3) 式，然後使用 (19.4) 式可得。

$$y_t = \tfrac{1}{2}y_{t-1} - 9 = \left(y_0 + \frac{9}{1-1/2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^t - \frac{9}{1-1/2} = A\left(\frac{1}{2}\right)^t - 18$$

其中 A 爲一任意常數，在此 A 等於 ($y_0 + 18$) 。

(*b*) 當 $t = 0$ ，$y_0 = A - 18$ 。當 $t = 1$ ，$y_1 = \frac{1}{2}A - 18$ 。代入原先之方程式，可得 $2(\frac{1}{2}A - 18) = (A - 18) - 18$; $A - 36 = A - 36$ 。

(*c*) 由於 $b = \frac{1}{2}$ ，$b > 0$ 則 $|b| < 1$ 。故 y_t 爲非擺動之收斂型。

19.8 (*a*) 求解下列差分方程式。(*b*) 使用 $t = 0$ 與 $t = 1$ 之時點，檢查你的答案，(*c*) 試評論所求得時徑之性質。

$$5y_t + 2y_{t-1} - 140 = 0 \qquad y_0 = 30$$

圖 (*a*) 上式除以 5 ，並重新整理各項，然後使用 (19.4) 式可得，

$$y_t = -0.4y_{t-1} + 28 = \left(30 - \frac{28}{1+0.4}\right)(-0.4)^t + \frac{28}{1+0.4} = 10(-0.4)^t + 20$$

(*b*) 當 $t = 0$ ，$y_0 = 30$ 。當 $t = 1$ ，$y_1 = 16$ 。代入原先之方程式，則 $5(16) + 2(30) - 140 = 0$ 。

(*c*) 由於 $b = -0.4$ ，$b < 0$ 且 $|b| < 1$ 。故 y_t 爲擺動之收斂型。

19.9 已知 $x_{t-1} = 4x_t - 36$ ，試重新作問題 19.8 。

圖 (*a*) 將期數往回挪一期，使之合於 (19.3) 式，即 $x_1 = 4x_{t-1} - 36$ 。使用 (19.4) 式，並如問題 19.7 者以 A 取代 $[x - a/(1-b)]$ 。

$$x_t = A(4)^t - 36/(1-4) = A(4)^t + 12$$

(*b*) 當 $t = 0$ ，$x_0 = A + 12$ ，當 $t = 1$ ，$x_1 = 4A + 12$ ， 於原先之方程式中以 $x_1 = 4A + 12$ 代 x_{t+1} 且以 $x_0 = A + 12$ 代入 x_t ，則 $4A + 12 = 4(A + 12) - 36$; $4A + 12 = 4A + 12$ 。

(*c*) 由於 $b = 4$ ，$b > 0$ 故 $|b| > 1$ ，x_t 爲非擺動之爆發型。

19.10 已知 $y_{t+2} + 2y_{t+1} + 57 = 0$ 且 $y_0 = 11$ ，試重新作問題 19.8 。

圖 (*a*) 將期數往後挪 5 期，並重新整理各項，然後再使用 (19.4) 式，可得

$$y_t = -2y_{t-1} - 57 = \left(11 + \frac{57}{1+2}\right)(-2)^t - \frac{57}{1+2} = 30(-2)^t - 19$$

(*b*) 當 $t = 0$ ，$y_0 = 11$ 。當 $t = 1$ ，$y_1 = -79$ ，於原先之方程式中 ，以 y_1

代入 y_{t+2} 且以 y_0 代入 y_{t+1} ，則 $-79+2(11)+57=0$ 。

(c) 由於 $b=-2$ ，$b<0$ 故 $|b|>1$ 。y_t 爲擺動之爆發型。

19.11 已知 $8y_{t-2}-2y_{t-3}=120$ 且 $y_0=28$ ，試重新作問題 19.8 。

圖 (a) 上式除以 8 ，並將期數往前挪 2 期，再重新整理各項，

$$y_t=\frac{1}{4}y_{t-1}+15=\left(28-\frac{15}{1-1/4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^t+\frac{15}{1-1/4}=8\left(\frac{1}{4}\right)^t+20$$

(b) 當 $t=0$ ，$y_0=28$ 。當 $t=1$ ，$y_1=22$ 。以 y_1 代入 y_{t-2} ，y_0 代入 y_{t-3} 。

$$8(22)-2(28)=120;\quad 120=120$$

(c) 由於 $b=\frac{1}{4}$ ，$b>0$ 則 $|b|<1$ 。y_t 爲非擺動之收斂型。

19.12 已知 $\Delta g_t=14$ ，重新作問題 19.8 。

圖 (a) 以 (19.1) 式代替 Δg_t 。

$$g_{t+1}-g_t=14 \tag{19.18}$$

將期數往回挪一期，並整理各項

$$g_t=g_{t-1}+14$$

使用 (19.4a) 則，$g_t=g_0+14t=A+14t$ 。

(b) 當 $t=0$ ，$g_0=A$ 。當 $t=1$ ，$g_1=A+14$ 。於 (9.18) 式中，以 g_1 代入 g_{t+1} ，g_0 代入 g_t ，則 $(A+14)=(A)+14$ 。

(c) 由於 $b=1$ ，g_t 爲非擺動型，如果 $A\neq 0$ ，則 g_t 同時爲發散。

19.13 已知 $\Delta y_t=y_t+13$ 且 $y_0=45$ ，試重新作問題 19.8 。

圖 (a) 以 (19.1) 式代入，並將期數往回挪一期，再重新整理各項，則

$$y_t=2y_{t-1}+13 \tag{19.19}$$

使用 (19.4) 式，可知 $y_t=\left(45-\frac{13}{1-2}\right)(2)^t+\frac{13}{1-2}=58(2)^t-13$

(b) 當 $t=0$ ，$y_0=45$ ，當 $t=1$ ，$y_1=103$ 。代入 (19.19) 式，則 $103=2(45)+13$ ；$103=103$ 。

(c) 由於 $b=2$ ，$b>0$ 故 $|b|>1$ 。y_t 爲非擺動之爆發型。

遲延所得決定模型

19.14 已知所予資料如下所示，(a) 求國民所得之時徑 Y_t ，(b) 使用 $t=0$ 與 $t=1$ 之時點檢查你的答案，(c) 試評論所求得時徑之穩定性。

$$C_t = 90 + 0.8\,Y_{t-1} \qquad I_t = 50 \qquad Y_0 = 1200$$

圖 (*a*) 於均衡時，$Y_t = C_t + I_t$ 。因此，

$$Y_t = 90 + 0.8\,Y_{t-1} + 50 = 0.8\,Y_{t-1} + 140 \tag{19.20}$$

使用(19.4)式，則 $Y_t = \left(1200 - \frac{140}{1-0.8}\right)(0.8)^t + \frac{140}{1-0.8} = 500(0.8)^t + 700$

(*b*) $Y_0 = 1200$ ；$Y_1 = 1100$ 。代入（19.20）式，

$$1100 = 0.8(1200) + 140; \quad 1100 = 1100$$

(*c*) 由於 $b = 0.8$ ，$b > 0$ 則 $|b| < 1$ ，故時徑 Y_t 爲非擺動之收斂型，亦即，Y_t 將收斂於均衡所得水準 700 。

19.15 已知 $C_t = 200 + 0.75\,Y_{t-1}$ ，$I_t = 50 + 0.15\,Y_{t-1}$ ，且 $Y_0 = 3000$ ，試重作問題19.14。

圖 (*a*)

$$Y_t = 200 + 0.75\,Y_{t-1} + 50 + 0.15\,Y_{t-1} = 0.9\,Y_{t-1} + 250$$

使用（19.4）式可得，$Y_t = \left(3000 - \frac{250}{1-0.9}\right)(0.9)^t + \frac{250}{1-0.9} = 500(0.9)^t + 2500$

(*b*) $Y_0 = 3000$ ；$Y_1 = 2950$ 。代入上式，$2950 = 0.9(3000) + 250$ ；$2950 = 2950$ 。

(*c*) 由於 $b = 0.9$ 。時徑 Y_t 爲非擺動之收斂型，即 Y_t 收斂於 2500 。

19.16 已知 $C_t = 300 + 0.87\,Y_{t-1}$ ，$I_t = 150 + 0.13\,Y_{t-1}$ ，且 $Y_0 = 6000$ ，重作問題 19.14。

圖 (*a*)

$$Y_t = 300 + 0.87\,Y_{t-1} + 150 + 0.13\,Y_{t-1} = Y_{t-1} + 450 \tag{19.21}$$

使用（19.4*a*）式可得，$Y_t = 6000 + 450t$ 。

(*b*) $Y_0 = 6000$ ；$Y_1 = 6450$ 。代入（19.21）式，$6450 = 6000 + 450$ 。

(*c*) 由於 $b = 1$ 且 $A \neq 0$ ，時徑 Y_t 爲非擺動之發散型，參見問題 19.5 。

19.17 已知 $C_t = 0.92\,Y_{t-1}$ ，$I_t = 0.08\,Y_{t-1}$ ，且 $Y_0 = 4000$ ，試重作問題 19.14 。

圖 (*a*)

$$Y_t = 0.92\,Y_{t-1} + 0.08\,Y_{t-1} = Y_{t-1}$$

使用（19.4*a*）式可得，$Y_t = 4000 + 0 = 4000$ 。

(*b*)

$$Y_0 = 4000 = Y_t$$

(*c*) 當 $b = 1$ 與 $a = 0$ ，Y_t 爲穩定之時徑。

19.18 已知 $C_t = 400 + 0.6\,Y_t + 0.35\,Y_{t-1}$ ，$I_t = 240 + 0.15\,Y_{t-1}$ ，且 $Y_0 = 7000$ ，重作問題 19.14 。

圖 (*a*) $Y_t = 400 + 0.6\,Y_t + 0.35\,Y_{t-1} + 240 + 0.15\,Y_{t-1}$ $\qquad 0.4\,Y_t = 0.5\,Y_{t-1} + 640$

上式除以0.4，然後使用（19.4）式，則

$$Y_t = 1.25\,Y_{t-1} + 1600 = \left(7000 - \frac{1600}{1-1.25}\right)(1.25)^t + \frac{1600}{1-1.25} = 13{,}400(1.25)^t - 6400$$

(*b*) $Y = 7000$；$Y_1 = 10{,}350$。代入原先之方程式，

$$10{,}350 = 400 + 0.6(10{,}350) + 0.35(7000) + 240 + 0.15(7000) = 10{,}350$$

(*c*) 由於 $b = 1.25$，時徑 Y_t 爲非擺動之爆發型。

19.19 已知 $C_t = 300 + 0.5\,Y_t + 0.4\,Y_{t-1}$，$I_t = 200 + 0.2\,Y_{t-1}$，且 $Y_0 = 6500$，重作問題19.14。

圖 (*a*) $Y_t = 300 + 0.5\,Y_t + 0.4\,Y_{t-1} + 200 + 0.2\,Y_{t-1}$ $\qquad 0.5\,Y_t = 0.6\,Y_{t-1} + 500$

上式除以0.5，然後再使用（19.4）式可得，

$$Y_t = 1.2\,Y_{t-1} + 1000 = \left(6500 - \frac{1000}{1-1.2}\right)(1.2)^t + \frac{1000}{1-1.2} = 11{,}500(1.2)^t - 5000$$

(*b*) $Y_0 = 6500$；$Y_t = 8800$。代入原式。

$$8800 = 300 + 0.5(8800) + 0.4(6500) + 200 + 0.2(6500) = 8800$$

(*c*) 由於 $b = 1.2$，Y_t 爲非擺動之爆發型。

19.20 已知 $C_t = 200 + 0.5\,Y_t$，$I_t = 3(Y_t - Y_{t-1})$，且 $Y_0 = 10{,}000$，重作問題19.14。

圖 (*a*) $Y_t = 200 + 0.5\,Y_t + 3(Y_t - Y_{t-1})$ $\qquad -2.5\,Y_t = -3\,Y_{t-1} + 200$

上式除以－2.5，再使用（19.4）式，可得

$$Y_t = 1.2\,Y_{t-1} - 80 = \left(10{,}000 + \frac{80}{1-1.2}\right)(1.2)^t - \frac{80}{1-1.2} = 9600(1.2)^t + 400$$

(*b*) $Y_0 = 10{,}000$；$Y_1 = 11{,}920$。代入原式。

$$11{,}920 = 200 + 0.5(11{,}920) + 3(11{,}920 - 10{,}000) = 11{,}920$$

(*c*) 由於 $b = 1.2$，時徑 Y_t 爲非擺動之爆發型。

蛛網模型

19.21 已知所予資料如下，試求 (*a*) 任意時期之市場價格 P_t，(*b*) 均衡價格 P_e 與 (*c*) 時徑之穩定性。

$$Q_{dt} = 180 - 0.75\,P_t \qquad Q_{st} = -30 + 0.3\,P_{t-1} \qquad P_0 = 220$$

圖 (*a*) 供、需相等，則

$$180 - 0.75P_t = -30 + 0.3P_{t-1} \qquad (19.21)$$
$$-0.75P_t = 0.3P_{t-1} - 210$$

上式除以 -0.75，再使用（19.4）式，可得

$$P_t = -0.4P_{t-1} + 280 = \left(220 - \frac{280}{1+0.4}\right)(-0.4)^t + \frac{280}{1+0.4} = 20(-0.4)^t + 200 \qquad (19.22)$$

(*b*) 如果市場處於均衡，則 $P_t = P_{t-1}$。於（19.21）中，以 P_e 取代 P_t 與 P_{t-1}

$$180 - 0.75P_e = -30 + 0.3P_e \qquad P_e = 200$$

此即爲（19.22）式右邊之第二項。

(*c*) 由於 $b = -0.4$，P_t 時徑將爲擺動之收斂型。

19.22 使用 $t = 0$ 與 $t = 1$ 之時點，檢查問題 19.21(*a*) 之答案。

解 由（19.22）式知，$P_0 = 20(-0.4)^0 + 200 = 220$ 與 $P_1 = 20(-0.4) + 200 = 192$。於（19.21）式中，以 P_1 代替 P_t，且以 P_0 代替 P_{t-1}，則

$$180 - 0.75(192) = -30 + 0.3(220)$$
$$36 = 36$$

19.23 已知 $Q_{dt} = 160 - 0.8P_t$，$Q_{st} = -20 + 0.4P_{t-1}$，且 $P_0 = 153$，重作問題 19.21。

解 (*a*)
$$160 - 0.8P_t = -20 + 0.4P_{t-1} \qquad (19.23)$$
$$-0.8P_t = 0.4P_{t-1} - 180$$

上式除以 -0.8，再使用（19.4）式，可得

$$P_t = -0.5P_{t-1} + 225 = \left(153 - \frac{225}{1+0.5}\right)(-0.5)^t + \frac{225}{1+0.5} = 3(-0.5)^t + 150 \qquad (19.24)$$

(*b*) 正如問題 19.21(*b*) 所示者，$P_e = 150$。亦請參見 19.5 節。

(*c*) 由於 $b = -0.5$，P_t 爲擺動之收斂型，且其值將趨近於 150。

19.24 使用 $t = 0$ 與 $t = 1$ 之時點檢查問題 19.23(*a*) 之答案。

解 由（19.24）式知，$P_0 = 3(-0.5)^0 + 150 = 153$ 與 $P_1 = 3(-0.5) + 150 = 148.5$ 代入（19.23）式，則

$$160 - 0.8(148.5) = -20 + 0.4(153)$$
$$41.2 = 41.2$$

19.25 已知 $Q_{dt} = 220 - 0.4P_t$，$Q_{st} = -30 + 0.6P_{t-1}$，且 $P_0 = 254$，試重作問題 19.21。

解 (*a*)
$$220 - 0.4P_t = -30 + 0.6P_{t-1}$$
$$-0.4P_t = 0.6P_{t-1} - 250$$

上式除以 -0.4，然後使用（19.4）式，可得

$$P_t = -1.5P_{t-1} + 625 = \left(254 - \frac{625}{1+1.5}\right)(-1.5)^t + \frac{625}{1+1.5} = 4(-1.5)^t + 250$$

(*b*) $$P_t = 250$$

(*c*) 由於 $b = -1.5$，P_t 爲擺動之爆發型。

哈樂得成長模型

19.26 已知所予資料如下，試求 (*a*) 任一期之所得水準 Y_t 與 (*b*) 保證成長率。

$$I_t = 2.66(Y_t - Y_{t-1}) \qquad S_t = 0.16\,Y_t \qquad Y_0 = 9000$$

(*a*) 於均衡時，

$$2.66(Y_t - Y_{t-1}) = 0.16\,Y_t \qquad 2.5\,Y_t = 2.66\,Y_{t-1}$$

上式除以 2.5，然後使用（19.4）式，可得

$$Y_t = 1.064\,Y_{t-1} = (9000 - 0)(1.064)^t + 0 = 9000(1.064)^t$$

(*b*) 由（19.6）式知，$G_w = 0.16/(2.66 - 0.16) = 0.064$。

19.27 已知 $I_t = 4.2(Y_t - Y_{t-1})$，$S_t = 0.2\,Y_t$，且 $Y_0 = 5600$，試重作問題 19.26。

圖 (*a*)

$$4.2(Y_t - Y_{t-1}) = 0.2\,Y_t$$
$$4Y_t = 4.2\,Y_{t-1}$$
$$Y_t = 1.05\,Y_{t-1}$$

使用（19.4）式可得，$Y_t = 5600(1.05)^t$，

(*b*) $$G_w = \frac{0.2}{4.2 - 0.2} = 0.05$$

其它經濟學上之應用

19.28 若一筆初始貨幣金額 P_0，存款利率爲 i，計息方式爲每年複利法，試導出 t 年之 P_t 值公式。

圖 當利息以每年複利計算時，

$$P_{t-1} = P_t + iP_t = (1+i)P_t$$

將上式期數往回挪一期，使之合於（19.3）式，

$$P_t = (1+i)P_{t-1}$$

使用 (19.4) 式，其中因爲 $i \neq 0$，故

$$P_t = (P_0 + 0)(1+i)^t + 0 = P_0(1+i)^t$$

19.29 假設 $Q_{dt} = c + zP_t$，$Q_{st} = g + hP_t$，且

$$P_{t+1} = P_t - a(Q_{st} - Q_{dt}) \tag{19.25}$$

亦即，價格不再由市場機能決定，而是視存貨水準（$Q_{st} > Q_{dt}$）決定，另外，假設 $a > 0$，因爲存貨增加，即（$Q_{st} > Q_{dt}$），將使價格降低，反之，當存貨減少，即（$Q_{st} < Q_{dt}$），則價格將上升，(*a*) 求每一期之價格 P_t，(*b*) 試評論其時徑之穩定條件。

圖 (*a*) 將 Q_{st} 與 Q_{dt} 代入（19.25）式，則

$$\begin{aligned} P_{t+1} &= P_t - a(g + hP_t - c - zP_t) \\ &= [1 - a(h - z)]P_t - a(g - c) = [1 + a(z - h)]P_t - a(g - c) \end{aligned}$$

將上式之期數往回挪一期，使之合於（19.3）式，再使用（19.4）式可得，

$$\begin{aligned} P_t &= \left[P_0 + \frac{a(g-c)}{1-[1+a(z-h)]}\right][1+a(z-h)]^t - \frac{a(g-c)}{1-[1+a(z-h)]} \\ &= \left(P_0 - \frac{g-c}{z-h}\right)[1+a(z-h)]^t + \frac{g-c}{z-h} \end{aligned} \tag{19.26}$$

如（19.13*a*）者代入之，$P_t = (P_0 - P_r)[1 + a(z - h)]^t + P_r$ (19.27)

(*b*) 故其時徑之穩定性乃決定於 $b = 1 + a(z - h)$，其中因爲 $a > 0$ 且在正常的情況下，$z < 0$ 與 $h > 0$，$a(z - h) < 0$。因此，

若 $0 < |a(z-h)| < 1$，$0 < b < 1$，P_t 爲非擺動之收斂型。
若 $a(z-h) = -1$，$b = 0$。P_t 維持在均衡上（$P_t = P_0$）。
若 $-2 < a(z-h) < -1$，$-1 < b < 0$。P_t 爲擺動之收斂型。
若 $a(z-h) = -2$，$b = -1$。P_t 爲單式擺動型。
若 $a(z-h) < -2$，$b < -1$。P_t 爲擺動之爆發型。

19.30 已知所予資料如下，(*a*) 求任一期之價格 P_t，(*b*) 使用 $t = 0$ 與 $t = 1$ 之時點檢查你的答案，與 (*c*) 評論其穩定條件。

$$Q_{dt} = 120 - 0.5P_t \qquad Q_{st} = -30 + 0.3P_t \qquad P_{t+1} = P_t - 0.2(Q_{st} - Q_{dt}) \qquad P_0 = 200$$

圖 (*a*) 代入之，$P_{t+1} = P_t - 0.2(-30 + 0.3P_t - 120 + 0.5P_t) = 0.84P_t + 30$

將上式往回挪一期並使用（19.4）式，則可得

$$P_t = 0.84P_{t-1} + 30 = \left(200 - \frac{30}{1-0.84}\right)(0.84)^t + \frac{30}{1-0.84} = 12.5(0.84)^t + 187.5$$

(*b*) $P_0 = 200$；$P_1 = 198$。代入解第一個方程式，則 $198 = 200 - 0.2[-30 + 0.3(200) - 120 + 0.5(200)] = 198$。

(*c*) 由於 $b = 0.84$，P_t 爲非擺動之收斂型，且其值將趨近於 187.5。

第二十章

二階微分與差分方程式

20.1 二階微分方程式

二階微分方程式之解可分爲輔助函數 y_c 與特解 y_p 二種，而一般解則爲此二種解之加總：即 $y(t) = y_c + y_p$，若已知所予之二階線性微分方程式爲

$$y''(t) + b_1 y'(t) + b_2 y(t) = a \tag{20.1}$$

其中 b_1，b_2 與 a 均爲常數，其特解爲

$$y_p = \frac{a}{b_2} \qquad b_2 \neq 0 \tag{20.2}$$

$$y_p = \frac{a}{b_1} t \qquad b_2 = 0 \quad b_1 \neq 0 \tag{20.2a}$$

$$y_p = \frac{a}{2} t^2 \qquad b_1 = b_2 = 0 \tag{20.2b}$$

而輔助函數爲，

$$y_c = y_1 + y_2 \tag{20.3}$$

其中

$$y_1 = A_1 e^{r_1 t} \tag{20.3a}$$

$$y_2 = A_2 e^{r_2 t} \tag{20.3b}$$

且

$$r_1, r_2 = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2} \tag{20.4}$$

在此，A_1，A_2 均爲任意常數，而 $b_1^2 \neq 4b_2$。r_1 與 r_2 稱爲**特性根**（characteristic roots），而 (20.4) 式爲特性或補助方程式：$r^2 + b_1 r + b_2$ 之解。

例題20.1

下列諸方程式之特解例示如下：

(1) $y''(t) - 5y'(t) + 4y(t) = 2$　　(2) $y''(t) + 3y'(t) = 12$　　(3) $y''(t) = 16$

(1)使用 (20.2) 式，　$y_p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$　(20.5)

(2)使用 (20.2a) 式，　$y_p = \frac{12}{3} t = 4t$　(20.5a)

(3)使用 (20.2b) 式，　$y_p = \frac{16}{2} t^2 = 8t^2$　(20.5b)

例題20.2

於例 1 中方程式(2)與(3)之輔助函數計算例示如下，而方程式(3)將於例 9 討論。

(1)由(20.4)式知，

$$r_1, r_2 = \frac{+5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(4)}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = 1, 4$$

代入(20.3a)與(20.3b)，及(20.3)等式可得，

$$y_c = A_1 e^{t} + A_2 e^{4t} \tag{20.6}$$

方程式(2)，

$$r_1, r_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(0)}}{2} = \frac{-3 \pm 3}{2} = 0, -3$$

因此，

$$y_c = A_1 e^{0} + A_2 e^{-3t} = A_1 + A_2 e^{-3t} \tag{20.6a}$$

例題20.3

一微分方程式之一般解包含輔助函數與特解（參見 18.2 節），亦即，$y(t) = y_c + y_p$，將此應用至例 1 之方程式，則

(1)由(20.6)與(20.5)式知，$y(t) = A_1 e^{t} + A_2 e^{4t} + \frac{1}{2}$ (20.7)

(2)由(20.6a)與(20.5a)式知，$y(t) = A_1 + A_2 e^{-3t} + 4t$ (20.7a)

例題20.4

於例 3 中方程式(1)之定解計算如下。假設 $y(0) = 5\frac{1}{2}$ 且 $y'(0) = 11$。

由(20.7)式知，

$$y(t) = A_1 e^{t} + A_2 e^{4t} + \frac{1}{2} \tag{20.8}$$

因此，

$$y'(t) = A_1 e^{t} + 4A_2 e^{4t} \tag{20.8a}$$

計算 $t = 0$ 時(20.8)與(20.8a)式，並令 $y(0) = 5\frac{1}{2}$ 且 $y'(0) = 11$ 則由原式知

$$y(0) = A_1 e^{0} + A_2 e^{4(0)} + \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2} \quad \text{因此} \quad A_1 + A_2 = 5$$
$$y'(0) = A_1 e^{0} + 4A_2 e^{4(0)} = 11 \quad \text{因此} \quad A_1 + 4A_2 = 11$$

求其聯立解，則 $A_1 = 3$ 與 $A_2 = 2$。代入(20.7)式，

$$y(t) = 3e^{t} + 2e^{4t} + \frac{1}{2} \tag{20.9}$$

檢查此答案，首先由(20.9)式知，

$$y(t) = 3e^{t} + 2e^{4t} + \frac{1}{2}$$

因此，

$$y'(t) = 3e^{t} + 8e^{4t} \qquad y'(0) = 3e^{t} + 32e^{4t}$$

代入原式［例1之方程式(1)］，則

$$(3e^{t}+32e^{\quad})-5(3e^{t}+8e^{4t})+4(3e^{t}+2e^{4t}+\tfrac{1}{2})=2$$

20.2 二階差分方程式

二階差分方程式之一般解包含一輔助函數與一特解：$y(t)=y_c+y_p$，若已知所予之二階線性差分方程式爲

$$y_t+b_1y_{t-1}+b_2y_{t-2}=a \tag{20.10}$$

其中 b_1，b_2 與 a 均爲常數，則其特解爲

$$y_p=\frac{a}{1+b_1+b_2} \qquad b_1+b_2\neq -1 \tag{20.11}$$

$$y_p=\frac{a}{2+b_1}t \qquad b_1+b_2=-1 \quad b_1\neq -2 \tag{20.11a}$$

$$y_p=\frac{a}{2}t^2 \qquad b_1+b_2=-1 \quad b_1=-2 \tag{20.11b}$$

而輔助函數爲

$$y_c=A_1r_1^t+A_2r_2^t \tag{20.12}$$

其中 A_1 與 A_2 爲任意常數，而特性根 r_1 與 r_2 可用（20.4）公式求得，其中假設 $b_1^2\neq 4b_2$。

例題20.5

下列諸方程式之特解，例示如下：

(1) $y_t-10y_{t-1}+16y_{t-2}=14$　　(2) $y_t-6y_{t-1}+5y_{t-2}=12$　　(3) $y_t-2y_{t-1}+y_{t-2}=8$

方程式(1)，使用（20.11），$y_p=\dfrac{14}{1-10+16}=2$ (20.13)

方程式(2)，使用（20.11a），$y_p=\dfrac{12}{2-6}t=-3t$ (20.13a)

方程式(3)，使用（20.11b），$y_p=\dfrac{8}{2}t^2=4t^2$ (20.13b)

例題20.6

於例5中，方程式(1)與(2)之輔助函數例示如下，方程式(3)請參見例9。

式(1)使用（20.4）式，然後代入（20.12）式可得。

$$r_1,r_2=\frac{10\pm\sqrt{100-4(16)}}{2}=\frac{10\pm 6}{2}=2,8$$

因此，
$$y_c = A_1(2)^t + A_2(8)^t \tag{20.14}$$

式(2)，
$$r_1, r_2 = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(5)}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = 1, 5$$

因此，
$$y_c = A_1(1)^t + A_2(5)^t = A_1 + A_2(5)^t \tag{20.14a}$$

例題20.7

於例 5 之方程式(1)與(2)之一般解例示如下，

式(1)，$y(t) = y_c + y_p$。由（20.14）與（20.13）式知，

$$y(t) = A_1(2)^t + A_2(8)^t + 2 \tag{20.15}$$

式(2)由（20.14a）與（20.13a ）式知，

$$y(t) = A_1 + A_2(5)^t - 3t \tag{20.15a}$$

例題20.8

已知 $y(0) = 10$ 與 $y(1) = 36$，求例 7 中方程式(1)之定解例示如下：令 $t = 0$ 與 $t = 1$ 則（20.15）式分別爲

$$y(0) = A_1(2)^0 + A_2(8)^0 + 2 = A_1 + A_2 + 2 \qquad y(1) = A_1(2) + A_2(8) + 2 = 2A_1 + 8A_2 + 2$$

再令 $y(0) = 10$ 與 $y(1) = 36$ 則由原式分別可得

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + 2 &= 10 \\ 2A_1 + 8A_2 + 2 &= 36 \end{aligned}$$

聯立解之，則 $A_1 = 5$ 與 $A_2 = 3$。最後，代入（20.15）式，

$$y(t) = 5(2)^t + 3(8)^t + 2 \tag{20.16}$$

計算（20.16）式在 $t = 0$，1 與 2 之值以檢查上面之答案。

$$y(0) = 5 + 3 + 2 = 10 \qquad y(1) = 10 + 24 + 2 = 36 \qquad y(2) = 20 + 192 + 2 = 214$$

於例 7 之方程式(1)中以 $y(2)$ 代入 y_t，$y_{(1)}$ 代 y_{t-1}，$y_{(0)}$ 代 y_{t-2} 則 $214 - 10(36) + 16(10) = 14$。

20.3 特性根

一特性方程式可能有下列三種不同型式之根：

1. 相異實數根（distinct real roots），如果 $b_1^2 > 4b_2$，則（20.4）式之平方根

將爲相異實數 r_1 與 r_2，如 (20.6) 與 (20.6a) 式者。

2. **實數重根** (repeated real roots) ：如果 $b_1^2 = 4b_2$，則 (20.4) 式之平方根爲 r_1 與 r_2 相等之重根，於此情況下，(20.3) 與 (20.12) 之 y_t 的公式將變爲

$$y_c = A_1 e^{rt} + A_2 te^{rt} \tag{20.17}$$

$$y_c = A_1 r^t + A_2 t r^t \tag{20.18}$$

3. **複數根** (complex roots) ：如果 $b_1^2 < 4b_2$，則 (20.4) 式之平方根包含一負數，稱爲**虛數** (imaginary number)，於此情況下，r_1 與 r_2 爲複數，一複數通常包括實數部分與虛數部分：例如，$12 + i$，其中 $i = \sqrt{-1}$ [使用(20.4) 式時，檢查其答案是否正確之簡單方法是：$r_1 + r_2$ 必須等於 $-b_1$，$r_1 \times r_2$ 必須等於 b_2]。

例題20.9

於例 1 之方程式(3)，$y''(t) = 16$，其輔助函數計算例示如下：由 (20.4) 式可得，

$$r_1, r_2 = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4(0)}}{2} = 0$$

使用 (20.17) 式，其中因 $r_1 = r_2 = 0$。此爲實數重根之情況．則 $y_c = A_1 e^0 + A_2 te^0 = A_1 + A_2 t$。

於例(5)方程式(3)。$y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2} = 8$。我們亦可由 (20.4) 式，求得其輔助函數，即

$$r_1, r_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

使用 (20.18) 式，其中因爲 $r_1 = r_2 = 1$。則 $y_t = A_1 (1)^t + A_2 t(1)^t = A_1 + A_2 t$。

20.4 共軛複數

於 (20.4) 式如果 $b_1^2 < 4b_2$ 則分解出 $\sqrt{-1}$ 可得

$$r_1, r_2 = \frac{-b_1 \pm \sqrt{-1}\sqrt{4b_2 - b_1^2}}{2} = \frac{b_1 \pm i\sqrt{4b_2 - b_1^2}}{2}$$

以更簡潔之式子表示

$$r_1, r_2 = g \pm hi \tag{20.19}$$

其中

$$g = -\tfrac{1}{2}b_1 \quad \text{且} \quad h = \tfrac{1}{2}\sqrt{4b_2 - b_1^2}$$

$g \pm hi$ 稱爲**共軛複數** (conjugate complex numbers)，此乃由於它們必然同時出現，將 (20.19) 式分別代入 (20.3) 與 (20.12) 式，可求得複數根之 y_t。

$$y_c = A_1 e^{(g+hi)t} + A_2 e^{(g-hi)t} = e^{gt}(A_1 e^{hit} + A_2 e^{-hit}) \tag{20.20}$$

$$y_c = A_1(g+hi)^t + A_2(g-hi)^t \tag{20.21}$$

例題 20.10

$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 18$ 其輔助函數之計算例示如下：使用 (20.19)式，其中因爲 $b_1^2 < 4b_2$ 。

$$g = -\tfrac{1}{2}(2) = -1 \qquad h = \tfrac{1}{2}\sqrt{4(5) - (2)^2} = \tfrac{1}{2}(4) = 2$$

故 $r_1, r_2 = -1 \pm 2i$ 。代入 (20.20)式，則 $y_c = e^{-t}(A_1 e^{hit} + A_2 e^{-hit})$ 。

20-5 三角函數

我們經常利用**三角函數**(trigonometric function)來連結複數 。例如，已知圖 20-1 中角度爲 θ ，該圖之圓的半徑爲 k ，而角度是以逆時針方向測量之，則 θ 之三角函數分別如下：

$$(\sin)\,\theta = \frac{h}{k} \qquad (\cos)\,\theta = \frac{g}{k}$$

$$(\tan)\,\theta = \frac{h}{g} \qquad (\cot)\,\theta = \frac{g}{h}$$

$$(\sec)\,\theta = \frac{k}{g} \qquad (\csc)\,\theta = \frac{k}{h}$$

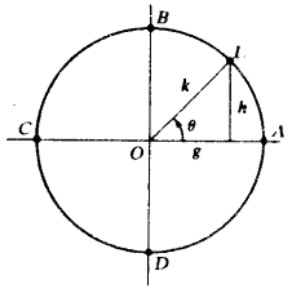
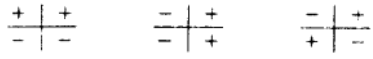


圖 20-1

於座標圖上四個象限中，各三角函數之符號分別爲



sin, csc　　cos, sec　　tan, cot

角度 θ 通常以**弧長**(radians)來測度，則由於一圓之弧長爲 2π ，故 $1° = \pi/180$ 弧長， $360° = 2\pi$ 弧長， $180° = \pi$ 弧長， $90° = \pi/2$ 弧長且 $45° = \pi/4$ 弧長。

例題20.11

於圖 20-1 中如果半徑爲 OL，則由 A 點開始以逆時針方向移動 360°，則 $\sin\theta = h/k$ 將由 0 (A) 至 1 (B) 至 0 (C) 至 −1 (D) 再回到 (A)，$\cos\theta = g/k$ 將由 1 (A) 至 0 (B)，−1 (C) 至 0 (D) 再回到 1 (A)，我們可將其摘要如表 1 並繪示如圖 20-2，應注意的是，此二函數均爲**週期性的**（periodic），其**週期**（period）爲 2π（亦即，它們每經過 360° 或 2π 弧長後其值將重複）。而且兩者之**振幅**（amplitude of fluctuation）爲 1，它們所不同的只是其**趨勢**（path）或它們達到頂點之位置。

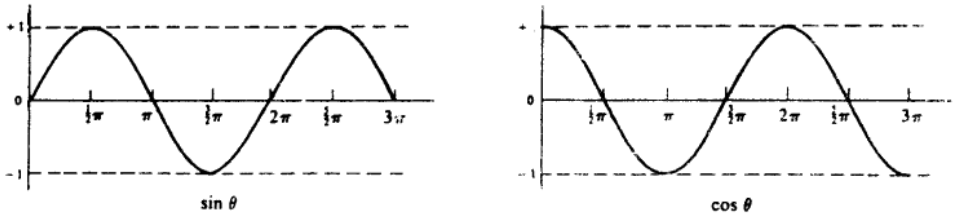


圖 20-2

表 1

度　數	0	90	180	270	360
弧　長	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\theta$	0	1	0	−1	0
$\cos\theta$	1	0	−1	0	1

20.6 三角函數之導數

已知此爲 x 之可微分函數，則

(1) $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$

(2) $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$

(3) $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$

(4) $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$

(5) $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$

(6) $\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$

例題20.12

已知所予諸三角函數爲

(1) $y = \sin(3x^2 + 6)$ (2) $y = 4\cos 2x$ (3) $y = (1 + \tan x)^2$

其導數之求取例示如下：

(1) $\frac{dy}{dx} = 6x\cos(3x^2 + 6)$ (2) $\frac{dy}{dx} = -8\sin 2x$ (3) $\frac{dy}{dx} = 2(1 + \tan x)(\sec^2 x) = 2\sec^2 x(1 + \tan x)$

20·7 虛數與複數之轉換

下列三個法則有助於將虛數與複數轉換爲三角函數：

1. 於圖 20-1，笛卡兒座標（Cartesian coordinates）中，g 與 h 可以 θ 與 k 表示之，即以**極座標**（polar coordinates）轉換之，其簡單公式如下：

$$g = k\cos\theta \qquad h = k\sin\theta \qquad k > 0$$

因此就一複數（$g \pm hi$）而言，可轉換爲

$$g \pm hi = k\cos\theta \pm ik\sin\theta = k(\cos\theta \pm i\sin\theta) \tag{20.22}$$

2. **尤拉關係式**（Euler relations）

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta \tag{20.23}$$

故，將（20.23）式代入（20.22）式，我們亦可以（$g \pm hi$）之形式表示如下，

$$g \pm hi = ke^{\pm i\theta} \tag{20.23a}$$

3. 由（20.23a）式，可建立 n 次方之共軛複數

$$(g \pm hi)^n = (ke^{\pm i\theta})^n = k^n e^{\pm in\theta} \tag{20.24}$$

或者，使用（20.23）式，而以 $n\theta$ 取代 θ，我們可得**棣莫根**（De Moiver's）定理：

$$(g \pm hi)^n = k^n(\cos n\theta \pm i\sin n\theta) \tag{20.25}$$

例題20.13

求虛指數函數 $e^{2i\pi}$ 之值例示如下，使用（20.23）式，其中 $\theta = 2\pi$。

$$e^{2i\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$$

由表 1 知，$\cos 2\pi = 1$ 與 $\sin 2\pi = 0$。因此，$e^{2i\pi} = 1 + j(0) = 1$。

例題20.14

將 (20.20) 與 (20.21) 之虛指數函數轉換爲三角函數，例示如下。

由 (20.20) 式，知 $y_c = e^{gt}(A_1 e^{iht} + A_2 e^{-iht})$，使用 (20.23) 式，其中 $\theta = ht$，

$$\begin{aligned} y_c &= e^{gt}[A_1(\cos ht + i \sin ht) + A_2(\cos ht - i \sin ht)] \\ &= e^{gt}[(A_1 + A_2)\cos ht + (A_1 - A_2)i \sin ht] \\ &= e^{gt}(B_1 \cos ht + B_2 \sin ht) \end{aligned} \qquad (20.26)$$

式中 $B_1 = A_1 + A_2$ 且 $B_2 = (A_1 - A_2)i$。

由 (20.21) 式，知 $y_c = A_1(g + hi)^t + A_2(g - hi)^t$。使用 (20.25) 式，並以 t 代替 n，則

$$\begin{aligned} y_c &= A_1 k^t(\cos t\theta + i \sin t\theta) + A_2 k^t(\cos t\theta - i \sin t\theta) \\ &= k^t[(A_1 + A_2)\cos t\theta + (A_1 - A_2)i \sin t\theta] \\ &= k^t(B_1 \cos t\theta + B_2 \sin t\theta) \end{aligned} \qquad (20.27)$$

式中 $B_1 = A_1 + A_2$ 且 $B_2 = (A_1 - A_2)i$。

例題20.15

(20.26) 與 (20.27) 式之時徑計算，例示如下：首先檢查 (20.26) 式中每一項，即

(1) $(B_1 \cosht)$ 爲 t 之 cos 函數，正如圖 20-2 所示者，其週期爲 $2\pi/h$ 而非 2π，且振幅爲常數 B_1 而非 1。

(2) $(B_2 \sinht)$ 爲 t 之 sin 函數，週期爲 $2\pi/h$，振幅爲 B_2。

(3) 由於首二項表示此函數爲固定擺動者，故其穩定性乃決定於 e^{gt}：

如果 $g > 0$，e^{gt} 將隨著 t 之增加而擴大，如此其振幅亦擴大，因而導致此函數爲爆發性之擺動，故排除收斂之可能。

如果 $g = 0$，則 $e^{gt} = 1$，y_c 將爲單式擺動，其振幅由 sin 與 cos 函數決定，此亦不可能爲收斂之函數。如果 $g < 0$，則當 t 增加時 e^{gt} 將逐漸趨近於 0，如此，其振幅將逐漸減小，故爲萎縮之擺動，最後將收斂於 0，參見圖 20-3。

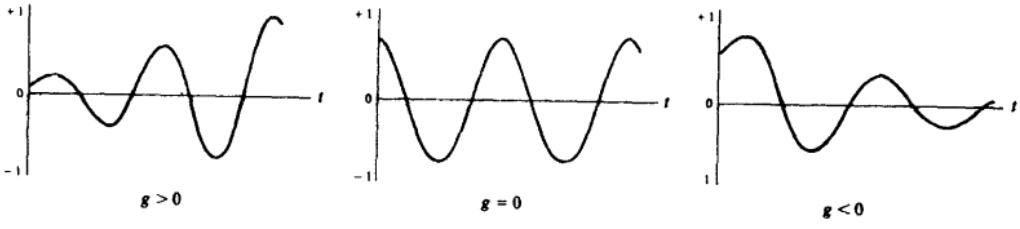


圖 20-3 $y_c(t)$ 之時徑

因爲 (20.27) 式與差分方程式有關，其中 t 只能以斷續之區間變動之，故 y_c 爲一階梯函數，而非連續之函數（參見圖 19.1），因此正如 (20.26) 式一樣，其時徑亦將爲擺動者，而穩定性則決定於 k^t，如果 $|k|<1$，y_c 將爲收斂，參見問題 20.8 - 20.11，20.18 - 20.20 與 20.31 - 20.35。

20.8 穩定條件

二階線性微分方程式，若其解爲實數相異或重根，則其時徑爲收斂之條件是，兩根均必須爲負，如果其中有一根爲正，則當 t 趨近無窮大時，帶有正根之指數項亦將趨近無窮大，因而其時徑不可能爲收斂，參見問題 20.8-20.11。反之，在複數根的情況下，收斂之條件是 (20.26) 式中 e^{gt} 之 g 必須爲負，如例 15 所示者。

另外，二階線性差分方程式，若其解爲實數之相異或重根，則絕對值最大的根稱爲優勢根（dominant root），因爲它可支配時徑之態勢，此時該差分方程式之時徑爲收斂之條件是此優勢根之絕對值必須小於 1，參見問題 20.18 - 20.20。反之，在複數根的情況下，收斂之條件是 (20.27) 式中 k 之絕對值必須小於 1，如例 15 所示者。

習題與解答

二階線性微分方程式

相異實根

20.1 對於下列方程式，試求 (a) 特解 y_p，(b) 輔助函數 y_c 與 (c) 一般解 $y(t)$。

$$y''(t)+9y'(t)+14y(t)=7$$

解 (a) 使用 (20.2) 式可得，$y_p=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$。

(b) 使用 (20.4) 式，可得

$$r_1, r_2=\frac{-9\pm\sqrt{81-4(14)}}{2}=\frac{-9\pm5}{2}=-2,-7$$

代入 (20.3) 式，則 $y_c=A_1e^{-2t}+A_2e^{-7t}$。

$$y(t)=y_c+y_p=A_1e^{-2t}+A_2e^{-7t}+\frac{1}{2} \tag{20.28}$$

20.2 已知 $y''(t)-12y'(t)+20y(t)=-100$，試重新作問題 20.1。

解 (a) 由 (20.2) 式知，$y_p=-\frac{100}{20}=-5$。

(b) 由 (20.4) 式知，

$$r_1, r_2=\frac{12\pm\sqrt{144-4(20)}}{2}=\frac{12\pm8}{2}=2,10$$

因此，$y_c = A_1 e^{2t} + A_2 e^{10t}$ 。

(c) $$y(t) = y_c + y_p = A_1 e^{2t} + A_2 e^{10t} - 5 \tag{20.29}$$

20.3 已知 $y''(t) - 4y'(t) - 5y(t) = 35$ ，試重作問題 20.1 。

圖 (a) 由 (20.2) 式知，$y_p = -\frac{35}{5} = -7$ 。

(b) 由 (20.4) 式可得

$$r_1, r_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-5)}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 5, -1$$

因此，$y_c = A_1 e^{5t} + A_2 e^{-t}$ 。

(c) $$y(t) = A_1 e^{5t} + A_2 e^{-t} - 7 \tag{20.30}$$

20.4 已知 $y''(t) + [illegible]y(t) = 28$ ，試重作問題 20.1 。

圖 (a) 使用 (20.2a) 式，則 $y_p = \frac{28}{7} t = 4t$ 。

(b) 由 (20.4) 式可得

$$r_1, r_2 = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(0)}}{2} = \frac{-7 \pm 7}{2} = 0, -7$$

因此，$y_c = A_1 e^{(0)t} + A_2 e^{-7t} = A_1 + A_2 e^{-7t}$ 。

(c) $$y(t) = A_1 + A_2 e^{-7t} + 4t \tag{20.31}$$

20.5 已知 $y''(t) - \frac{1}{2} y'(t) = 13$ ，試重作問題 20.1 。

圖 (a) 由 (20.2a) 式，可得 $y_p = \frac{13}{-1/2} t = -26t$ 。

(b) $$r_1, r_2 = \frac{1/2 \pm \sqrt{1/4 - 4(0)}}{2} = \frac{1/2 \pm 1/2}{2} = 0, \frac{1}{2}$$

因此，$y_c = A_1 + A_2 e^{(1/2)t}$ 。

(c) $$y(t) = A_1 + A_2 e^{(1/2)t} - 26t \tag{20.32}$$

實數重根

20.6 已知 $y''(t) - 12y'(t) + 3yt = 108$ ，試求 (a) 特解 y_p ，(b) 輔助函數 y_c ，(c) 一般解 $y(t)$ 。

圖 (a) $$y_p = \frac{108}{36} = 3$$

(b) $$r_1, r_2 = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4(36)}}{2} = \frac{12 \pm 0}{2} = 6$$

使用 (20.17) 式，其中因爲 $r_1 = r_2 = 6$ ，$y_c = A_1 e^{6t} + A_2 t e^{6t}$ 。

(c) $$y(t) = A_1 e^{6t} + A_2 t e^{6t} + 3 \tag{20.33}$$

20.7 已知 $y''(t) + y'(t) + \frac{1}{4} y(t) = 9$ ，試重作問題 20.6 。

圖 (a) $$y_p = \frac{9}{1/4} = 36$$

(b) $$r_1, r_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1/4)}}{2} = \frac{-1 \pm 0}{2} = -\frac{1}{2}$$

使用 (20.17) 式，因爲 $r_1 = r_2 = -\frac{1}{2}$，$y_c = A_1 e^{-(1/2)t} + A_2 t e^{-(1/2)t}$。

(c) $$y(t) = A_1 e^{-(1/2)t} + A_2 t e^{-(1/2)t} + 36 \qquad (20.34)$$

定解與穩定條件

20.8 求 (a) 下列方程式之定解，(b) 檢查你的答案，(c) 試評論其時徑之動態穩定性，已知 $y''(t) + 9y'(t) + 14y(t) = 7$ 且 $y(0) = -2\frac{1}{2}$，$y'(0) = 31$。

圖 (a) 由 (20.28) 式可得

$$y(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-7t} + \tfrac{1}{2} \qquad (20.35)$$

因此， $$y'(t) = -2A_1 e^{-2t} - 7A_2 e^{-7t} \qquad (20.35a)$$

計算 $t = 0$ 時 (20.35) 與 (20.35a) 式之值，即

$$y(0) = A_1 + A_2 + \tfrac{1}{2} \qquad y'(0) = -2A_1 - 7A_2$$

由於已知 $y(0) = -2\frac{1}{2}$ 與 $y'(0) = 31$ 則由上式知，

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + \tfrac{1}{2} &= -2\tfrac{1}{2} \\ -2A_1 - 7A_2 &= 31 \end{aligned}$$

求其聯立解，可得 $A_1 = 2$ 與 $A_2 = -5$。將之代入 (20.35) 式，可得

$$y(t) = 2e^{-2t} - 5e^{-7t} + \tfrac{1}{2} \qquad (20.36)$$

(b) 由 (20.36) 式，$y(t) = 2e^{-2t} - 5e^{-7t} + \frac{1}{2}$。故

$$y'(t) = -4e^{-2t} + 35e^{-7t} \qquad y''(t) = 8e^{-2t} - 245e^{-7t}$$

將這些值代入原式，$y'' + 9y'(t) + 14y(t) = 7$

$$8e^{-2t} - 245e^{-7t} + 9(-4e^{-2t} + 35e^{-7t}) + 14(2e^{-2t} - 5e^{-7t} + \tfrac{1}{2}) = 7$$

由於兩個特性根均爲負，故 (20.36) 式在 $t \to \infty$ 時將趨近於 $\frac{1}{2}$，因此 $y(t)$ 爲收斂。

(c) 由此可知，當兩個特性根均爲負數時，其時徑爲收斂。

20.9 已知 $y''(t) - 4y'(t) - 5y(t) = 35$，$y(0) = 5$ 且 $y'(0) = 6$，試重作問題 20.8。

圖 (a) 由 (20.30) 式可得

$$y(t) = A_1 e^{5t} + A_2 e^{-t} - 7 \qquad (20.37)$$

因此， $$y'(t) = 5A_1 e^{5t} - A_2 e^{-t} \qquad (20.37a)$$

計算 (20.37) 與 (20.37a) 式在 $t = 0$ 之值，且令它們等於原先之條件式

$y(0)=5$ 與 $y'(0)=6$ 。

$$\begin{aligned} y(0) &= A_1 + A_2 - 7 = 5 \\ y'(0) &= 5A_1 - A_2 = 6 \end{aligned} \qquad \text{因此，} \qquad A_1 + A_2 = 12$$

聯立解之，可得 $A_1=3$ 與 $A_2=9$ ，代入（20.37）式，可得

$$y(t) = 3e^{5t} + 9e^{-t} - 7 \tag{20.38}$$

(*b*) 由（20.38）式，$y(t)=3e^{5t}+9e^{-t}-7$ 。故，$y'(t)=15e^{5t}-9e^{-t}$ 且 $y''(t)=75e^{5t}+9e^{-t}$ 。

將這些值代入原式 $y''(t)-4y'(t)-5y(t)=35$ 。

$$75e^{5t}+9e^{-t}-4(15e^{5t}-9e^{-t})-5(3e^{5t}+9e^{-t}-7)=35$$

(*c*) 由於其中一個特性根爲正而另一個爲負，故其時徑爲發散，此時，正的特性根支配負的特性根（而不論其絕對值爲何），因爲當 $t\to\infty$ 時正的根 $\to\infty$ 而負的根 $\to 0$ 。

20.10 已知 $y''(t)-\frac{1}{2}y'(t)=13$ ，$y(0)=17$ 且 $y'(0)=-19\frac{1}{2}$，試重作問題 20.8 。

圖 (*a*) 由（20.32）式可知，

$$y(t) = A_1 + A_2 e^{(1/2)t} - 26t \tag{20.39}$$

因此

$$y'(t) = \tfrac{1}{2}A_2 e^{(1/2)t} - 26 \tag{20.39a}$$

計算（20.39）與（20.39*a*）式在 $t=0$ 之時，並令它們等於原先之條件式，

$$\begin{aligned} y(0) &= A_1 + A_2 = 17 \\ y'(0) &= \tfrac{1}{2}A_2 - 26 = -19\tfrac{1}{2} \end{aligned} \qquad A_2 = 13$$

由於 $A_2=13$ 則 $A_1=4$ 。將之代入（20.39）式，並重新整理各項，

$$y(t) = 13e^{(1/2)t} - 26t + 4 \tag{20.40}$$

(*b*) 由（20.40）式，$y(t)=13e^{(1/2)t}-26t+4$ 。因此，

$$y'(t) = 6.5e^{(1/2)t} - 26 \qquad y''(t) = 3.25e^{(1/2)t}$$

將這些值代入原式，

$$3.25e^{(1/2)t} - \tfrac{1}{2}(6.5e^{(1/2)t} - 26) = 13$$

(*c*) 由於兩個特性根均爲正，故其時徑爲發散。

20.11 已知 $y''(t)+y'(t)+\frac{1}{4}y(t)=9$，$y(0)=30$，且 $y'(0)=15$，試重作問題 20.8。

圖 (*a*) 由（20.34）式，可知

$$y(t) = A_1 e^{-(1/2)t} + A_2 t e^{-(1/2)t} + 36 \tag{20.41}$$

使用乘積法則，求(20.41)式之導數，

$$y'(t) = -\tfrac{1}{2}A_1 e^{-(1/2)t} - \tfrac{1}{2}A_2 t e^{-(1/2)t} + A_2 e^{-(1/2)t} \tag{20.41a}$$

計算(20.41)與(20.41a)式在$t = 0$之值，並令它們等於原先之條件式，

$$y(0) = A_1 + 36 = 30 \qquad A_1 = -6$$
$$y'(0) = -\tfrac{1}{2}A_1 + A_2 = 15$$

由於$A_1 = -6$，則$A_2 = 12$。代入(20.41)式，

$$y(t) = 12te^{-(1/2)t} - 6e^{-(1/2)t} + 36 \tag{20.42}$$

(*b*) 由(20.42)，$y(t) = 12te^{-(1/2)t} - 6e^{-(1/2)t} + 36$，經由乘積法則，知

$$y'(t) = -6te^{-(1/2)t} + 12e^{-(1/2)t} + 3e^{-(1/2)t}$$
$$y''(t) = 3te^{-(1/2)t} - 6e^{-(1/2)t} - 6e^{-(1/2)t} - 1.5e^{-(1/2)t} = 3te^{-(1/2)t} - 13.5e^{-(1/2)t}$$

代入原式，

$$(3te^{-(1/2)t} - 13.5e^{-(1/2)t}) + (-6te^{-(1/2)t} + 15e^{-(1/2)t}) + \tfrac{1}{4}(12te^{-(1/2)t} - 6e^{-(1/2)t} + 36) = 9$$

(*c*) 由於其重根均爲負，故其時徑爲收斂，因爲te^{rt}之時徑基本上其態勢與e^{rt}之時徑相同。

二階線性差分方程式

相異實根

20.12 已知$y_t + 7y_{t-1} + 6y_{t-2} = 42$。試求(*a*)其特解，(*b*)輔助函數，與(*c*)一般解，

解 (*a*) 由(20.11)式，可得 $y_p = 42/(1 + 7 + 6) = 3$

(*b*) 由(20.4)式，可得 $r_1, r_2 = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(6)}}{2} = \dfrac{-7 \pm 5}{2} = -1, -6$

由(20.12)式，知 $y_c = A_1(-1)^t + A_2(-6)^t$

(*c*) $$y(t) = y_c + y_p = A_1(-1)^t + A_2(-6)^t + 3 \tag{20.43}$$

20.13 已知$y_t + 12y_{t-1} + 11y_{t-2} = 6$，試重新作問題20.12。

(*a*) 由(20.11)式，可得 $y_p = 6/(1 + 12 + 11) = \tfrac{1}{4}$

(*b*) $$r_1, r_2 = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4(11)}}{2} = \frac{-12 \pm 10}{2} = -1, -11$$

因此， $y_c = A_1(-1)^t + A_2(-11)^t$

(*c*) $$y(t) = A_1(-1)^t + A_2(-11)^t + \tfrac{1}{4} \tag{20.44}$$

20.14 已知 $y_{t+2} - 11y_{t+1} + 10y_t = 27$，試重新作問題 20.12。

圖 (*a*) 將期數往回挪兩期，使之合於（20.10）式，即 $y_t - 11y_{t-1} + 10y_{t-2} = 27$。則，由（20.11*a*）式知

$$y_p = \frac{27}{2-11}t = -3t$$

(*b*)
$$r_1, r_2 = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4(10)}}{2} = \frac{11 \pm 9}{2} = 1, 10$$

$$y_c = A_1 + A_2(10)^t$$

(*c*)
$$y(t) = A_1 + A_2(10)^t - 3t \qquad (20.45)$$

20.15 已知 $y_t + 7y_{t-1} - 8y_{t-2} = 45$，試重作問題 20.12。

圖 (*a*) 由（20.11*a*）式可得 $y_p = \frac{45}{2+7}t = 5t$

(*b*)
$$r_1, r_2 = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(-8)}}{2} = \frac{-7 \pm 9}{2} = 1, -8$$

$$y_c = A_1 + A_2(-8)^t$$

(*c*)
$$y(t) = A_1 + A_2(-8)^t + 5t \qquad (20.46)$$

實數重根

20.16 已知 $y_t - 10y_{t-1} + 25y_{t-2} = 8$，試重新作問題 20.12。

(*a*)
$$y_p = \frac{8}{1 - 10 + 25} = \frac{1}{2}$$

(*b*)
$$r_1, r_2 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(25)}}{2} = \frac{10 \pm 0}{2} = 5$$

使用（20.18）式，其中因爲 $r_1 = r_2 = 5$，$y_c = A_1(5)^t + A_2 t(5)^t$。

(*c*)
$$y(t) = A_1(5)^t + A_2 t(5)^t + \tfrac{1}{2} \qquad (20.47)$$

20.17 已知 $y_t + 14y_{t-1} + 49y_{t-2} = 128$，試重新作問題 20.12。

(*a*)
$$y_p = \frac{128}{1 + 14 + 49} = 2$$

(*b*)
$$r_1, r_2 = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 4(49)}}{2} = \frac{-14 \pm 0}{2} = -7$$

由（20.18）式，知 $y_c = A_1(-7)^t + A_2 t(-7)^t$。

(*c*)
$$y(t) = A_1(-7)^t + A_2 t(-7)^t + 2 \qquad (20.48)$$

定解與穩定條件

20.18 已知 $y_t + 7y_{t-1} + 6y_{t-2} = 42$，$y(0) = 16$ 且 $y(1) = -35$，(*a*) 求其定解，(*b*) 檢查所求之答案，(*c*) 試評論其動態穩定性。

圖 (*a*)由(20.43)式，可知 $y(t) = A_1(-1)^t + A_2(-6)^t + 3$ (20.49)

令 $t = 0$ 與 $t = 1$ 代入(20.49)式，並令之等於原先之條件式，

$$y(0) = A_1 + A_2 + 3 = 16 \qquad y(1) = -A_1 - 6A_2 + 3 = -35$$

聯立解之，$A_1 = 8$ 與 $A_2 = 5$，代入(20.49)式，

$$y(t) = 8(-1)^t + 5(-6)^t + 3 \tag{20.50}$$

(*b*)計算(20.50)式在 $t = 0$，1，2之值，以檢查上述之答案

$$y(0) = 8 + 5 + 3 = 16 \qquad y(1) = -8 - 30 + 3 = -35 \qquad (2) = 8 + 180 + 3 = 191$$

$$y(2) = y_t \qquad y(1) = y_{t-1} \qquad y(0) = y_{t-2} \qquad 191 + 7(-35) + 6(16) = 42$$

(*c*)其特性根爲 -1 與 -6，特性根中絕對值最大者爲優勢根，因爲它支配時徑之態勢，在收斂時徑之情況是此優勢根之絕對值小於 1。本題中，因爲 $|-6| > |-1|$ 且 $|-6| > 1$，故其時徑爲發散。

20.19 已知 $y_{t+2} - 11y_{t+1} + 10y_t = 20$，$y(0) = 2$，$y(1) = 53$，(*a*)求其定解，(*b*)評論其動態穩定性。

圖 (*a*)由(20.45)式，可知 $y(t) = A_1 + A_2(10)^t - 3t$ (20.51)

令 $t = 0$ 與 $t = 1$，並令之等於原先之條件式，

$$y(0) = A_1 + A_2 = 2 \qquad y(1) = A_1 + 10A_2 - 3 = 53$$

聯立解之，可得 $A_1 = -4$ 與 $A_2 = 6$。代入(20.51)式，

$$y(t) = 6(10)^t - 3t - 4$$

(*b*)其時徑爲發散，因爲優勢根爲10大於1。

20.20 已知 $y_t - 10y_{t-1} + 25y_{t-2} = 8$，$y(0) = 1$ 且 $y(1) = 5$，試重作問題20.19。

圖 (*a*)由(20.47)式，可知 $y(t) = A_1(5)^t + A_2t(5)^t + \frac{1}{2}$ (20.52)

令 $t = 0$ 與 $t = 1$，並令之等於原先之條件式，

$$y(0) = A_1 + \tfrac{1}{2} = 1 \qquad A_1 = \tfrac{1}{2}$$
$$y(1) = 5A_1 + 5A_2 + \tfrac{1}{2} = 5$$

由於 $A_1 = \frac{1}{2}$，故 $A_2 = \frac{2}{5}$。代入(20.52)式則

$$y(t) = \tfrac{1}{2}(5)^t + \tfrac{2}{5}t(5)^t + \tfrac{1}{2} \tag{20.53}$$

b 於本題中有實數重根，其收斂性決定於 $|r| < 1$，因爲 r^t 之效果支配第二項 A_2tr^t 中之 t 之效果，本題中，由於 $r = 5 > 1$，故其時徑爲發散。

三角函數之導數

20.21 求下列諸三角函數的導數，

(*a*) $y = \sin 7x$

$dy/dx = 7\cos 7x$

(*b*) $y = \cos(5x+2)$

$dy/dx = -5\sin(5x+2)$

(*c*) $y = \tan 11x$

$dy/dx = 11\sec^2 11x$

(*d*) $y = \csc(8x+3)$

$dy/dx = -8[\csc(8x+3)\cot(8x+3)]$

(*e*) $y = \sin(3-x^2)$

$dy/dx = -2x\cos(3-x^2)$

(*f*) $y = \sin(5-x)^2$

$dy/dx = -2(5-x)\cos(5-x)^2$ （連鎖律）

20.22 已知 $y = x^2\tan x$，試重作問題 20.21。

圖 由乘積法則，可得 $dy/dx = x^2(\sec^2 x) + \tan x(2x) = x^2\sec^2 x + 2x\tan x$.

20.23 已知 $y = x^3\sin x$，試重作問題 20.21。

圖

$$\frac{dy}{dx} = x^3(\cos x) + \sin x(3x^2) = x^3\cos x + 3x^2\sin x$$

20.24 已知 $y = (1+\cos)^2$，試重作問題 20.21。

圖 由連鎖律可得，$dy/dx = 2(1+\cos x)(-\sin x) = -2\sin x(1+\cos x)$.

20.25 已知 $y = (\sin x + \cos x)^2$，試重作問題 20.21。

圖

$$\frac{dy}{dx} = 2(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

20.26 已知 $y = \sin^2 5x$，其中 $\sin^2 5x = (\sin 5x)^2$，試重作問題 20.21。

圖 由連鎖律可得，$dy/dx = 2\sin 5x\cos 5x\,(5) = 10\sin 5x\cos 5x$.

20.27 已知 $y = \csc^2 12x$，試重作問題 20.21。

圖

$$\frac{dy}{dx} = 2\csc 12x[-\csc 12x\cot 12x\,(12)] = -24\csc^2 12x\cot 12x$$

二階微分方程式之複數根

20.28 已知二階微分方程式 $y''(t) + 2y'(t) + 10y(t) = 80$，試求 (*a*) 特解，(*b*) 輔助函數，(*c*) 一般解。

圖 (*a*) 由 (20.2) 式，可得 $y_p = \frac{80}{10} = 8$

(*b*) 使用 (20.19) 式，其中因爲 $b_1 < 4b_2$，即 $(2)^2 < 4(10)$。

$$g = -\tfrac{1}{2}(2) = -1 \qquad h = \tfrac{1}{2}\sqrt{4(10) - (2)^2} = 3$$

因此，r_1，r_2 $= -1 \pm 3i$ 。將 h 與 g 代入（20.26）式，則

$$y_c = e^{-t}(B_1 \cos 3t + B_2 \sin 3t)$$

(c) $$y(t) = y_c + y_p = e^{-t}(B_1 \cos 3t + B_2 \sin 3t) + 8 \qquad (20.54)$$

20.29 已知 $y''(t) - 6y'(t) + 25y(t) = 150$ ，試重作問題 20.28 。

解 (a) $$y_p = \frac{150}{25} = 6$$

(b) 由（20.19）式知，$g = -\frac{1}{2}(-6) = 3$ 與 $h = \frac{1}{2}\sqrt{4(25) - (-6)^2} = 4$ 。代入（20.26）式可得

$$y_c = e^{3t}(B_1 \cos 4t + B_2 \sin 4t)$$

$$y(t) = e^{3t}(B_1 \cos 4t + B_2 \sin 4t) + 6 \qquad (20.55)$$

20.30 已知 $y''(t) + 4y'(t) + 40y(t) = 10$ ，試重作問題 20.28 。

解 (a) $$y_p = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

(b) 由（20.19）式知，$g = -2$ 與 $h = \frac{1}{2}\sqrt{160 - 16} = 6$ 。故，$y_c = e^{-2t}(B_1 \cos 6t + B_2 \sin 6t)$ 。

(c) $$y(t) = e^{-2t}(B_1 \cos 6t + B_2 \sin 6t) + \frac{1}{4} \qquad (20.56)$$

20.31 (a) 就下列有關資料，求其定解，(b) 評論其動態穩定性。

$$y''(t) + 2y'(t) + 10y(t) = 80 \qquad y(0) = 10 \qquad y'(0) = 13$$

解 (a) 由（20.54）知其一般解爲 $y(t) = e^{-t}(B_1 \cos 3t + B_2 \sin 3t) + 8$ (20.57)

利用乘積法則可得，

$$y'(t) = e^{-t}(-3B_1 \sin 3t + 3B_2 \cos 3t) + (B_1 \cos 3t + B_2 \sin 3t)(-e^{-t})$$
$$= e^{-t}(3B_2 \cos 3t - 3B_1 \sin 3t) - e^{-t}(B_1 \cos 3t + B_2 \sin 3t) \qquad (20.57a)$$

計算（20.57）與（20.57a）式在 $t = 0$ 之值，並令之等於原先之條件式，

$$y(0) = e^0(B_1 \cos 0 + B_2 \sin 0) + 8 = 10$$

由表 1（見 380 頁）知，$\cos 0 = 1$ 且 $\sin 0 = 0$ 。因此，

$$y(0) = B_1 + 0 + 8 = 10 \qquad B_1 = 2$$

同樣地，$y'(0) = e^0(3B_2 \cos 0 - 3B_1 \sin 0) - e^0(B_1 \cos 0 + B_2 \sin 0) = 13$

$$y'(0) = 3B_2 - B_1 = 13$$

因爲 $B_1 = 2$ 由上式可知，$B_2 = 5$ 。最後，代入（20.57）式，

$$y(t) = e^{-t}(2 \cos 3t + 5 \sin 3t) + 8$$

(b) 由於 $g = -1$ ，其時徑爲收斂，如圖 20-3 所示者（參見例 15 ）。

20.32 已知 $y''(t) - 6y'(t) + 25y(t) = 150$ ，$y(0) = 13$ ，且 $y'(0) = 25$ ，試重作問

題 20.31 。

圖 (a) 由 (20.55) 知其一般解爲 $y(t) = e^{3t}(B_1 \cos 4t + B_2 \sin 4t) + 6$ (20.58)

因此，$y'(t) = e^{3t}(-4B \sin 4t + 4B_2 \cos 4t) + 3e^{3t}(B \cos 4t + B_2 \sin 4t)$ (20.58a)

計算 (20.58) 與 (20.58a) 式在 $t = 0$ 之值，並令之等於原先之條件式，

$$y(0) = e^{0}(B_1 \cos 0 + B_2 \sin 0) + 6 = 13$$
$$y(0) = B_1 + 0 + 6 \quad 13 \qquad B_1 = 7$$

而 $y'(0) \quad e^{0}(-4B_1 \sin 0 + 4B_2 \cos 0) + 3e^{0}(B_1 \cos 0 + B \text{ si } 0)$

$$y'(0) = 4B_2 + 3B_1 = 25 \qquad B_2 = 1$$

代入 (20.58) 式，$y(t) = e^{3t}(7 \cos 4t + \sin 4t) + 6$ 。

(b) 由於 $g - 3$ ，其時徑爲發散。

20.33 已知 $y''(t) + 4y'(t) + 40y(t) = 10$ ，$y(0) = \frac{1}{2}$ ，且 $y'(0) - 2\frac{1}{2}$ 試重作問題 20.31 。

圖 (a) 由 (20.56) 式知其一般解爲 $y(t) = e^{-2t}(B_1 \cos 6t + B_2 \sin 6t) + \frac{1}{4}$ (20.59)

因此，$y'(t) = e^{-2t}(-6B_1 \sin 6t + 6B_2 \cos 6t) - 2e^{-2t}(B_1 \cos 6t + B_2 \sin 6t)$ (20.59a)

計算 (20.59) 與 (20.59a) 式在 $t = 0$ 之值，並令之等於原先之條件式，

$$y(0) = B_1 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \qquad B_1 = \tfrac{1}{4}$$
$$y'(0) = 6B_2 - 2B_1 = 2\tfrac{1}{2} \qquad B_2 = \tfrac{1}{2}$$

因此，$y(t) = e^{-2t}(\frac{1}{4}\cos 6t + \frac{1}{2}\sin 6t) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^{-2t}(\cos 6t + 2 \sin 6t) + \frac{1}{4}$.

(b) 由於 $g = -2$ ，故其時徑爲收斂。

二階差分方程式之複數根

20.34 已知所予之二階線性差分方程式 $y_t + 4y_{t-1} - 15$ ，$y(0) - 12$ ，$y(1) - 11$ 求 (a) 特解，(b) 輔助函數，(c) 一般解，(d) 定解與 (e) 評論其動態穩定條件。

圖 (a) 由 (20.11) 式可知， $y_p = 15/(1 + 0 + 4) = 3$

(b) 由 (20.19) 式，可知 $g = -\frac{1}{2}(0) = 0$ 與 $h = \frac{1}{2}\sqrt{4(4) - 0} = 2$ ，對於此二階差分方程式，我們目前需要求其 k 與 θ ，將畢氏 (Pythagorean) 定理應用至圖 20-1 。

$$k^2 = g^2 + h^2 \qquad k = \sqrt{g^2 + h^2}$$

以 (20.19) 式之參數代入上式，可得

$$k = \sqrt{\frac{b_1^2 + 4b_2 - b_1^2}{4}} \quad \sqrt{b_2} \tag{20.60}$$

故，$k - \sqrt{4} \quad 2$ 。則由 20.5 節之定義可知，

$$\sin\theta = \frac{h}{k} \qquad \cos\theta = \frac{g}{k} \tag{20.61}$$

將這些值代入本題有關之參數，知

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \qquad \cos\theta = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

由表 1（380頁）可知，$\sin\theta = 1$ 與 $\cos\theta = 0$ 之角度 θ 爲 $\pi/2$，因此，$\theta = \pi/2$。代入（20.27）式，則

$$y_c = 2^t\left[B_1\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + B_2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]$$

(c)
$$y(t) = 2^t\left[B_1\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + B_2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right] + 3 \tag{20.62}$$

(d) 使用表 1 計算（20.62）式在 $t = 0$ 與 $t = 1$ 之值，並令之等於原先之條件式，

$$y(0) = (B_1 + 0) + 3 = 12 \qquad B_1 = 9$$
$$y(1) = 2(0 + B_2) + 3 = 11 \qquad B_2 = 4$$

因此，
$$y(t) = 2^t\{9\cos[(\pi/2)t] + 4\sin[(\pi/2)t]\} + 3$$

(e) 由於 $k = 2$，其時徑爲發散，此正如例 15 所說明者。

20.35 已知 $y_t + 2y_{t-2} = 24$，$y(0) = 11$，且 $y(1) = 18$，試重作問題 20.34。

解 (a) 由（20.11）式知，$y_p = 24/(1 + 0 + 2) = 8$

(b) 由（20.60）式知，$k = \sqrt{b_2} = \sqrt{2}$。並由（20.19）式知，

$$g = -\tfrac{1}{2}(0) = 0 \qquad h = \tfrac{1}{2}\sqrt{4(2) - 0} = \sqrt{2}$$

再由(20.61)知，
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \qquad \cos\theta = 0$$

由表 1 可知，$\theta = \pi/2$。代入（20.27）式，則

$$y_c = (\sqrt{2})^t\left[B_1\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + B_2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]$$

(c)
$$y(t) = (\sqrt{2})^t\left[B_1\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + B_2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right] + 8 \tag{20.63}$$

(d)
$$y(0) = B_1 + 8 = 11 \qquad B_1 = 3$$
$$y(1) = \sqrt{2}B_2 + 8 = 18 \qquad B_2 = 7.07$$

因此，
$$y(t) = (\sqrt{2})^t\{3\cos[(\pi/2)t] + 7.07\sin[(\pi/2)t]\} + 8$$

(e) 由於 $k = \sqrt{2} > 1$，故其時徑爲發散。

經濟學上之應用

20.36 在許多市場中，供給與需求均受其當期價格與未來價格之影響（亦即，價格

是否上升或下降以及，價格是以遞增或遞減之速率上升或下降），因此經濟學往往需要知道其當期價格 $P(t)$，導數 $dP(t)/dt$，與二階導數 $d^2P(t)/dt^2$，假設

$$Q_s = c_1 + w_1P + u_1P' + v_1P'' \qquad Q_d = c_2 + w_2P + u_2P' + v_2P'' \tag{20.64}$$

試評論在每一期市場均達到均衡時，其動態穩定性。

圖 於均衡時，$Q_s = Q_d$。因此，

$$c_1 + w_1P + u_1P' + v_1P'' = c_2 + w_2P + u_2P' + v_2P''$$
$$(v_1 - v_2)P'' + (u_1 - u_2)P' + (w_1 - w_2)P = -(c_1 - c_2)$$

令 $v = v_1 - v_2$，$u = u_1 - u_2$，$w = w_1 - w_2$，$c = c_1 - c_2$，上式除以 v，使之合於（20.1）式，

$$P'' + \frac{u}{v}P' + \frac{w}{v}P = -\frac{c}{v} \tag{20.65}$$

使用（20.2）式求其特解，此即爲永久之均衡價格 $\bar{P}$。

$$\bar{P} = P_p = \frac{-(c/v)}{w/v} = -\frac{c}{w}$$

因爲 $c = c_1 - c_2$ 與 $w = w_1 - w_2$ 又在正常之供給函數下，$c_1 < 0$，$w_1 > 0$，且在正常之需求函數下，$c_2 > 0$，$w_2 < 0$，$-c/w > 0$，再使用（20.4）式求其輔助函數之特性根。

$$r_1, r_2 = \frac{-(u/v) \pm \sqrt{(u/v)^2 - 4(w/v)}}{2} \tag{20.66}$$

在不同之 w，u 與 v 值下，上式可能有三種不同解，茲說明如下：

1. 若 $(u/v)^2 > 4(w/v)$，r_1，r_2 將爲相異之兩實根，則 $P(t) = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t} - c/w$。
2. 若 $(u/v)^2 = 4(w/v)$，r_1，r_2 將爲實數重根，因此，（20.66）式可化簡爲 $-(u/v)/2$ 或 $-(u/2v)$。則由（20.17）式知，$P(t) = A_1e^{(u/2v)t} + A_2te^{-(u/2v)t} - c/w$。
3. 若 $(u/v)^2 < 4(w/v)$，r_1，r_2 將爲複數根，且由（20.26）式，可知 $P(t) = e^{gt}(B_1 \cos ht + B_2 \sin ht) - c/w$。其中由（20.19）式知，$g = -u/2v$ 且 $h = \frac{1}{2}\sqrt{4(w/v) - (u/v)^2}$。

同時，不同之 w，u，v 值乃決定於預期因素，如果人們受通貨膨脹心理之擾，並預期價格將持續上升，則（20.64）中之 u 將爲正，如果它們預期價格下跌，並暫時保留其購買力，則 u 將爲負值，等等。

20.37 於一類似於 Samuelson's 之乘數與加速度原理交互作用之模型中，假設

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \tag{20.67}$$
$$C_t = C_0 + cY_{t-1} \tag{20.68}$$
$$I_t = I_0 + w(C_t - C_{t-1}) \tag{20.69}$$

其中 $0 < c < 1$，$w > 0$ 且 $G_t = G_0$。(a) 求國民所得之時徑 $Y(t)$，(b) 評論其穩定性之條件。

解 (a) 將 (20.68) 代入 (20.69) 式，則

$$I_t = I_0 + cw(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \tag{20.70}$$

將 $G_t = G_0$ 代入 (20.70) 式，且將 (20.68) 式代入 (20.67) 式，然後重新整理各項，使之合於 (20.10) 式，

$$Y_t = C_0 + cY_{t-1} + I_0 + cw(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + G_0$$
$$Y_t - c(1+w)Y_{t-1} + cwY_{t-2} = C_0 + I_0 + G_0 \tag{20.71}$$

使用 (20.11) 式求其特解，

$$Y_p = \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1 - c(1+w) + cw} = \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c}$$

此即爲永久之均衡所得水準 $\bar{Y}$，再使用 (20.4) 式，求輔助函數之特性根，

$$r_1, r_2 = \frac{c(1+w) \pm \sqrt{[-c(1+w)]^2 - 4cw}}{2} \tag{20.72}$$

則根據不同之 c 與 w 值，上式可能有下列二種不同之解：

(1) 若 $c^2(1+w)^2 > 4cw$，或者，若 $c(1+w)^2 > 4w$，r_1，r_2 將爲相異之實根，則

$$Y(t) = A_1 r_1^t + A_2 r_2^t + \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c}$$

(2) 若 $c(1+w)^2 = 4w$，r_1，r_2 將爲實數重根，並由 (20.72) 與 (20.18) 式，知

$$Y(t) = A_1\left[\tfrac{1}{2}c(1+w)\right]^t + A_2 t\left[\tfrac{1}{2}c(1+w)\right]^t + \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c}$$

(3) 若 $c(1+w)^2 < 4w$，r_1，r_2 將爲複數根；由 (20.27) 式知，

$$Y(t) = k^t(B_1 \cos t\theta + B_2 \sin t\theta) + \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c}$$

其中由（20.60）式知，$k=\sqrt{cw}$，且由（20.61）式知θ必爲

$$\sin\theta=\frac{h}{k}\qquad\cos\theta=\frac{g}{k}$$

其中由（20.19）式知，$g=\frac{1}{2}c(1+w)$且$h=\frac{1}{2}\sqrt{4cw-c^2(1+w)^2}$。

(*b*) 在各種可能情況下本模型之穩定性，其必要與充分條件爲(1) $c<1$與(2) $cw<1$，因爲c＝MPC即有關前期所得之MPC，故c將小於1，而$cw<1$，表MPC與邊際資本－產出率之乘積必須小於1。最後，如果特性根爲共軛複數，則其時徑將爲擺動型。

附錄 I

四位數常用對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

摘自 Murray R. Spiegel, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Co., 1968.

四位數常用對數表（續）

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

附錄 II

自然對數表

0.000–0.499

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	$-\infty$	−6	−6	−5	5	−5	−5	−5	−4	−4
		90776	21461	80914	52146	29832	11600	96185	82831	71053
.01	−4.60517	.50986	.42285	.34281	.26870	.19971	.13517	.07454	.01738	*.96332
.02	−3.91202	.86323	.81671	.77226	.72970	.68888	.64966	.61192	.57555	.54046
.03	.50656	.47377	.44202	.41125	.38139	.35241	.32424	.29684	.27017	.24419
.04	.21888	.19418	.17009	.14656	.12357	.10109	.07911	.05761	.03655	.01593
.05	−2.99573	.97593	.95651	.93746	.91877	.90042	.88240	.86470	.84731	.83022
.06	.81341	.79688	.78062	.76462	.74887	.73337	.71810	.70306	.68825	.67365
.07	.65926	.64508	.63109	.61730	.60369	.59027	.57702	.56395	.55105	.53831
.08	.52573	.51331	.50104	.48891	.47694	.46510	.45341	.44185	.43042	.41912
.09	.40795	.39690	.38597	.37516	.36446	.35388	.34341	.33304	.32279	.31264
0.10	−2.30259	.29263	.28278	.27303	.26336	.25379	.24432	.23493	.22562	.21641
.11	.20727	.19823	.18926	.18037	.17156	.16282	.15417	.14558	.13707	.12863
.12	.12026	.11196	.10373	.09557	.08747	.07944	.07147	.06357	.05573	.04794
.13	.04022	.03256	.02495	.01741	.00992	.00248	*.99510	*.98777	*.98050	*.97328
.14	−1.96611	.95900	.95193	.94491	.93794	.93102	.92415	.91732	.91054	.90381
.15	.89712	.89048	.88387	.87732	.87080	.86433	.85790	.85151	.84516	.83885
.16	.83258	.82635	.82016	.81401	.80789	.80181	.79577	.78976	.78379	.77786
.17	.77196	.76609	.76026	.75446	.74870	.74297	.73727	.73161	.72597	.72037
.18	.71480	.70926	.70375	.69827	.69282	.68740	.68201	.67665	.67131	.66601
.19	.66073	.65548	.65026	.64507	.63990	.63476	.62964	.62455	.61949	.61445
0.20	−1.60944	.60445	.59949	.59455	.58964	.58475	.57988	.57504	.57022	.56542
.21	.56065	.55590	.55117	.54646	.54178	.53712	.53248	.52786	.52326	.51868
.22	.51413	.50959	.50508	.50058	.49611	.49165	.48722	.48281	.47841	.47403
.23	.46968	.46534	.46102	.45672	.45243	.44817	.44392	.43970	.43548	.43129
.24	.42712	.42296	.41882	.41469	.41059	.40650	.40242	.39837	.39433	.39030
.25	.38629	.38230	.37833	.37437	.37042	.36649	.36258	.35868	.35480	.35093
.26	.34707	.34323	.33941	.33560	.33181	.32803	.32426	.32051	.31677	.31304
.27	.30933	.30564	.30195	.29828	.29463	.29098	.28735	.28374	.28013	.27654
.28	.27297	.26940	.26585	.26231	.25878	.25527	.25176	.24827	.24479	.24133
.29	.23787	.23443	.23100	.22758	.22418	.22078	.21740	.21402	.21066	.20731
0.30	−1.20397	.20065	.19733	.19402	.19073	.18744	.18417	.18091	.17766	.17441
.31	.17118	.16796	.16475	.16155	.15836	.15518	.15201	.14885	.14570	.14256
.32	.13943	.13631	.13320	.13010	.12701	.12393	.12086	.11780	.11474	.11170
.33	.10866	.10564	.10262	.09961	.09661	.09362	.09064	.08767	.08471	.08176
.34	.07881	.07587	.07294	.07002	.06711	.06421	.06132	.05843	.05555	.05268
.35	−1.04982	.04697	.04412	.04129	.03846	.03564	.03282	.03002	.02722	.02443
.36	.02165	.01888	.01611	.01335	.01060	.00786	.00512	.00239	*.99967	*.99696
.37	−0.99425	.99155	.98886	.98618	.98350	.98083	.97817	.97551	.97286	.97022
.38	.96758	.96496	.96233	.95972	.95711	.95451	.95192	.94933	.94675	.94418
.39	.94161	.93905	.93649	.93395	.93140	.92887	.92634	.92382	.92130	.91879
0.40	−0.91629	.91379	.91130	.90882	.90634	.90387	.90140	.89894	.89649	.89404
.41	.89160	.88916	.88673	.88431	.88189	.87948	.87707	.87467	.87227	.86988
.42	.86750	.86512	.86275	.86038	.85802	.85567	.85332	.85097	.84863	.84630
.43	.84397	.84165	.83933	.83702	.83471	.83241	.83011	.82782	.82554	.82326
.44	.82098	.81871	.81645	.81419	.81193	.80968	.80744	.80520	.80296	.80073
.45	.79851	.79629	.79407	.79186	.78966	.78746	.78526	.78307	.78089	.77871
.46	.77653	.77436	.77219	.77003	.76787	.76572	.76357	.76143	.75929	.75715
.47	.75502	.75290	.75078	.74866	.74655	.74444	.74234	.74024	.73814	.73605
.48	.73397	.73189	.72981	.72774	.72567	.72361	.72155	.71949	.71744	.71539
.49	.71335	.71131	.70928	.70725	.70522	.70320	.70118	.69917	.69716	.69515

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

轉自 William H. Berger, *Standard Mathematical Tables*, 25th ed., © 1978. The Chemical Rubber Co., CRC Press, Inc.

自然對數表（續）

0.500-0.999

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.50	−0.69315	.69115	.68916	.68717	.68518	.68320	.68122	.67924	.67727	.67531
.51	.67334	.67139	.66943	.66748	.66553	.66359	.66165	.65971	.65778	.65585
.52	.65393	.65201	.65009	.64817	.64626	.64436	.64245	.64055	.63866	.63677
.53	.63488	.63299	.63111	.62923	.62736	.62549	.62362	.62176	.61990	.61804
.54	.61619	.61434	.61249	.61065	.60881	.60697	.60514	.60331	.60148	.59966
.55	.59784	.59602	.59421	.59240	.59059	.58879	.58699	.58519	.58340	.58161
.56	.57982	.57803	.57625	.57448	.57270	.57093	.56916	.56740	.56563	.56387
.57	.56212	.56037	.55862	.55687	.55513	.55339	.55165	.54991	.54818	.54645
.58	.54473	.54300	.54128	.53957	.53785	.53614	.53444	.53273	.53103	.52933
.59	.52763	.52593	.52425	.52256	.52088	.51919	.51751	.51584	.51416	.51249
0.60	−0.51083	.50916	.50750	.50584	.50418	.50253	.50088	.49923	.49758	.49594
.61	.49430	.49266	.49102	.48939	.48776	.48613	.48451	.48289	.48127	.47965
.62	.47804	.47642	.47482	.47321	.47160	.47000	.46840	.46681	.46522	.46362
.63	.46204	.46045	.45887	.45728	.45571	.45413	.45256	.45099	.44942	.44785
.64	.44629	.44473	.44317	.44161	.44006	.43850	.43696	.43541	.43386	.43232
.65	.43078	.42925	.42771	.42618	.42465	.42312	.42159	.42007	.41855	.41703
.66	.41552	.41400	.41249	.41098	.40947	.40797	.40647	.40497	.40347	.40197
.67	.40048	.39899	.39750	.39601	.39453	.39304	.39156	.39008	.38861	.38713
.68	.38566	.38419	.38273	.38126	.37980	.37834	.37688	.37542	.37397	.37251
.69	.37106	.36962	.36817	.36673	.36528	.36384	.36241	.36097	.35954	.35810
0.70	−0.35667	.35525	.35382	.35240	.35098	.34956	.34814	.34672	.34531	.34390
.71	.34249	.34108	.33968	.33827	.33687	.33547	.33408	.33268	.33129	.32989
.72	.32850	.32712	.32573	.32435	.32296	.32158	.32021	.31883	.31745	.31608
.73	.31471	.31334	.31197	.31061	.30925	.30788	.30653	.30517	.30381	.30246
.74	.30111	.29975	.29841	.29706	.29571	.29437	.29303	.29169	.29035	.28902
.75	.28768	.28635	.28502	.28369	.28236	.28104	.27971	.27839	.27707	.27575
.76	.27444	.27312	.27181	.27050	.26919	.26788	.26657	.26527	.26397	.26266
.77	.26136	.26007	.25877	.25748	.25618	.25489	.25360	.25231	.25103	.24974
.78	.24846	.24718	.24590	.24462	.24335	.24207	.24080	.23953	.23826	.23699
.79	.23572	.23446	.23319	.23193	.23067	.22941	.22816	.22690	.22565	.22439
0.80	−0.22314	.22189	.22065	.21940	.21816	.21691	.21567	.21433	.21319	.21196
.81	.21072	.20949	.20825	.20702	.20579	.20457	.20334	.20212	.20089	.19967
.82	.19845	.19723	.19601	.19480	.19358	.19237	.19116	.18995	.18874	.18754
.83	.18633	.18513	.18392	.18272	.18152	.18032	.17913	.17793	.17674	.17554
.84	.17435	.17316	.17198	.17079	.16960	.16842	.16724	.16605	.16487	.16370
.85	−0.16252	.16134	.16017	.15900	.15782	.15665	.15548	.15432	.15315	.15199
.86	.15082	.14966	.14850	.14734	.14618	.14503	.14387	.14272	.14156	.14041
.87	.13926	.13811	.13697	.13582	.13467	.13353	.13239	.13125	.13011	.12897
.88	.12783	.12670	.12556	.12443	.12330	.12217	.12104	.11991	.11878	.11766
.89	.11653	.11541	.11429	.11317	.11205	.11093	.10981	.10870	.10759	.10647
0.90	−0.10536	.10425	.10314	.10203	.10093	.09982	.09872	.09761	.09651	.09541
.91	.09431	.09321	.09212	.09102	.08992	.08883	.08774	.08665	.08556	.08447
.92	.08338	.08230	.08121	.08013	.07904	.07796	.07688	.07580	.07472	.07365
.93	.07257	.07150	.07042	.06935	.06828	.06721	.06614	.06507	.06401	.06294
.94	.06188	.06081	.05975	.05869	.05763	.05657	.05551	.05446	.05340	.05235
.95	.05129	.05024	.04919	.04814	.04709	.04604	.04500	.04395	.04291	.04186
.96	.04082	.03978	.03874	.03770	.03666	.03563	.03459	.03356	.03252	.03149
.97	.03046	.02943	.02840	.02737	.02634	.02532	.02429	.02327	.02225	.02122
.98	.02020	.01918	.01816	.01715	.01613	.01511	.01410	.01309	.01207	.01106
.99	.01005	.00904	.00803	.00702	.00602	.00501	.00401	.00300	.00200	.00100
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

自然對數表（續）

1.00–4.99

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.00000	.00995	.01980	.02956	.03922	.04879	.05827	.06766	.07696	.08618
.1	.09531	.10436	.11333	.12222	.13103	.13976	.14842	.15700	.16551	.17395
.2	.18232	.19062	.19885	.20701	.21511	.22314	.23111	.23902	.24686	.25464
.3	.26236	.27003	.27763	.28518	.29267	.30010	.30748	.31481	.32208	.32930
.4	.33647	.34359	.35066	.35767	.36464	.37156	.37844	.38526	.39204	.39878
.5	.40547	.41211	.41871	.42527	.43178	.43825	.44469	.45108	.45742	.46373
.6	.47000	.47623	.48243	.48858	.49470	.50078	.50682	.51282	.51879	.52473
.7	.53063	.53649	.54232	.54812	.55389	.55962	.56531	.57098	.57661	.58222
.8	.58779	.59333	.59884	.60432	.60977	.61519	.62058	.62594	.63127	.63658
.9	.64185	.64710	.65233	.65752	.66269	.66783	.67294	.67803	.68310	.68813
2.0	0.69315	.69813	.70310	.70804	.71295	.71784	.72271	.72755	.73237	.73716
.1	.74194	.74669	.75142	.75612	.76081	.76547	.77011	.77473	.77932	.78390
.2	.78846	.79299	.79751	.80200	.80648	.81093	.81536	.81978	.82418	.82855
.3	.83291	.83725	.84157	.84587	.85015	.85442	.85866	.86289	.86710	.87129
.4	.87547	.87963	.88377	.88789	.89200	.89609	.90016	.90422	.90826	.91228
.5	.91629	.92028	.92426	.92822	.93216	.93609	.94001	.94391	.94779	.95166
.6	.95551	.95935	.96317	.96698	.97078	.97456	.97833	.98208	.98582	.98954
.7	.99325	.99695	*.00063	*.00430	*.00796	*.01160	*.01523	*.01885	*.02245	*.02604
.8	1.02962	.03318	.03674	.04028	.04380	.04732	.05082	.05431	.05779	.06126
.9	.06471	.06815	.07158	.07500	.07841	.08181	.08519	.08856	.09192	.09527
3.0	1.09861	.10194	.10526	.10856	.11186	.11514	.11841	.12168	.12493	.12817
.1	.13140	.13462	.13783	.14103	.14422	.14740	.15057	.15373	.15688	.16002
.2	.16315	.16627	.16938	.17248	.17557	.17865	.18173	.18479	.18784	.19089
.3	.19392	.19695	.19996	.20297	.20597	.20896	.21194	.21491	.21788	.22083
.4	.22378	.22671	.22964	.23256	.23547	.23837	.24127	.24415	.24703	.24990
.5	.25276	.25562	.25846	.26130	.26413	.26695	.26976	.27257	.27536	.27815
.6	.28093	.28371	.28647	.28923	.29198	.29473	.29746	.30019	.30291	.30563
.7	.30833	.31103	.31372	.31641	.31909	.32176	.32442	.32708	.32972	.33237
.8	.33500	.33763	.34025	.34286	.34547	.34807	.35067	.35325	.35584	.35841
.9	.36098	.36354	.36609	.36864	.37118	.37372	.37624	.37877	.38128	.38379
4.0	1.38629	.38879	39128	.39377	.39624	.39872	.40118	.40364	.40610	.40854
.1	.41099	.41342	41585	.41828	.42070	.42311	42552	.42792	.43031	.43270
.2	.43508	.43746	.43984	.44220	.44456	.44692	.44927	.45161	.45395	.45629
.3	.45862	.46094	.46326	.46557	.46787	.47018	.47247	.47476	.47705	.47933
.4	.48160	.48387	.48614	.48840	.49065	.49290	.49515	49739	.49962	.50185
.5	.50408	.50630	.50851	.51072	.51293	.51513	.51732	.51951	.52170	.52388
.6	.52606	.52823	.53039	.53256	.53471	.53687	.53902	.54116	.54330	.54543
.7	.54756	.54969	.55181	.55393	.55604	.55814	.56025	56235	.56444	.56653
.8	.56862	.57070	.57277	.57485	.57691	.57898	.58104	.58309	.58515	.58719
.9	.58924	.59127	.59331	.59534	.59737	.59939	60141	.60342	.60543	.60744

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

自然對數表（續）

5.00–9.99

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.0	1.60944	.61144	.61343	.61542	.61741	.61939	.62137	.62334	.62531	.62728
.1	.62924	.63120	.63315	.63511	.63705	.63900	.64094	.64287	.64481	.64673
.2	.64866	.65058	.65250	.65441	.65632	.65823	.66013	.66203	.66393	.66582
.3	.66771	.66959	.67147	.67335	.67523	.67710	.67896	.68083	.68269	.68455
.4	.68640	.68825	.69010	.69194	.69378	.69562	.69745	.69928	.70111	.70293
.5	.70475	.70656	.70838	.71019	.71199	.71380	.71560	.71740	.71919	.72098
.6	.72277	.72455	.72633	.72811	.72988	.73166	.73342	.73519	.73695	.73871
.7	.74047	.74222	.74397	.74572	.74746	.74920	.75094	.75267	.75440	.75613
.8	.75786	.75958	.76130	.76302	.76473	.76644	.76815	.76985	.77156	.77326
.9	.77495	.77665	.77834	.78002	.78171	.78339	.78507	.78675	.78842	.79009
6.0	1.79176	.79342	.79509	.79675	.79840	.80006	.80171	.80336	.80500	.80665
.1	.80829	.80993	.81156	.81319	.81482	.81645	.81808	.81970	.82132	.82294
.2	.82455	.82616	.82777	.82938	.83098	.83258	.83418	.83578	.83737	.83896
.3	.84055	.84214	.84372	.84530	.84688	.84845	.85003	.85160	.85317	.85473
.4	.85630	.85786	.85942	.86097	.86253	.86408	.86563	.86718	.86872	.87026
.5	.87180	.87334	.87487	.87641	.87794	.87947	.88099	.88251	.88403	.88555
.6	.88707	.88858	.89010	.89160	.89311	.89462	.89612	.89762	.89912	.90061
.7	.90211	.90360	.90509	.90658	.90806	.90954	.91102	.91250	.91398	.91545
.8	.91692	.91839	.91986	.92132	.92279	.92425	.92571	.92716	.92862	.93007
.9	.93152	.93297	.93442	.93586	.93730	.93874	.94018	.94162	.94305	.94448
7.0	1.94591	.94734	.94876	.95019	.95161	.95303	.95445	.95586	.95727	.95869
.1	.96009	.96150	.96291	.96431	.96571	.96711	.96851	.96991	.97130	.97269
.2	.97408	.97547	.97685	.97824	.97962	.98100	.98238	.98376	.98513	.98650
.3	.98787	.98924	.99061	.99198	.99334	.99470	.99606	.99742	.99877	*.00013
.4	2.00148	.00283	.00418	.00553	.00687	.00821	.00956	.01089	.01223	.01357
.5	.01490	.01624	.01757	.01890	.02022	.02155	.02287	.02419	.02551	.02683
.6	.02815	.02946	.03078	.03209	.03340	.03471	.03601	.03732	.03862	.03992
.7	.04122	.04252	.04381	.04511	.04640	.04769	.04898	.05027	.05156	.05284
.8	.05412	.05540	.05668	.05796	.05924	.06051	.06179	.06306	.06433	.06560
.9	.06686	.06813	.06939	.07065	.07191	.07317	.07443	.07568	.07694	.07819
8.0	2.07944	.08069	.08194	.08318	.08443	.08567	.08691	.08815	.08939	.09063
.1	.09186	.09310	.09433	.09556	.09679	.09802	.09924	.10047	.10169	.10291
.2	.10413	.10535	.10657	.10779	.10900	.11021	.11142	.11263	.11384	.11505
.3	.11626	.11746	.11866	.11986	.12106	.12226	.12346	.12465	.12585	.12704
.4	.12823	.12942	.13061	.13180	.13298	.13417	.13535	.13653	.13771	.13889
.5	.14007	.14124	.14242	.14359	.14476	.14593	.14710	.14827	.14943	.15060
.6	.15176	.15292	.15409	.15524	.15640	.15756	.15871	.15987	.16102	.16217
.7	.16332	.16447	.16562	.16677	.16791	.16905	.17020	.17134	.17248	.17361
.8	.17475	.17589	.17702	.17816	.17929	.18042	.18155	.18267	.18380	.18493
.9	.18605	.18717	.18830	.18942	.19054	.19165	.19277	.19389	.19500	.19611
9.0	2.19722	.19834	.19944	.20055	.20166	.20276	.20387	.20497	.20607	.20717
.1	.20827	.20937	.21047	.21157	.21266	.21375	.21485	.21594	.21703	.21812
.2	.21920	.22029	.22138	.22246	.22354	.22462	.22570	.22678	.22786	.22894
.3	.23001	.23109	.23216	.23324	.23431	.23538	.23645	.23751	.23858	.23965
.4	.24071	.24177	.24284	.24390	.24496	.24601	.24707	.24813	.24918	.25024
.5	.25129	.25234	.25339	.25444	.25549	.25654	.25759	.25863	.25968	.26072
.6	.26176	.26280	.26384	.26488	.26592	.26696	.26799	.26903	.27006	.27109
.7	.27213	.27316	.27419	.27521	.27624	.27727	.27829	.27932	.28034	.28136
.8	.28238	.28340	.28442	.28544	.28646	.28747	.28849	.28950	.29051	.29152
.9	.29253	.29354	.29455	.29556	.29657	.29757	.29858	.29958	.30058	.30158
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

自然對數表（續）

0–499

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$-\infty$	0.0000	0.69315	1.09861	38629	.60944	.79176	.94591	*.07944	*.19722
1	2.30259	.39790	.48491	.56495	.63906	.70805	.77259	.83321	.89037	.94444
2	.99573	*.04452	*.09104	*.13549	*.17805	*.21888	*.25810	*.29584	*.33220	*.36730
3	3.40120	.43399	.46574	.49651	.52636	.55535	.58352	.61092	.63759	.66356
4	.68888	.71357	.73767	.76120	.78419	.80666	.82864	.85015	.87120	.89182
5	.91202	.93183	.95124	.97029	98898	*.00733	*02535	*.04305	*.06044	*.07754
6	4.09434	.11087	.12713	.14313	.15888	.17439	.18965	.20469	.21951	23411
7	.24850	.26268	.27667	.29046	.30407	.31749	.33073	.34381	.35671	.36945
8	.38203	.39445	.40672	.41884	.43082	.44265	.45435	.46591	.47734	.48864
9	.49981	.51086	.52179	.53260	.54329	.55388	.56435	.57471	.58497	.59512
10	4.60517	.61512	.62497	.63473	.64439	.65396	.66344	.67283	.68213	.69135
11	.70048	.70953	.71850	.72739	.73620	.74493	.75359	.76217	.77068	.77912
12	.78749	.79579	.80402	.81218	.82028	.82831	.83628	.84419	.85203	.85981
13	.86753	.87520	.88280	.89035	.89784	90527	.91265	.91998	.92725	.93447
14	.94164	.94876	.95583	.96284	.96981	.97673	.98361	.99043	.99721	*.00395
15	5.01064	.01728	02388	.03044	.03695	04343	.04986	.05625	.06260	.06890
16	.07517	.08140	.08760	.09375	.09987	.10595	.11199	.11799	.12396	.12990
17	.13580	.14166	.14749	.15329	.15906	.16479	.17048	.17615	.18178	.18739
18	.19296	.19850	.20401	.20949	.21494	.22036	.22575	.23111	.23644	.24175
19	.24702	.25227	.25750	.26269	.26786	.27300	.27811	.28320	.28827	.29330
20	5.29832	.30330	.30827	.31321	.31812	.32301	.32788	.33272	.33754	.34233
21	.34711	.35186	.35659	.36129	.36598	.37064	.37528	.37990	.38450	.38907
22	.39363	.39816	.40268	.40717	.41165	.41610	.42053	.42495	.42935	.43372
23	.43808	.44242	.44674	.45104	.45532	.45959	.46383	.46806	.47227	.47646
24	.48064	.48480	.48894	.49306	.49717	.50126	.50533	.50939	.51343	.51745
25	.52146	.52545	.52943	.53339	.53733	.54126	.54518	.54908	.55296	.55683
26	.56068	.56452	.56834	.57215	.57595	.57973	.58350	.58725	.59099	.59471
27	.59842	.60212	.60580	.60947	.61313	.61677	.62040	.62402	.62762	.63121
28	.63479	.63835	.64191	.64545	.64897	.65249	.65599	.65948	.66296	.66643
29	.66988	.67332	.67675	.68017	.68358	.68698	.69036	.69373	.69709	.70044
30	5.70378	.70711	.71043	.71373	.71703	.72031	.72359	.72685	.73010	.73334
31	.73657	.73979	.74300	.74620	.74939	.75257	.75574	.75890	.76205	.76519
32	.76832	.77144	.77455	.77765	.78074	.78383	.78690	.78996	.79301	.79606
33	.79909	.80212	.80513	.80814	.81114	.81413	.81711	.82008	.82305	.82600
34	.82895	.83188	.83481	.83773	.84064	.84354	.84644	.84932	.85220	.85507
35	.85793	.86079	.86363	.86647	.86930	.87212	.87493	.87774	.88053	.88332
36	.88610	.88888	.89164	.89440	.89715	.89990	.90263	.90536	.90808	91080
37	.91350	.91620	.91889	.92158	.92426	.92693	.92959	.93225	.93489	.93754
38	.94017	.94280	.94542	.94803	.95064	.95324	.95584	.95842	.86101	.96358
39	.96615	.96871	.97126	.97381	.97635	.97889	.98141	.98394	.98645	.98896
40	5.99146	.99396	.99645	.99894	*.00141	*.00389	*.00635	*.00881	*.01127	*.01372
41	6.01616	.01859	.02102	.02345	.02587	.02828	.03069	.03309	.03548	.03787
42	.04025	.04263	.04501	.04737	.04973	.05209	.05444	.05678	.05912	.06146
43	.06379	.06611	.06843	.07074	.07304	.07535	.07764	.07993	.08222	.08450
44	.08677	.08904	.09131	.09357	.09582	.09807	.10032	.10256	.10479	.10702
45	.10925	.11147	.11368	.11589	.11810	.12030	.12249	.12468	.12687	.12905
46	.13123	.13340	.13556	.13773	.13988	.14204	.14419	.14633	.14847	.15060
47	.15273	.15486	.15698	.15910	.16121	.16331	.16542	.16752	.16961	.17170
48	.17379	.17587	.17794	.18002	.18208	.18415	.18621	.18826	.19032	.19236
49	.19441	.19644	.19848	.20051	.20254	.20456	.20658	.20859	.21060	.21261
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

自然對數表（續）

500–999

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6.21461	.21661	.21860	.22059	.22258	.22456	.22654	.22851	.23048	.23245
51	.23441	.23637	.23832	.24028	.24222	.24417	.24611	.24804	.24998	.25190
52	.25383	.25575	.25767	.25958	.26149	.26340	.26530	.26720	.26910	.27099
53	.27288	.27476	.27664	.27852	.28040	.28227	.28413	.28600	.28786	.28972
54	.29157	.29342	.29527	.29711	.29895	.30079	.30262	.30445	.30628	.30810
55	.30992	.31173	.31355	.31536	.31716	.31897	.32077	.32257	.32436	.32615
56	.32794	.32972	.33150	.33328	.33505	.33683	.33859	.34036	.34212	.34388
57	.34564	.34739	.34914	.35089	.35263	.35437	.35611	.35784	.35957	.36130
58	.36303	.36475	.36647	.36819	.36990	.37161	.37332	.37502	.37673	.37843
59	.38012	.38182	.38351	.38519	.38688	.38856	.39024	.39192	.39359	.39526
60	6.39693	.39859	.40026	.40192	.40357	.40523	.40688	.40853	.41017	.41182
61	.41346	.41510	.41673	.41836	.41999	.42162	.42325	.42487	.42649	.42811
62	.42972	.43133	.43294	.43455	.43615	.43775	.43935	.44095	.44254	.44413
63	.44572	.44731	.44889	.45047	.45205	.45362	.45520	.45677	.45834	.45990
64	.46147	.46303	.46459	.46614	.46770	.46925	.47080	.47235	.47389	.47543
65	.47697	.47851	.48004	.48158	.48311	.48464	.48616	.48768	.48920	.49072
66	.49224	.49375	.49527	.49677	.49828	.49979	.50129	.50279	.50429	.50578
67	.50728	.50877	.51026	.51175	.51323	.51471	.51619	.51767	.51915	.52062
68	.52209	.52356	.52503	.52649	.52796	.52942	.53088	.53233	.53379	.53524
69	.53669	.53814	.53959	.54103	.54247	.54391	.54535	.54679	.54822	.54965
70	6.55108	.55251	.55393	.55536	.55678	.55820	.55962	.56103	.56244	.56386
71	.56526	.56667	.56808	.56948	.57088	.57228	.57368	.57508	.57647	.57786
72	.57925	.58064	.58203	.58341	.58479	.58617	.58755	.58893	.59030	.59167
73	.59304	.59441	.59578	.59715	.59851	.59987	.60123	.60259	.60394	.60530
74	.60665	.60800	.60935	.61070	.61204	.61338	.61473	.61607	.61740	.61874
75	.62007	.62141	.62274	.62407	.62539	.62672	.62804	.62936	.63068	.63200
76	.63332	.63463	.63595	.63726	.63857	.63988	.64118	.64249	.64379	.64509
77	.64639	.64769	.64898	.65028	.65157	.65286	.65415	.65544	.65673	.65801
78	.65929	.66058	.66185	.66313	.66441	.66568	.66696	.66823	.66950	.67077
79	.67203	.67330	.67456	.67582	.67708	.67834	.67960	.68085	.68211	.68336
80	6.68461	.68586	.68711	.68835	.68960	.69084	.69208	.69332	.69456	.69580
81	.69703	.69827	.69950	.70073	.70196	.70319	.70441	.70564	.70686	.70808
82	.70930	.71052	.71174	.71296	.71417	.71538	.71659	.71780	.71901	.72022
83	.72143	.72263	.72383	.72503	.72623	.72743	.72863	.72982	.73102	.73221
84	.73340	.73459	.73578	.73697	.73815	.73934	.74052	.74170	.74288	.74406
85	.74524	.74641	.74759	.74876	.74993	.75110	.75227	.75344	.75460	.75577
86	.75693	.75809	.75926	.76041	.76157	.76273	.76388	.76504	.76619	.76734
87	.76849	.76964	.77079	.77194	.77308	.77422	.77537	.77651	.77765	.77878
88	.77992	.78106	.78219	.78333	.78446	.78559	.78672	.78784	.78897	.79010
89	.79122	.79234	.79347	.79459	.79571	.79682	.79794	.79906	.80017	.80128
90	6.80239	.80351	.80461	.80572	.80683	.80793	.80904	.81014	.81124	.81235
91	.81344	.81454	.81564	.81674	.81783	.81892	.82002	.82111	.82220	.82329
92	.82437	.82546	.82655	.82763	.82871	.82979	.83087	.83195	.83303	.83411
93	.83518	.83626	.83733	.83841	.83948	.84055	.84162	.84268	.84375	.84482
94	.84588	.84694	.84801	.84907	.85013	.85118	.85224	.85330	.85435	.85541
95	.85646	.85751	.85857	.85961	.86066	.86171	.86276	.86380	.86485	.86589
96	.86693	.86797	.86901	.87005	.87109	.87213	.87316	.87420	.87523	.87626
97	.87730	.87833	.87936	.88038	.88141	.88244	.88346	.88449	.88551	.88653
98	.88755	.88857	.88959	.89061	.89163	.89264	.89366	.89467	.89568	.89669
99	.89770	.89871	.89972	.90073	.90174	.90274	.90375	.90475	.90575	.90675

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

附錄 III

指數函數表

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.000000	0.50	1.6487	0.606531
0.01	1.0101	0.990050	0.51	1.6653	.600496
0.02	1.0202	.980199	0.52	1.6820	.594521
0.03	1.0305	.970446	0.53	1.6989	.588605
0.04	1.0408	.960789	0.54	1.7160	.582748
0.05	1.0513	0.951229	0.55	1.7333	0.576950
0.06	1.0618	.941765	0.56	1.7507	.571209
0.07	1.0725	.932394	0.57	1.7683	.565525
0.08	1.0833	.923116	0.58	1.7860	.559898
0.09	1.0942	.913931	0.59	1.8040	.554327
0.10	1.1052	0.904837	0.60	1.8221	0.548812
0.11	1.1163	.895834	0.61	1.8404	.543351
0.12	1.1275	.886920	0.62	1.8589	.537944
0.13	1.1388	.878095	0.63	1.8776	.532592
0.14	1.1503	.869358	0.64	1.8965	.527292
0.15	1.1618	0.860708	0.65	1.9155	0.522046
0.16	1.1735	.852144	0.66	1.9348	.516851
0.17	1.1853	.843665	0.67	1.9542	.511709
0.18	1.1972	.835270	0.68	1.9739	.506617
0.19	1.2092	.826959	0.69	1.9937	.501576
0.20	1.2214	0.818731	0.70	2.0138	0.496585
0.21	1.2337	.810584	0.71	2.0340	.491644
0.22	1.2461	.802519	0.72	2.0544	.486752
0.23	1.2586	.794534	0.73	2.0751	.481909
0.24	1.2712	.786628	0.74	2.0959	.477114
0.25	1.2840	0.778801	0.75	2.1170	0.472367
0.26	1.2969	.771052	0.76	2.1383	.467666
0.27	1.3100	.763379	0.77	2.1598	.463013
0.28	1.3231	.755784	0.78	2.1815	.458406
0.29	1.3364	.748264	0.79	2.2034	.453845
0.30	1.3499	0.740818	0.80	2.2255	0.449329
0.31	1.3634	.733447	0.81	2.2479	.444858
0.32	1.3771	.726149	0.82	2.2705	.440432
0.33	1.3910	.718924	0.83	2.2933	.436049
0.34	1.4049	.711770	0.84	2.3164	.431711
0.35	1.4191	0.704688	0.85	2.3396	0.427415
0.36	1.4333	.697676	0.86	2.3632	.423162
0.37	1.4477	.690734	0.87	2.3869	.418952
0.38	1.4623	.683861	0.88	2.4109	.414783
0.39	1.4770	.677057	0.89	2.4351	.410656
0.40	1.4918	0.670320	0.90	2.4596	0.406570
0.41	1.5068	.663650	0.91	2.4843	.402524
0.42	1.5220	.657047	0.92	2.5093	.398519
0.43	1.5373	.650509	0.93	2.5345	.394554
0.44	1.5527	.644036	0.94	2.5600	.390628
0.45	1.5683	0.637628	0.95	2.5857	0.386741
0.46	1.5841	.631284	0.96	2.6117	.382893
0.47	1.6000	.625002	0.97	2.6379	.379083
0.48	1.6161	.618783	0.98	2.6645	.375311
0.49	1.6323	.612626	0.99	2.6912	.371577
0.50	1.6487	0.606531	1.00	2.7183	0.367870
x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}

摘自 William H. Berger, *Standard Mathematical Tables*, 25th ed., © 1978, The Chemical Rubber Co., CRC Press, Inc.

指數函數表（續）

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
1.0	2.7183	0.3679	5.5	244.69	0.0041
1.1	3.0042	0.3329	5.6	270.43	0.0037
1.2	3.3201	0.3012	5.7	298.87	0.0033
1.3	3.6693	0.2725	5.8	330.30	0.0030
1.4	4.0552	0.2466	5.9	365.04	0.0027
1.5	4.4817	0.2231	6.0	403.43	0.0025
1.6	4.9530	0.2019	6.1	445.86	0.0022
1.7	5.4739	0.1827	6.2	492.75	0.0020
1.8	6.0496	0.1653	6.3	544.57	0.0018
1.9	6.6859	0.1496	6.4	601.85	0.0017
2.0	7.3891	0.1353	6.5	665.14	0.0015
2.1	8.1662	0.1225	6.6	735.10	0.0014
2.2	9.0250	0.1108	6.7	812.41	0.0012
2.3	9.9742	0.1003	6.8	897.85	0.0011
2.4	11.023	0.0907	6.9	992.27	0.0010
2.5	12.182	0.0821	7.0	1,096.6	0.00091
2.6	13.464	0.0743	7.1	1,212.0	0.00083
2.7	14.880	0.0672	7.2	1,339.4	0.00075
2.8	16.445	0.0608	7.3	1,480.3	0.00068
2.9	18.174	0.0550	7.4	1,636.0	0.00061
3.0	20.086	0.0498	7.5	1,808.0	0.00055
3.1	22.198	0.0450	7.6	1,998.2	0.00050
3.2	24.533	0.0408	7.7	2,208.3	0.00045
3.3	27.113	0.0369	7.8	2,440.6	0.00041
3.4	29.964	0.0334	7.9	2,697.3	0.00037
3.5	33.115	0.0302	8.0	2,981.0	0.00034
3.6	36.598	0.0273	8.1	3,294.5	0.00030
3.7	40.447	0.0248	8.2	3,641.0	0.00027
3.8	44.701	0.0224	8.3	4,023.9	0.00025
3.9	49.402	0.0202	8.4	4,447.1	0.00022
4.0	54.598	0.0183	8.5	4,914.8	0.00020
4.1	60.340	0.0166	8.6	5,431.7	0.00018
4.2	66.686	0.0150	8.7	6,002.9	0.00017
4.3	73.700	0.0136	8.8	6,634.2	0.00015
4.4	81.451	0.0123	8.9	7,332.0	0.00014
4.5	90.017	0.0111	9.0	8,103.1	0.00012
4.6	99.484	0.0101	9.1	8,955.3	0.00011
4.7	109.95	0.0091	9.2	9,897.1	0.00010
4.8	121.51	0.0082	9.3	10,938	0.00009
4.9	134.29	0.0074	9.4	12,088	0.00008
5.0	148.41	0.0067	9.5	13,360	0.00007
5.1	164.02	0.0061	9.6	14,765	0.00007
5.2	181.27	0.0055	9.7	16,318	0.00006
5.3	200.34	0.0050	9.8	18,034	0.00006
5.4	221.41	0.0045	9.9	19,930	0.00005
x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}

索　引

A

acceleration principle　加速原理　463
adjoint matrix　伴隨矩陣　259
aggregated　整合　79
algorithm　算則　355
amplitude of fluctuation　振幅　479
antiderivative　反導數　389
antilogs　反對數　154
argument　引數　1
artificial variable　人工變數　359, 378
augmented matrix　擴張矩陣　230
autonomous consumption　自動消費　5
autonomous savings　自發性儲蓄　10
auxiliary function　輔助函數　48

B

balance of payment　國際收支平衡表　135
basic feasible solutions　基本可能解　341
basic solutions　基本解　341
basic variables　基本變數　355
basis theorem　基底定理　343
Bernoulli equation　貝努力方程式　431
bordered Hessian　鑲邊之赫辛行列式　299
boundary　邊界　341
boundary condition　邊界條件　392
budget line　預算線　27

C

capital/output ratio　邊際資本/產出率　451
Cartesian coordinates　笛卡兒座標　480
chain rule　連鎖律　50
change in demand　需求的變動　25
change in quantity demanded　需求量的變動　25
change of basis　基底之變換　356
characteristic　首數　153
characteristic matrix　特性矩陣　304
characteristic roots　特性根　304, 473
Cobb-Douglas production function, C-D　柯布道格拉斯生產函數　176
coefficient matrix　係數矩陣　229
coefficient　係數　1
cofactor　餘因式　257
columns　行　221
common logarithms　常用對數　153
comparative statics　比較靜態　97

complementary function 補助函數 426
complements 互補品 215
complex roots 複數根 477
conformable 形式相關 224
conjugate complex numbers 共軛複數 477
constant 常數 1
constant elasticity of substitution 固定替代彈性 194,215
constant function rule 常數函數法則 48
constant returns to scale 規模報酬 176
constraining function 限制函數 105
constraint 限制式 105
consumers' surplus 消費者剩餘 411
converge 收斂 410
corner 角點 341
critical value 臨界點 66，104
cross elasticity of demand 交叉彈性 122
cross or mixed partial derivative 交叉（或混合）偏導數 98
Cramer's rule 克萊莫法則 261
currency 通貨 137

D

damped 收斂型 459
decision or structural variables 決策或結構變數 340
definite integral 定積分 407
definite solution 定解 426
deflation 通貨緊縮 169
degree 次方 425
demand deposit 活期存款 137
dependent variable 依變數 1
depreciation 折舊 151
derivative 導數 46
determinant 行列式 255
deviation from the equilibrium 均衡之差異 426
diagonal matrix 對角矩陣 306
difference equation 差分方程式 457
differential 微分 99
differential equations 微分方程式 425
differentiation 微分法 47
dimensions 維度 221
diminishing returns to scale 遞減之規模報酬 176
discounting 折現 171
discrete growth 間斷成長 151
discriminant 判別式 297
discriminating 差別取價 78
displacement ratio 置換比例 356
disposal income 可支用所得 135
distinct real roots 相異實數根 476
diverge 發散 410
divergent 發散 465
dominant root 優勢根 482
dual 對偶 375
dumy variable 虛擬變數 359
dynamic 動態 395

E

effective rate of interest 實際利率 170

elastic 高彈性 67
elasticity of substitution 替代彈性 214
elements 元素 221
endogenous 內生的 1
Euler relations 尤拉關係式 480
exact equation 恰當方程式 428
excess demand 超額需求 432
exogenous 外生的 1
explicit function 顯函數 23，102
explode 發散型 459
exponential function 指數函數 151
extreme point 極點 340
extreme value 極值 66

F

feasible region 可能區域 340
final demand 最終需求 302
first and necessary condition 首要條件 65
fraction 正分數 460
frequency function 次數函數 412
function 函數 1
function of a function 複合函數 50

G

general function 一般性的函數 2
general solution 一般解 425
growth path 成長路徑 451

H

Harrod Model 哈樂得模型 463
Hessian 赫辛 296
higherorder derivative 高階導數 51
homogeneous 齊次的 175

I

idempotent matrix 等冪矩陣 228
identity matrix 單位矩陣 228
imaginary number 虛數 477
implicit function 隱函數 102
implicit function rule 隱函數法則 102
improper integral 瑕積分 410
income elasticity of demand 所得彈性 122
increasing returns to scale 遞增的規模報酬 176
independent variable 自變數 1
indicators 指標 356
inelastic 低（無）彈性 68
inflation 通貨膨脹 454
inflection point 反曲點 67，105
initial condition 初始條件 392
inner products 內積 224
input-output table 投入-產出表 303
integrand 積分因子 389
integrating factor 因式分解 429
integration 積分 389
integration by parts 部分積分 393
intermediate goods 中間財貨 302
interpolation 插補法 154
intertemporal equilibrium level 永久均衡水準 426
inverse function 逆函數 4
inverse function rule 逆函數法則 102
inverse matrix 反矩陣 259
investors 投資者 193

isocost line 等成本線 21，341
isoprofit 等利潤 340
iterative method 重複法 458

J

Jacbian determinant 傑可比行列式 295

L

lagged independent variable 遲延自變數 457
Lagrangian function 拉格朗齊函數 105
Lagrangian multiplier 拉格朗齊乘數 105
Laplace expansion 拉普拉斯展開式 257
Leontief matrix 里昂迪夫矩陣 303
limit 極限 408
linear programming 線性規劃 339
logarithm 對數 153
lump-sum tax 總額稅 31

M

mantissa 尾數 153
marginal cost 邊際成本 65
marginal physical product of capital 邊際實物產量 121
marginal propensity to consume 邊際消費傾向 5
marginal propensity to import 邊際進口傾向 40
marginal propensity to save 邊際儲蓄傾向 10
marginal revenue 邊際收益 65
Marshallian demand function 馬夏爾需求函數 301
mathematically-oriented 數學-導向 5
matrix algebra 矩陣代數 221
minor 子行列式 256
multiple effect 乘數效果 23
multiplier 乘數 1，23

N

natural exponential function 自然指數函數 152
negative definite 負肯定 296
negative semidefinite 負的半肯定 304
net investment 淨投資 395
nominal rate of interest 名目利率 170
nonnegative constraint 非負限制式 339
nonsingular 非奇異 255
normalized 正規化 304
nth root n次方根 155
null matrix 零矩陣 228
numerical constant 數值常數 1

O

objective function 原始或目標函數 105
optimal allocation 最適分配 339
optimal solution 最適解 340
optimum 最適情況 104
order 階次 226
order 序號 299
original or primitive function 原始函數 51
orthogonal 正交 335

orthonormal 正規正交 334
oscillate 擺動 459

P

partial derivative 偏導數 97
partial differential equation 偏微分方程式 428
partial elasticities 偏彈性 122
partial integration 偏積分 428
particular integral 特解 426
path 趨勢 479
perfect substitutes 完全之替代性 215
period 週期 479
periodic 週期性的 479
pivot column 樞紐行 356
pivot element 樞紐元素 356
pivoting 樞紐轉換 356
plateau 停滯點 65，66
polar coordinates 極座標 480
positive definite 正肯定 296
positive semidefinite 正的半肯定 304
power function 冪函數 48，151
present value 現值 171
price elasticity 價格彈性 67
primal 原始的 375
principal axes 主要軸 104
principal minor 主子行列式 296
probability density 機率密度 412
producers' surplus 生產者剩餘 412
product 乘積 49
proportional tax 比例稅 31

Q

quotient 商數 49

R

radians 弧長 478
rate of discount 折現率 171
ratio 比例 215
reduced form 縮減式 23
repeated real roots 實數重根 477
reserve requirement 法定準備 137
row 列 221

S

saddle point 一鞍點 105
scalar 純量 223
scalar multiplication 純量乘法 223
scale down 縮小 459
scale up 增大 459
second-order 二階 51
separated variables 分割變數 430
shadow price 影子價格 379
simplex algorithm 簡形算則 355
singular 奇異的 249
singular matrix 奇異矩陣 255
slack variable 鬆弛變數 342
solution equation 解之方程式 23
solution vector 解向量 229
specific function 特定的函數 2
speculators 投機者 193
square matrix 方陣 222
stationary value 定點值 66
stream of income 所得川流 171
subdeterminant 次行列式 256
subscripts 下標 222
summing up 加總 22
surplus variable 超額變數 342

symbolic constant or parameter 符號常數或參數 1
symmetric matrix 對稱矩陣 228

T

technical coefficient 技術係數 302
technical constraints 技術限制式 339
time deposit 定期存款 137
time path 時徑 395，432
total derivative 全導數 101
total differential 全微分 99
transaction-precautionary 交易-預防 23
transformation matrix 轉換矩陣 306
transpose 轉置 222
triangular matrix 三角矩陣 258
trigonometric function 三角函數 478

U

unitary elastic 單一彈性 68

V

value added 附加價值 303
variable 變數 1
vector 行向量 222

W

Walras' law 瓦拉斯定律 454
warranted rate of growth 保證成長率 463
weighted average 加權平均 213

Y

Young's Theorem 楊氏定理 98

[General Information]
书名=数理经济学原理及题解
作者=道林著；方世杰译
页数=512
出版社=台湾：晓园出版社；北京市：世界图书出版公司
出版日期=1993.06
SS号=10970266
DX号=000005297824
URL=http://book.szdnet.org.cn/bookDetail.jsp?dxNumber=000005297824&d=E987EBC9B494974CE7637F027D11BE5E